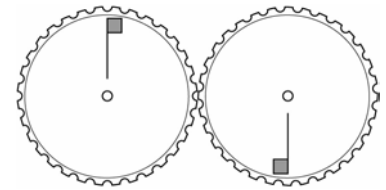
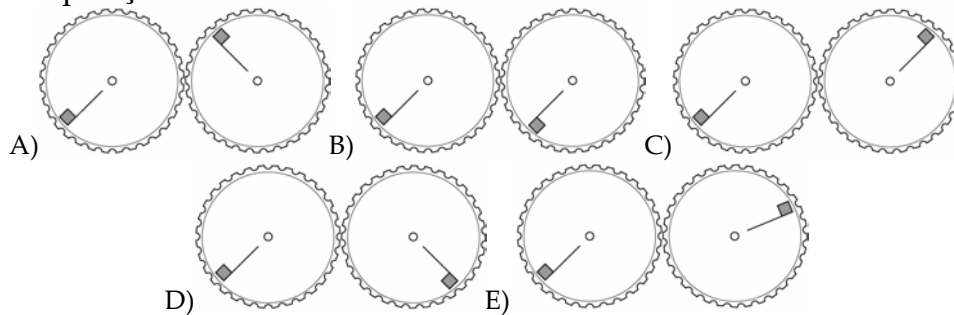


1) Juliano encaixou duas rodas dentadas iguais, cada uma com uma bandeirinha igual desenhada, como mostra a figura ao lado.



Então ele girou a roda da esquerda um pouco. Qual das alternativas abaixo pode representar a posição final das rodas?



2) Quantas frações da forma  $\frac{n}{n+1}$  são menores do que  $\frac{7}{9}$ , sabendo que  $n$  é um número inteiro positivo?

- A) 1      B) 2      C) 3      D) 4      E) 5

3) Numa certa povoação africana vivem 800 mulheres. Delas, 3% usam apenas um brinco; das restantes, metade usa dois brincos e a outra metade, nenhum. Qual o número total de brincos usados por todas as mulheres?

- A) 776      B) 788      C) 800      D) 812      E) 824

4) Ana, Bento e Lucas participam de um concurso que consta de 20 perguntas com a seguinte regra:

- cada resposta certa ganha 5 pontos,
- cada resposta errada perde 3 pontos,
- cada resposta em branco perde 2 pontos.

	Número de respostas certas	Número de respostas erradas	Número de respostas em branco
Ana	12	4	4
Bento	13	7	0
Lucas	12	3	5

Veja os resultados na tabela a seguir:

Escrevendo os nomes dos três em ordem decrescente de classificação no concurso, encontramos:

- A) Ana, Bento, Lucas      B) Lucas, Bento, Ana      C) Ana, Lucas, Bento  
D) Lucas, Ana, Bento      E) Bento, Lucas, Ana

5) Uma cerca de arame reta tem 12 postes igualmente espaçados. A distância entre o terceiro e o sexto poste é de 3,3 m. Qual é a distância entre o primeiro e o último poste?

- A) 8,4 m      B) 12,1 m      C) 9,9 m      D) 13,2 m      E) 9,075 m

6) Uma folha quadrada foi dobrada duas vezes ao longo de suas diagonais conforme ilustração ao lado, obtendo-se um triângulo.



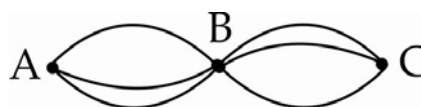
Foi feito um corte reto na folha dobrada, paralelo ao lado maior desse triângulo, passando pelos pontos médios dos outros lados, e desdobrou-se a folha. A área do buraco na folha corresponde a qual fração da área da folha original?

- A)  $\frac{1}{2}$       B)  $\frac{1}{6}$       C)  $\frac{3}{8}$       D)  $\frac{3}{4}$       E)  $\frac{1}{4}$

7) Qual é o menor número inteiro positivo  $N$  tal que  $\frac{N}{3}$ ,  $\frac{N}{4}$ ,  $\frac{N}{5}$ ,  $\frac{N}{6}$  e  $\frac{N}{7}$  são números inteiros?

- A) 420      B) 350      C) 210      D) 300      E) 280

8) Uma formiguinha vai caminhar de A até C passando por B, podendo passar apenas uma vez por esses pontos e pelos caminhos indicados na figura.



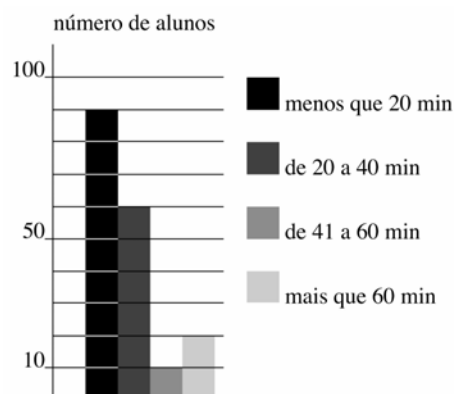
Qual o número de maneiras diferentes que ela pode escolher para ir de A até C?

- A) 3      B) 5      C) 7      D) 8      E) 9

9) Dados  $a$  e  $b$  números reais seja  $a \diamond b = a^2 - ab + b^2$ . Quanto vale  $1 \diamond 0$ ?

- A) 1      B) 0      C) 2      D) -2      E) -1

10) O diagrama de barras mostra a distribuição dos alunos de uma escola de acordo com o tempo que gastam no trajeto de casa para a escola. As frações de minuto não foram consideradas; assim, se um aluno gasta 40 minutos e 15 segundos neste trajeto, considera-se que o tempo gasto é de 40 minutos.



Responda as perguntas seguintes justificando sua resposta.

- (a) Quantos alunos gastam menos de 20 minutos para chegar à escola?  
 (b) Quantos alunos têm esta escola?  
 (c) Quantos alunos gastam mais do que 40 minutos para chegar à escola?  
 (d) É verdade que a maioria dos alunos gasta mais de 20 minutos no trajeto à escola?

1. (A) Os dois discos giram em sentidos opostos; quando um gira no sentido horário, o outro gira no sentido anti-horário. Considerando que a engrenagem da esquerda girou um ângulo  $x$  em um sentido, a engrenagem da direita girou o mesmo ângulo  $x$  no sentido oposto, e portanto a bandeirinha ficou na posição mostrada na alternativa (A).

2. (C) **Solução 1** - As frações da forma  $\frac{n}{n+1}$ , com  $n$  inteiro positivo são:

$$\frac{\underbrace{1}_{n=1}}{\underbrace{2}_{n=1}} \quad ; \quad \frac{\underbrace{2}_{n=2}}{\underbrace{3}_{n=2}} \quad ; \quad \frac{\underbrace{3}_{n=3}}{\underbrace{4}_{n=3}} \quad ; \quad \frac{\underbrace{4}_{n=4}}{\underbrace{5}_{n=4}} \quad ; \quad \frac{\underbrace{5}_{n=5}}{\underbrace{6}_{n=5}} \dots$$

Observe que esta seqüência de frações é crescente, isto é:  $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \dots$

Para comparar cada uma dessas frações com  $7/9$  precisamos igualar os denominadores. Temos:

$$\frac{1}{2} = \frac{9}{18} < \frac{14}{18} = \frac{7}{9} \quad ; \quad \frac{2}{3} = \frac{6}{9} < \frac{7}{9} \quad ; \quad \frac{3}{4} = \frac{27}{36} < \frac{28}{36} = \frac{7}{9} \quad ; \quad \frac{4}{5} = \frac{36}{45} > \frac{35}{45} = \frac{7}{9} .$$

Logo,  $4/5$  é maior do que  $7/9$ , e como a seqüência é crescente, a partir de  $4/5$  todas as frações desta seqüência são maiores do que  $7/9$ . Assim, as frações da forma  $\frac{n}{n+1}$  menores do que  $\frac{7}{9}$  são

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ . Portanto, a resposta é 3.

**Solução 2** - Transformando em números decimais temos:  $7/9=0,777\dots$  e  $1/2=0,5$  ;

$2/3=0,666\dots$  ;  $3/4=0,75$  ;  $4/5=0,8$  ;  $5/6=0,8333\dots$

Logo, a seqüência é crescente e apenas  $1/2=0,5$  ;  $2/3=0,666\dots$  ;  $3/4=0,75$  são menores do que  $7/9=0,777\dots$

**Solução 3** - Se  $\frac{n}{n+1} < \frac{7}{9}$ , então  $\frac{n}{n+1} - \frac{7}{9} < 0 \Rightarrow \frac{9n-7(n+1)}{9(n+1)} = \frac{2n-7}{9(n+1)} < 0$ . Como

$9(n+1) > 0$ , devemos ter  $2n-7 < 0$ , isto é  $n < \frac{7}{2} = 3,5$ . Logo,  $n = 1, 2, 3$  e portanto, as frações

são  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$  e  $\frac{3}{4}$ .

3. (C) **Solução 1** - Do enunciado temos que o número de mulheres que usam apenas um brinco é  $0,03 \times 800 = 24$ . Restam  $800 - 24 = 776$ , das quais 388 usam dois brincos e 388 não usam brincos. Logo, o número total de brincos usados por todas as mulheres é:  $24 + 388 \times 2 = 800$ .

**Solução 2** - Se cada mulher com dois brincos der um dos seus a uma das que não têm brincos, todas as 800 mulheres ficarão com um único brinco. Logo, o número de brincos é igual ao de mulheres, ou seja, 800.

4. (E) O número de pontos de cada um deles é:

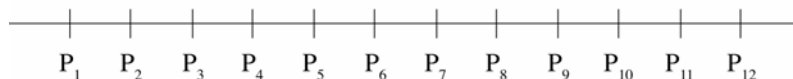
$$\text{Ana: } 5 \times 12 + (-3) \times 4 + (-2) \times 4 = 60 - 12 - 8 = 40$$

$$\text{Bento: } 5 \times 13 + (-3) \times 7 + (-2) \times 0 = 65 - 21 = 44$$

$$\text{Lucas: } 5 \times 12 + (-3) \times 3 + (-2) \times 5 = 60 - 9 - 10 = 41$$

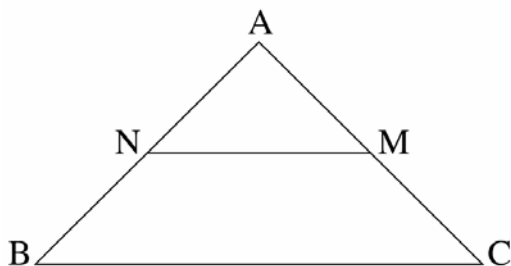
Logo, Bento foi o mais bem classificado, seguido de Lucas e depois de Ana.

5. (B) A distância entre dois postes consecutivos é  $\frac{3,3m}{3} = 1,1m$ , donde a distância entre o primeiro e o último poste é  $11 \times 1,1m = 12,1m$



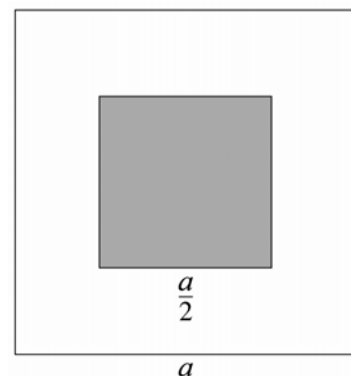
6. (E) Denotemos por  $a$  o lado do quadrado que é dobrado.

**Solução 1** - Na figura abaixo mostra o triângulo obtido após dobrar o quadrado ao longo das duas diagonais. Temos  $BC = a$ , o lado da folha quadrada original. Como o corte é feito pela base média  $MN$  do triângulo, temos:



$MN = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$ . Desdobrando-se a folha, vemos que o buraco é um quadrado de lado  $MN$ . A área do quadrado inicial é  $a^2$  e a do quadrado retirado é  $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$ . Logo, o buraco tem um quarto da área do quadrado original.

**Solução 2** - O corte é realizado pela base média do triângulo, retirando um triângulo pequeno semelhante ao original com razão de semelhança  $\frac{1}{2}$ ; deste modo, o triângulo retirado tem um quarto da área do triângulo original. Abrindo a folha, vemos essa situação reproduzida quatro vezes, donde o buraco tem um quarto da área do quadrado original.



7. (A) Para que  $\frac{N}{3}$ ,  $\frac{N}{4}$ ,  $\frac{N}{5}$ ,  $\frac{N}{6}$  e  $\frac{N}{7}$  sejam números inteiros,  $N$  deve ser múltiplo comum de 3, 4, 5, 6 e 7. Como queremos o menor  $N$  possível, ele deve ser o menor múltiplo comum de 3, 4, 5, 6 e 7. Sendo o MMC entre 3, 4, 5, 6 e 7 igual a 420, temos  $N=420$ .

8. (E) Para cada um dos 3 caminhos para ir de A até B, existem 3 opções para ir de B a C. Logo, há um total de  $3 \times 3 = 9$  possibilidades. Mas geralmente, se fossem  $m$  os caminhos de A até B e  $n$  os de B até C, então o número de caminhos que nossa formiguinha poderia tomar de A até C seria  $m \times n$ ; esta afirmativa é um caso particular do *Princípio multiplicativo*.

9. (A) Fazendo  $a=1$  e  $b=0$  em  $a \diamond b = a^2 - ab + b^2$  obtemos:  $1 \diamond 0 = 1^2 - 1 \times 0 + 0^2 = 1$ .

10. Conforme o enunciado, os alunos foram divididos em 4 grupos distintos. Cada uma das quatro barras do diagrama representa apenas um desses grupos.

(a) Os alunos que gastam menos de 20 minutos em seu trajeto de casa para a escola estão representados pela barra mais alta, que atinge a marca 90. Logo, 90 alunos gastam menos de 20 minutos para chegar à escola.

(b) Como já dito acima, cada barra representa um grupo diferente de alunos. Logo, o total de alunos na escola é a soma dos números representados pelas quatro barras; isto é:  $90 + 60 + 10 + 20 = 180$  alunos.

(c) Os alunos que gastam mais de 40 minutos são aqueles que estão em dois grupos: os que gastam de 41 a 60 minutos e os que gastam mais do que 60 minutos. No diagrama, esses grupos estão representados por duas barras; uma atinge a marca 10 e a outra, a marca 20, respectivamente. Logo, o total de alunos que gastam mais do que 40 minutos para chegar à escola é de  $10 + 20 = 30$ .

(d) Do item anterior, sabe-se que 30 alunos gastam mais do que 40 minutos para chegar à escola. Do diagrama, observa-se que 60 alunos gastam de 20 a 40 minutos. Portanto, temos *no máximo*  $30 + 60 = 90$  alunos que gastam mais do que 20 minutos para chegar à escola. Como a escola tem 180 alunos, concluímos que a resposta para esta pergunta é não.

1) Uma cidade ainda não tem iluminação elétrica e todos usam velas à noite. Na casa de João, usa-se uma vela por noite, sem queimá-la totalmente. Com os tocos de quatro destas velas, é possível fazer uma nova vela. Durante quantas noites João poderá iluminar sua casa com 43 velas?

- A) 43                      B) 53                      C) 56                      D) 57                      E) 60

2) Uma fábrica embala 8 latas de palmito em caixas de papelão cúbicas de  $20\text{ cm}$  de lado. Estas caixas são colocadas, sem deixar espaços vazios, em caixotes de madeira de  $80\text{ cm}$  de largura por  $120\text{ cm}$  de comprimento por  $60\text{ cm}$  de altura. Qual o número máximo de latas de palmito em cada caixote?

- A) 576                      B) 4608                      C) 2304                      D) 720                      E) 144

3) Um atleta corre  $5000\text{ m}$  por semana em uma quadra de esportes, que tem uma pista curta e outra longa. Em uma semana ele treinou seis dias, sendo que a cada dia correu uma vez na pista longa e duas na pista curta. Na semana seguinte ele treinou sete dias, sendo que a cada dia correu uma vez em cada pista. Podemos então afirmar que:

- A) a pista longa é três vezes maior que a curta.  
B) a pista longa é quatro vezes maior que a curta.  
C) a pista longa é cinco vezes maior que a curta.  
D) a pista longa é  $600\text{ m}$  mais longa que a curta.  
E) a pista longa é  $500\text{ m}$  mais longa que a curta.

4) O limite de peso que um caminhão pode transportar corresponde a 50 sacos de areia ou 400 tijolos. Se este caminhão já contém 32 sacos de areia, quantos tijolos, no máximo, ele ainda pode carregar?

- A) 132                      B) 144                      C) 146                      D) 148                      E) 152

5) Sabendo-se que  $0,333\dots = \frac{1}{3}$ , qual é a fração irredutível equivalente a  $0,1333\dots$ ?

- A)  $\frac{1}{13}$                       B)  $\frac{1}{15}$                       C)  $\frac{1}{30}$                       D)  $\frac{2}{15}$                       E)  $\frac{1333}{10000}$

6) André treina para a maratona dando voltas em torno de uma pista circular de raio  $100\text{ m}$ . Para percorrer aproximadamente  $42\text{ km}$ , o número de voltas que André precisa dar está entre:

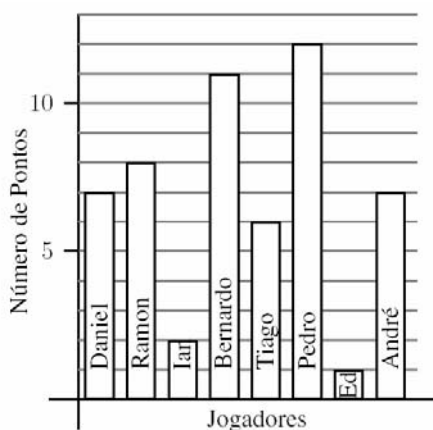
- A) 1 e 10                      B) 10 e 50                      C) 50 e 100                      D) 100 e 500                      E) 500 e 1000

7) Se 3 e  $\frac{1}{3}$  são as raízes da equação  $ax^2 - 6x + c = 0$ , qual o valor de  $a + c$ ?

- A) 1                      B) 0                      C)  $-\frac{9}{5}$                       D)  $\frac{18}{5}$                       E) -5

8) Os vértices de um cubo são numerados com os números de 1 a 8, de tal modo que uma das faces tem os vértices {1, 2, 6, 7} e as outras cinco têm vértices {1, 4, 6, 8}, {1, 2, 5, 8}, {2, 3, 5, 7}, {3, 4, 6, 7} e {3, 4, 5, 8}. Qual o número do vértice que está mais distante daquele de número 6?

- A) 1                      B) 3                      C) 4                      D) 5                      E) 7



9) O gráfico ao lado mostra o número de pontos que os oito jogadores de basquete do time da escola marcaram no último jogo.

Qual o número total de pontos marcados pelo time?

- A) 54                      B) 48                      C) 12  
D) 58                      E) 46

10) No último campeonato de futebol do bairro em que moro participaram 6 equipes. Cada equipe disputou com cada uma das outras exatamente uma partida. Abaixo, a tabela de classificação do campeonato, onde

- V é o número de vitórias de uma equipe
- E o número de empates
- D o número de derrotas
- GP é o número de gols feitos por um time
- GC é o número de gols sofridos

Equipe	V	E	D	GP	GC
A	4	1	0	6	2
B	2	1	2	6	6
C	0	3	2	2	6
D	1	1	y	3	6
E	0	1	4	1	5
F	x	1	0	z	3

- a) Quantas partidas foram disputadas?  
b) A tabela está incompleta. Determine a quantidade de vitórias da equipe F, a quantidade de derrotas da equipe D e a quantidade de gols feitos pela equipe F, representados por  $x$ ,  $y$  e  $z$  na tabela.

1. **(D)** De 43 velas obtém-se 43 tocos. Como  $43=4 \times 10+3$ , com esses 43 tocos se pode fazer 10 velas e guardar 3 tocos. Dessas 10 velas, obtemos 10 tocos que, com os 3 que sobraram, dão 13. Sendo  $13=4 \times 3+1$ , fazemos então 3 velas com 12 tocos, sobrando 1 toco. Depois de usar estas 3 velas, teremos um total de 4 tocos, que nos dá 1 vela extra. No total, obtemos  $43+10+3+1=57$ .

2. **(A)** Em cada caixote de madeira de dimensões  $a \times b \times c$  cabem, empilhados regularmente,  $\frac{a}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{c}{l}$  cubos de lado  $l$ . No nosso caso,  $a=60$ ,  $b=80$ ,  $c=120$  e  $l=20$ . Como 60, 80 e 120 são múltiplos de 20, podemos encher o caixote sem deixar espaços com  $\frac{60}{20} \times \frac{80}{20} \times \frac{120}{20} = 72$  caixas de papelão cúbicas de 20cm de cada lado. Logo, em cada caixote cabem  $72 \times 8 = 576$  latas de palmito.

3. **(C) Solução 1** - Denotemos por  $x$  e  $y$  os comprimentos das pistas longa e curta, respectivamente.

Numa semana, ele corre  $6(x+2y)$  e na outra  $7(x+y)$ . Como, em cada semana, ele corre os mesmos 5000 metros, temos:  $6(x+2y) = 7(x+y)$ .

Segue que  $6x+12y=7x+7y$ , e portanto,  $5y=x$ .

Assim, o comprimento da pista longa é cinco vezes o da pista curta.

**Solução 2** - Na semana em que Joãozinho treinou sete dias, ele correu uma pista longa a mais e cinco pistas curtas a menos do que a semana em que ele treinou apenas seis dias. Como a distância corrida foi a mesma nas duas semanas, concluímos que o comprimento da pista longa é igual ao comprimento de cinco pistas curtas.

4. **(B)** O enunciado mostra que o peso de 1 saco de areia é o mesmo que o de 8 tijolos. Se no caminhão já há 32 sacos de areia, ele pode carregar ainda 18 sacos, o que equivale  $18 \times 8 = 144$  tijolos.

5. **(D) Solução 1** - Usando o dado da questão temos:

$$0,1333\dots = \frac{1,333\dots}{10} = \frac{1+0,333\dots}{10} = \frac{1}{10} \left( 1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{10} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{15}.$$

**Solução 2** - Usando a regra que fornece a geratriz de uma dízima periódica, temos:

$$0,1333\dots = \frac{13-1}{90} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}.$$

6. **(C)** O comprimento de uma circunferência de raio  $r$  é  $2\pi r$ . Assim, em cada volta, André percorre  $2\pi \times 100m = 200\pi m$ . Logo, o número de voltas que André precisa dar é  $\frac{42000}{200\pi} = \frac{210}{\pi}$ .

Podemos agora finalizar o problema de duas maneiras:

1ª) A aproximação de  $\pi$  té a segunda casa decimal é 3,14. Daí,  $\frac{210}{\pi} \approx \frac{210}{3,14} \approx 66,878 \approx 66,88$ . Como 66,88 está entre 50 e 100, a opção correta é C.

2ª) Como  $3 < \pi < 4$  segue que  $\frac{1}{\pi} < \frac{1}{3}$  e  $\frac{1}{4} < \frac{1}{\pi}$ . Multiplicando ambos os lados dessas desigualdades por 210 obtemos:

$$\frac{210}{\pi} < \frac{210}{3} = 70 \text{ e } \frac{210}{4} < \frac{210}{\pi}.$$

Como  $\frac{210}{4} = 52,5$ , concluímos que André deve dar entre 53 e 70 voltas na pista para percorrer 42000 m.

7. (D) **Solução 1** – Como 3 e  $1/3$  são raízes da equação  $ax^2 - 6x + c = 0$  temos:

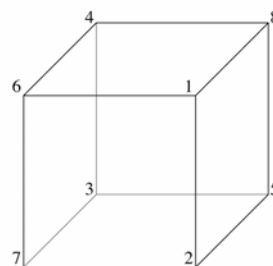
$$9a - 18 + c = 0 \Rightarrow 9a + c = 18 \text{ e } \frac{a}{9} - 2 + c = 0 \Rightarrow \frac{a}{9} + c = 2.$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} 9a + c = 18 \\ \frac{a}{9} + c = 2 \end{cases} \text{ obtemos } a = c = \frac{9}{5}. \text{ Logo, } a + c = \frac{18}{5}.$$

**Solução 2** – Numa equação do 2º grau  $ax^2 + bx + c = 0$ , a soma das raízes é  $-\frac{b}{a}$  e o produto  $\frac{c}{a}$ . Logo:  $3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3} = \frac{6}{a} \Rightarrow a = \frac{9}{5}$  e  $3 \times \frac{1}{3} = 1 = \frac{c}{a} \Rightarrow a = c$ . Assim,  $a + c = 2 \times \frac{9}{5} = \frac{18}{5}$ .

8. (D) **Solução 1** – Desenhando o cubo e numerando seus vértices de acordo com o enunciado da questão, obtemos a figura abaixo, onde podemos ver que o vértice 5 é o mais distante do vértice 6.



**Solução 2** – O vértice 6 está nas faces  $\{1, 2, 6, 7\}$ ,  $\{1, 4, 6, 8\}$  e  $\{3, 4, 6, 7\}$ . Como nestas faces não aparece o 5, segue que este é o vértice diagonalmente oposto ao 6, ou seja, o 5 é o vértice mais distante do 6.

9. (B) Basta ler no gráfico o número de pontos de cada aluno e somar para obter o total:  $7 + 8 + 2 + 11 + 12 + 1 + 7 = 48$

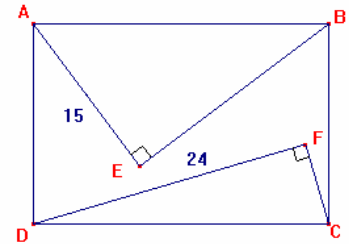
10. a) Cada uma das 6 equipes joga 5 partidas. Portanto, o número de partidas foi de  $\frac{6 \times 5}{2} = 15$ .

*Outra maneira de contar:* Podemos formar grupos de duas letras e contar o número de grupos: AB, AC, AD, AE, AF, BC, BD, BE, BF, CD, CE, CF, DE, DF, EF – o número de partidas é 15.

b) Para cada time, a soma do número de vitórias, empates e derrotas é igual a 5. Assim, temos  $1 + 1 + y = 5$ , ou seja,  $y = 3$ . Temos, também,  $x + 1 + 0 = 5$ , isto é,  $x = 4$ . O número total de gols feitos é igual ao número total de gols sofridos. Assim,  $z + 18 = 28$ , ou seja,  $z = 10$ .

Resumindo: O número de derrotas do time D é 3, o número de vitórias da equipe F é 4 e o número de gols sofridos pela equipe F é 10.

1) Na figura ao lado  $ABCD$  é um retângulo e  $ABE$  e  $CDF$  são triângulos retângulos. A área do triângulo  $ABE$  é  $150\text{cm}^2$  e os segmentos  $AE$  e  $DF$  medem, respectivamente,  $15\text{cm}$  e  $24\text{cm}$ . Qual o comprimento do segmento  $CF$ ?

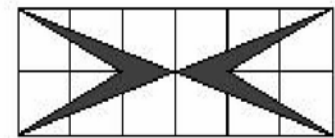


2) Usando apenas os dígitos 1, 2, 3, 4 e 5, Peri construiu uma seqüência da seguinte forma: um 1, dois 2, três 3, quatro 4, cinco 5, seis 1, sete 2 e assim por diante; abaixo vemos os primeiros termos desta seqüência:

1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, ....

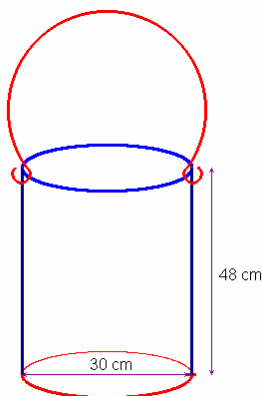
Qual é o 100º termo dessa seqüência?

3) A figura ao lado foi montada com 12 azulejos quadrados de lados iguais a  $10\text{cm}$ . Qual é a área da região hachurada?

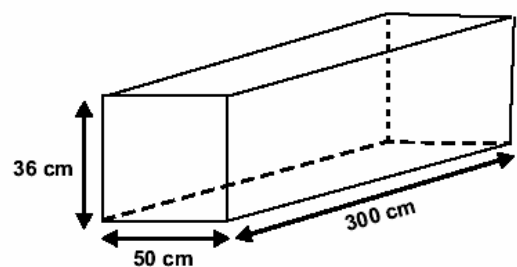


4) Capitu tem cem cartões numerados de 1 a 100. Todos os cartões têm uma face amarela e a outra vermelha, e o número de cada cartão está escrito em ambas as faces. Os cartões foram colocados sobre uma mesa, todos com a face vermelha voltada para cima. Capitu virou todos os cartões de número par e depois todos os cartões de número múltiplo de 3, colocando-os com a face amarela voltada para cima. Quantos cartões ficaram com a face vermelha para cima?

5) Para encher de água um tanque em forma de um bloco retangular de  $300\text{cm}$  de comprimento,  $50\text{cm}$  de largura e  $36\text{cm}$  de altura, um homem



utiliza um balde cilíndrico, de  $30\text{cm}$  de diâmetro em sua base e  $48\text{cm}$  de altura, para



pegar água numa fonte. Cada vez que ele vai à fonte, ele enche  $\frac{4}{5}$  do balde e no caminho derrama 10% do seu conteúdo. Estando o tanque inicialmente vazio, quantas viagens à fonte o homem terá que fazer para que a água no tanque chegue a  $\frac{3}{4}$  de sua altura?

1. O segmento  $CF$ , que queremos calcular, é um cateto do triângulo retângulo  $CDF$ . O teorema de Pitágoras, aplicado a este triângulo, diz que  $CD^2 = CF^2 + FD^2 = CF^2 + 24^2$  e daí tiramos  $CF^2 = CD^2 - 24^2$ . Ou seja, para achar  $CF$  basta conhecer  $CD$ . Como os lados opostos de um retângulo (e, mais geralmente, de um paralelogramo) são iguais, temos  $CD = AB$ , e nosso objetivo passa a ser o cálculo de  $AB$ .

Para isso, olhemos para o triângulo  $ABE$ ; sua área é  $\frac{AE \times BE}{2} = \frac{15 \times BE}{2} = 150$ , donde tiramos  $BE = 20$ . O teorema de Pitágoras aplicado a este triângulo nos dá  $AB^2 = AE^2 + BE^2 = 15^2 + 20^2 = 625 = 25^2$ , donde  $AB = 25$ .

Logo  $CD = AB = 25$  e, de acordo com nossa observação anterior, temos  $CF^2 = CD^2 - 24^2 = 25^2 - 24^2 = (25 + 24)(25 - 24) = 49$ . Obtemos então  $CF = 7$ .

Notamos que a solução independe da medida dos lados  $AD$  e  $BE$ .

2. Agrupamos a seqüência em blocos numerados consecutivamente, cada bloco formado pelos termos iguais consecutivos, como mostrado a seguir.

$$\underbrace{1}_{\text{bloco1}}, \underbrace{2,2}_{\text{bloco2}}, \underbrace{3,3,3}_{\text{bloco3}}, \underbrace{4,4,4,4}_{\text{bloco4}}, \underbrace{5,5,5,5,5}_{\text{bloco5}}, \underbrace{1,1,1,1,1,1}_{\text{bloco6}}, \underbrace{2,2,2,2,2,2,2}_{\text{bloco7}}, \underbrace{3,3,3,3,3,3,3,3}_{\text{bloco8}}, \dots, \underbrace{k, k, k, k, k, \dots, k}_{\substack{\text{bloco } n \\ k \in \{1,2,3,4,5\}}}$$

Observe que a numeração de cada bloco coincide com o número de termos que ele contém: o bloco 1 tem 1 termo, o bloco 2 tem 2 termos, o bloco 3 tem 3 termos, ..., o bloco  $n$  tem  $n$  termos. A posição na seqüência do último termo de cada bloco é obtida somando todos os números de 1 até o número atribuído ao bloco. Por exemplo:

o último 3 do bloco 8 é o 36º termo da seqüência porque  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$ .

o último 1 do bloco 11 é o 66º termo da seqüência porque  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 66$ .

Em geral, o último elemento do bloco  $n$  está na posição  $1 + 2 + 3 + \dots + n$ . Para calcular o valor desta soma, lembramos que  $1, 2, 3, \dots, n$  é uma progressão aritmética de razão 1, termo inicial  $a_1 = 1$  e  $n$ -ésimo termo  $a_n = n$ ; a soma de seus  $n$  primeiros termos é

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\underbrace{1}_{\text{bloco1}}, \underbrace{2,2}_{\text{bloco2}}, \underbrace{3,3,3}_{\text{bloco3}}, \underbrace{4,4,4,4}_{\text{bloco4}}, \underbrace{5,5,5,5,5}_{\text{bloco5}}, \underbrace{1,1,1,1,1,1}_{\text{bloco6}}, \underbrace{2,2,2,2,2,2,2}_{\text{bloco7}}, \underbrace{3,3,3,3,3,3,3,3}_{\text{bloco8}}, \underbrace{4,4,4,4,4,4,4,4,4}_{\text{bloco9}}, \dots, \underbrace{k, k, k, k, \dots, k}_{\text{blocon}}$$

$\downarrow$  36º  
 $\downarrow$  66º  
 $\downarrow$   $\frac{n(n+1)}{2}$

Precisamos agora descobrir em qual bloco se encontra o 100º termo da seqüência. Suponhamos que ele esteja no bloco  $n$ ; então sua posição é no máximo a do último termo deste bloco. Como ele não está no bloco  $n+1$ , concluímos que  $n$  é o menor inteiro tal que

$$100 \leq \frac{n(n+1)}{2}.$$

ou seja

$$200 \leq n(n+1)$$

Para determinar o valor de  $n$  devemos resolver essa inequação e escolher entre suas soluções o menor número inteiro. Como a expressão é bastante simples, é mais fácil resolvê-la por tentativas. Fazendo isso, vemos que  $n = 14$ ; de fato,  $13 \times (13+1) = 182 < 200$  e  $14 \times (14+1) = 210 > 200$ .

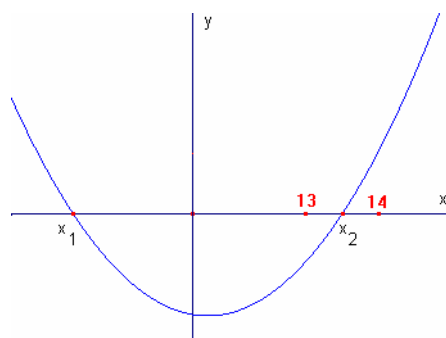
Logo o 100º termo da seqüência está no bloco 14. Os números que aparecem nos blocos se repetem de 5 em 5 blocos na ordem 1, 2, 3, 4, 5. Como  $14 = 5 \times 2 + 4$ , o bloco 14 é formado pelo número 4. Assim, o 100º termo da seqüência é 4.

Comentário: A resolução acima da inequação  $200 \leq n(n+1)$  apesar de correta, não serviria se o problema pedisse, por exemplo, para determinar o 10.000º termo da seqüência. Neste caso, teríamos que lidar com a inequação  $20.000 \leq n(n+1)$ , e é claro que achar sua menor solução inteira por tentativas não funciona (a não ser com muita, muita sorte!). Por isso vamos resolvê-la como seria feito para um caso qualquer.

Primeiro escrevemos  $200 \leq n(n+1)$  como  $n^2 + n - 200 \geq 0$ , o que nos leva ao estudo de sinal da função quadrática  $f(x) = x^2 + x - 200$ . As raízes de  $f(x)$  são  $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1+800}}{2}$ , que é negativa, e

$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1+800}}{2}$ , que é aproximadamente 13,6. O gráfico

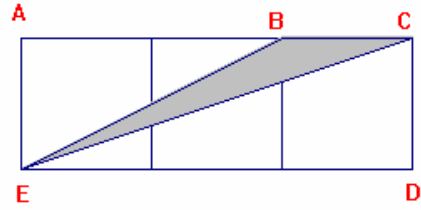
de  $f(x)$  está ilustrado na figura ao lado. Como  $f(x) \geq 0$  para  $x \leq x_1$  e  $x \geq x_2$ , segue que o  $n$  que estamos procurando é o menor inteiro que é maior ou igual a  $x_2$ , ou seja,  $n = 14$ .



Agora, se quiséssemos determinar o 10.000º termo da seqüência repetindo procedimento acima, encontraríamos  $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1+80000}}{2}$ , que é aproximadamente 140,9. Logo  $n = 141$  e o 10.000º termo da seqüência está no 141º bloco. Como  $141 = 28 \times 5 + 1$  segue que o 10.000º termo é 1.

3. A figura dada pode ser decomposta em quatro figuras iguais à figura ao lado. Para calcular a área do triângulo escolhemos como base o lado  $BC$ ; a altura correspondente é então  $AE$ . Como os azulejos são quadrados de lado  $10\text{ cm}$ , segue que  $AE = BC = 10\text{ cm}$ , e a área do triângulo  $BCE$  é

$$\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{10 \times 10}{2} = 50\text{ cm}^2. \text{ Logo, a área da região hachurada é } 4 \times 50 = 200\text{ cm}^2.$$



4. **Solução 1:** Capitu virou, em primeiro lugar, os 50 cartões pares; após isto, ficaram então na mesa os 50 cartões pares com a face amarela para cima e os 50 cartões ímpares com a face vermelha para cima. Ao virar agora os múltiplos de 3, ela virou apenas os múltiplos de 3 ímpares, que são 3, 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45, 51, 57, 63, 69, 75, 81, 87, 93 e 99. Assim, temos 17 múltiplos de 3 que são ímpares. Logo, Capitu virou para cima a face amarela de  $50 + 17 = 67$  cartões. Sobraram com a face vermelha para cima  $100 - 67 = 33$  cartões.

Comentário: Nesta solução, para determinar quantos são os múltiplos de 3 ímpares menores do que 100 é suficiente escrever esses múltiplos e contá-los. No entanto, se Capitu tivesse 1000 cartões (ou mais) esse procedimento seria bastante trabalhoso. Mas, nesse caso podemos proceder de modo mais geral. Notamos que os múltiplos ímpares de 3 de 1 a 1000 formam uma progressão aritmética com primeiro termo  $a_1 = 3$ , razão  $r = 6$  e o último termo  $a_n = 999$ . Para determinar  $n$  usamos a fórmula  $a_n = a_1 + (n-1)r$ , que no nosso caso é  $999 = 3 + (n-1) \times 6$ . Concluímos que  $n = 167$ , ou seja, temos 167 múltiplos ímpares de 3 menores do que 1000.

**Solução 2:** Capitu virou, em primeiro lugar, os 50 cartões pares; após isto, ficaram então na mesa os 50 cartões pares com a face amarela para cima e os 50 cartões ímpares com a face vermelha para cima. Ao virar então os cartões múltiplos de 3, Capitu fez o seguinte:

- *Entre os cartões pares:* Ela virou os que eram também múltiplos de 3. Um número que é múltiplo de 2 e de 3 também é múltiplo de 6. Como  $100 = 16 \times 6 + 4$ , concluímos que Capitu virou 16 cartões entre os cartões pares. Estes cartões voltaram a ficar com a face vermelha para cima, ficando os outros 34 com a face amarela para cima.
- *Entre os cartões ímpares:* Como  $100 = 33 \times 3 + 1$ , segue que o número total de cartões (pares e ímpares) múltiplos de 3 é 33. Como vimos acima, entre estes cartões 16 são pares, logo 17 são ímpares. Assim, Capitu virou 17 cartões ímpares, e estes cartões passaram a ter a face amarela para cima, enquanto que os outros 33 continuaram com a face vermelha para cima.

5. Nesta solução todas as medidas de volume são dadas em  $\text{cm}^3$ .

O volume  $V$  do balde é dado pela fórmula habitual do volume de um cilindro, ou seja,  $V = \text{área da base} \times \text{altura}$ . A base do balde é um círculo de diâmetro  $30\text{ cm}$ ; seu raio é então  $r = 15\text{ cm}$  e sua área é  $\pi r^2 = 225\pi\text{ cm}^2$ . Logo  $V = 48 \times 225\pi = 10.800\pi$ . A cada viagem, o volume de água que o homem coloca no balde é  $\frac{4}{5}$  de  $V$ , e deste volume ele perde 10%.

Logo, resta no balde 90% de  $\frac{4}{5}$  de  $V$ , isto é,  $\frac{9}{10} \times \frac{4}{5} V = \frac{18}{25} V = 0,72V = 0,72 \times 10800\pi = 7776\pi$ ; esta é quantidade de água que ele coloca no tanque em cada viagem, que denotaremos por  $B$ .

O volume de  $\frac{3}{4}$  do tanque é  $T = \frac{3}{4} \times 300 \times 36 \times 50 = 405.000$ . Logo, o número de baldes necessários

para atingir esse volume é  $\frac{405000}{B} = \frac{405000}{7776\pi} = \frac{625}{12\pi}$ . Usando a aproximação 3,14 para o número

$\pi$  temos  $\frac{625}{12\pi} \approx \frac{625}{12 \times 3,14} \approx 16,587$ . Logo o homem necessitará 16 baldes mais 0,587 de um balde.

Concluimos que o homem deverá fazer 17 viagens.

Comentário: Usamos acima uma aproximação para o valor de  $\pi$ ; é importante entender o que isto quer dizer. Como sabemos,  $\pi$  é um número irracional, e sua expansão decimal é infinita e não periódica. O valor aproximado de  $\pi$  com 31 casas decimais é  $\pi \approx 3,1415926535897932384626433832795$  (o símbolo  $\approx$  quer dizer “aproximadamente”). Por quê então não usar  $\pi \approx 3,142$  ou  $\pi \approx 3,1416$  para resolver nosso problema, em vez de  $\pi \approx 3,14$ ? Para discutir isto, vamos a um exemplo.

Suponhamos que você tem um balde cilíndrico com raio da base 1m e altura 1m, e uma caixa de água de volume de exatamente  $3,141 \text{ m}^3$ . O balde deve ser enchido em uma fonte. Quantas viagens à fonte serão necessárias para encher a caixa, supondo que o volume de água de cada balde é integralmente transferido para a caixa?

Usando a aproximação  $\pi \approx 3,14$  obtemos  $3,14 \text{ m}^3$  para o volume do balde. Como  $\frac{\text{volume do tanque}}{\text{volume do balde}} \approx \frac{3,141}{3,14}$  é maior que 1 (e, é claro, menor que 2), concluimos que serão necessárias duas viagens à fonte para encher a caixa de água.

Vamos agora usar a aproximação  $\pi = 3,1416$ . Aqui calculamos o volume do balde e obtemos  $3,1415 \text{ m}^3$ . Então  $\frac{\text{volume do tanque}}{\text{volume do balde}} \approx \frac{3,141}{3,1416}$  é menor que 1, e concluimos agora que basta uma viagem à fonte para encher o balde, resultado diferente do anterior!

Deve ficar claro com este exemplo que a escolha inicial de uma aproximação pode influenciar fortemente o resultado final. Nesse caso dizemos que as condições do problema são sensíveis à aproximação. No nosso problema original (problema 5), os dados iniciais não eram sensíveis à aproximação usada para  $\pi$ . Pode-se verificar isto imediatamente repetindo a solução com  $\pi \approx 3,142$  ou  $\pi \approx 3,1416$ ; em qualquer caso, obtem-se o resultado de 17 viagens.

Em geral, os problemas deste tipo propostos em livros nos ensinos fundamental e médio são enunciados de modo pouco sensível à aproximação. Isto justifica parcialmente o uso de “ $\pi = 3,14$ ” e de, por exemplo, “ $\sqrt{2} = 1,41$ ” (curiosidade:  $\sqrt{2} \approx 1,4142135623730950488016887242097$ ).

Notamos também que poucas casas decimais facilitam as contas, em particular quando não se usam máquinas de calcular. Seria impossível, na prática, trabalhar manualmente com aproximação de 31 casas que demos para  $\pi$  no início desta conversa.

O tratamento de problemas de aproximação é feito através de desigualdades; infelizmente, tempo e espaço não permitem que abordemos este tópico com mais detalhes no momento, mas esperamos ter despertado sua curiosidade para o assunto.

1) Qual é o maior fator primo de 2006?

2) Entre 1986 e 1989, a moeda do nosso país era o cruzado (Cz\$). De lá para cá, tivemos o cruzado novo, o cruzeiro, o cruzeiro novo e, hoje, temos o real. Para comparar valores do tempo do cruzado e de hoje, os economistas calcularam que 1 real equivale a 2.750.000.000 cruzados.

Imagine que a moeda não tivesse mudado e que João, que ganha hoje 640 reais por mês, tivesse que receber seu salário em notas de 1 cruzado cada uma. Se uma pilha de 100 notas de 1 cruzado tem 1,5 cm de altura, qual seria a altura do salário do João?

- A) 26,4 km      B) 264 km      C) 26400 km      D) 264000 km      E) 2640000 km

3) Há 1002 balas de banana e 1002 balas de maçã numa caixa. Lara tira, sem olhar o sabor, duas balas da caixa. Se  $q$  é a probabilidade das duas balas serem de sabores diferentes e  $p$  é a probabilidade das duas balas serem do mesmo sabor, qual o valor de  $q - p$ ?

- A) 0      B)  $1/2004$       C)  $1/2003$       D)  $2/2003$       E)  $1/1001$

4) Um ponto  $P$  está no centro de um quadrado com 10 cm de lado. Quantos pontos da borda do quadrado estão a uma distância de 6 cm de  $P$ ?

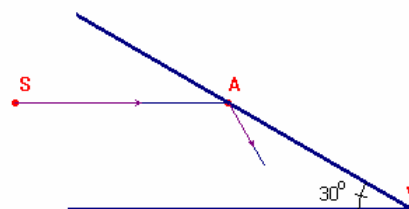
- A) 1      B) 2      C) 4      D) 6      E) 8

5) Se  $2(2^{2x}) = 4^x + 64$ , então  $x$  é igual a:

- A) -2      B) -1      C) 1      D) 2      E) 3

6) Dois espelhos formam um ângulo de  $30^\circ$  no ponto  $V$ . Um raio de luz parte de um ponto  $S$  paralelamente a um dos espelhos e é refletido pelo outro espelho no ponto  $A$ , como mostra a figura. Depois de uma certa quantidade de reflexões, o raio retorna a  $S$ .

Se  $AS$  e  $AV$  têm ambos 1 metro, qual o comprimento em metros do trajeto percorrido pelo raio de luz?



- A) 2      B)  $2 + \sqrt{3}$       C)  $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$       D)  $\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})$       E)  $5\sqrt{3}$

1. A decomposição de 2006 em fatores primos é  $2006 = 2 \times 17 \times 59$ . Logo, o maior fator primo de 2006 é 59.

2. **(D)** O enunciado diz que  $1 \text{ real} = 275 \times 10^7$  cruzados. O salário de João é 640 reais, o que é equivalente a  $640 \times 275 \times 10^7 = 176.000 \times 10^7 = 176 \times 10^{10}$  cruzados. O número de pilhas de 100 notas que se podem fazer com este número de notas de 1 cruzado é  $\frac{176 \times 10^{10}}{10^2} = 176 \times 10^8$ . Como cada uma destas pilhas tem altura 1,5 cm, a altura de todas elas é  $1,5 \times 176 \times 10^8 = 264 \times 10^8$  cm.

Lembramos agora que  $1 \text{ km} = 1000 \text{ m} = 10^3 \text{ m}$  e  $1 \text{ m} = 100 \text{ cm} = 10^2 \text{ cm}$ , donde  $1 \text{ km} = 10^3 \times 10^2 = 10^5 \text{ cm}$ . Logo uma pilha de  $264 \times 10^8$  cm tem  $\frac{264 \times 10^8}{10^5} = 264 \times 10^3 = 264.000 \text{ km}$  de altura.

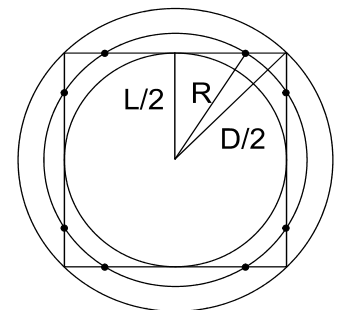
3. **(C)** A primeira bala pode ser de qualquer sabor; para fixar idéias suponhamos que seja de banana. Depois que esta bala é retirada sobram  $1002 + 1001$  balas na caixa – no nosso caso 1002 de maçã e 1001 de banana.

A probabilidade  $q$  de que a segunda bala seja diferente (no nosso exemplo, de maçã) é  $q = \frac{1002}{2003}$

A probabilidade  $p$  de que a segunda bala seja igual (no nosso exemplo, de banana) é  $p = \frac{1001}{2003}$

A diferença  $q - p$  é, portanto,  $q - p = \frac{1002}{2003} - \frac{1001}{2003} = \frac{1}{2003}$ .

4. **(E)** Os pontos que estão a 6 cm de distância do ponto P formam uma circunferência de centro P e raio  $R = 6 \text{ cm}$ . Se D denota a diagonal do quadrado, do teorema de Pitágoras temos  $D = \sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{2 \times 10^2} = 10\sqrt{2}$



A circunferência de raio  $L/2 = 5$  tangencia o quadrado em 4 pontos.

A circunferência de raio  $D/2$  toca o quadrado em 4 pontos (os vértices do quadrado).

Temos:  $L = 10$ ;  $R = 6$  e  $D = 10\sqrt{2}$ , logo  $\underbrace{5}_{L/2} < \underbrace{6}_R < \underbrace{5\sqrt{2}}_{D/2}$ . (Observe que  $1,2 < \sqrt{2}$  logo,

$5 \times 1,2 < 5 \times \sqrt{2}$  e portanto,  $6 < 5\sqrt{2}$ )

Assim, a circunferência de raio  $R = 6$  está “entre” as duas circunferências de raios  $5$  e  $5\sqrt{2}$ .

Logo, ela corta o quadrado em 8 pontos.

5. **(E) Solução 1:** Notamos que os termos do lado direito da equação dada podem ser escritos como potências de 2; de fato,  $4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$  e  $64 = 2^6$ . Desse modo, a equação se torna  $2(2^{2x}) = 2^{2x} + 2^3$ . Temos então  $2(2^{2x}) - 2^{2x} = 2^6$ , donde  $2^{2x}(2 - 1) = 2^6$ , ou seja  $2^{2x} = 2^6$ . Logo  $2x = 6$  e segue que  $x = 3$ .

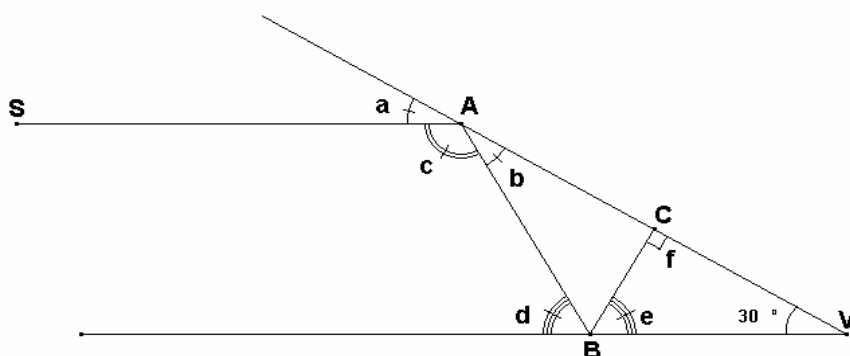
**Solução 2:**  $2(4^x) = 4^x + 4^3 \Rightarrow 4^x = 4^3 \Rightarrow x = 3$

6. **(B)** Vamos acompanhar o trajeto do raio de luz a partir do ponto  $S$ . Para isso, lembramos a propriedade básica da reflexão de um raio de luz em um espelho: o ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência. Por exemplo, na figura ao lado, os ângulos  $a$  e  $b$  são iguais, bem como  $d$  e  $e$ . Notamos que temos na figura as paralelas  $AS$  e  $BV$  cortadas pela transversal  $AB$ , daí segue que:

- $a = 30^\circ = b$ ,
- $a + b + c = 180^\circ$ , donde  $c = 120^\circ$ .
- $c + d = 180^\circ$ , donde  $d = 60^\circ = e$ .

Como a soma dos ângulos internos do triângulo  $BCV$  é  $180^\circ$ , segue que  $f = 90^\circ$ . Isso quer dizer que o nosso raio de luz, ao atingir  $C$ , será refletido sobre si mesmo e fará então o caminho inverso.

$C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow S$ . Desse modo, o trajeto completo do raio será  $S \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow S$ .

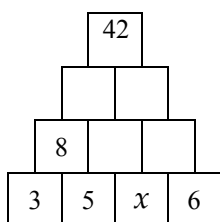


Desse modo, o comprimento do trajeto do raio até retornar a  $S$  é duas vezes a soma dos comprimentos dos segmentos  $AS$ ,  $AB$  e  $BC$ . O enunciado nos diz que  $AS = 1m$ . Falta calcular  $AB$  e  $BC$ . Para isso, olhamos para o triângulo  $ABC$ . Ele é um triângulo retângulo com ângulos de  $30^\circ$  e  $60^\circ$ . Sabemos que em um tal triângulo o cateto oposto ao ângulo de  $30^\circ$  tem comprimento igual à metade do comprimento da hipotenusa (exercício) no nosso caso, temos  $BC = \frac{1}{2} AB$ .

Notamos agora que os triângulos  $ABC$  e  $VBC$  são congruentes, pois são triângulos retângulos ( $f = 90^\circ$ ) com ângulos iguais ( $b = 30^\circ$ ) e um cateto comum ( $BC$ ), o que nos mostra que  $AC = \frac{1}{2}m$ . Pondo  $AB = x$  temos  $BC = \frac{1}{2}x$ , e o teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo  $ABC$  nos dá  $x^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x\right)^2$ ; simplificando, obtemos  $\frac{3}{4}x^2 = \frac{1}{4}$ , donde  $x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Desse modo, temos o comprimento do trajeto do raio de luz:

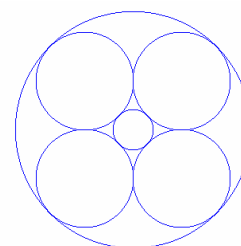
$$2(SA + AB + BC) = 2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = (2 + \sqrt{3})cm$$

- 1) Determine o valor de  $(666\ 666\ 666)^2 - (333\ 333\ 333)^2$ .
- 2) Na figura, o número 8 foi obtido somando-se os dois números diretamente abaixo de sua casa. Fazendo-se o mesmo para preencher as casas em branco, obtém-se o 42 na casa indicada. Qual é o valor de  $x$ ?



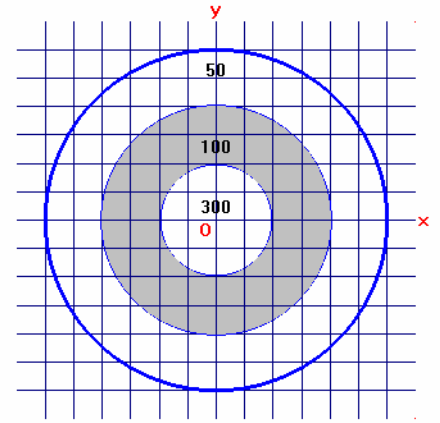
- A) 7                      B) 3                      C) 5                      D) 4                      E) 6
- 3) Seja  $n = 9867$ . Se você calculasse  $n^3 - n^2$ , encontraria um número cujo algarismo das unidades é:
- A) 0                      B) 2                      C) 4                      D) 6                      E) 8
- 4) O gráfico da parábola  $y = x^2 - 5x + 9$  é rodado de  $180^\circ$  em torno da origem. Qual é a equação da nova parábola?
- A)  $y = x^2 + 5x + 9$       B)  $y = x^2 - 5x - 9$       C)  $y = -x^2 + 5x - 9$       D)  $y = -x^2 - 5x + 9$       E)  $y = -x^2 - 5x - 9$

- 5) A figura mostra a marca de uma empresa, formada por dois círculos concêntricos e outros quatro círculos de mesmo raio, cada um deles tangente a dois dos outros e aos dois círculos concêntricos. O raio do círculo menor mede 1 cm. Qual é, em centímetros, o raio do círculo maior?



- 6) Um padeiro quer gastar toda sua farinha para fazer pães. Trabalhando sozinho, ele conseguiria acabar com a farinha em 6 horas; com um ajudante, o mesmo poderia ser feito em 2 horas. O padeiro começou a trabalhar sozinho; depois de algum tempo, cansado, ele chamou seu ajudante e assim, após 150 minutos a farinha acabou. Quanto tempo o padeiro trabalhou sozinho?

7) Manoel testou sua pontaria lançando cinco flechas no alvo reticulado de quadrados de comprimento  $1\text{ cm}$ , ilustrado na figura. Uma flecha que acerta dentro do círculo menor conta 300 pontos; na região sombreada conta 100 pontos, entre a região sombreada e o círculo maior conta 50 pontos e fora do círculo maior não conta nada. As flechas de Manoel acertaram os pontos  $A = (1, -1)$ ,  $B = \left(\frac{5}{2}, 1\right)$ ,  $C = (1, -4)$ ,  $D = (-4, -4)$  e  $E = (6, 5)$ .



- (a) Marque na figura os pontos onde Manoel acertou suas flechas.
- (b) Quantas flechas ele acertou no interior do menor círculo?
- (c) Quantos pontos Manoel fez no total?

8) A festa de aniversário de André tem menos do que 120 convidados. Para o jantar, ele pode dividir os convidados em mesas completas de 6 pessoas ou em mesas completas de 7 pessoas. Nos dois casos são necessárias mais do que 10 mesas e todos os convidados ficam em alguma mesa. Quantos são os convidados?

9) (a) Calcule o número de diagonais do prisma hexagonal reto representado na figura 1.

(b) Calcule o número de diagonais do prisma representado na figura 2.

Este poliedro é muito utilizado na fabricação de dados, e é obtido realizando-se oito cortes em um cubo, cada corte próximo a um dos seus 8 vértices (isso “arredonda” o dado e facilita a sua rolagem).

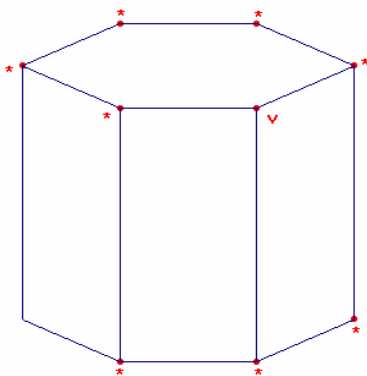


Figura 1

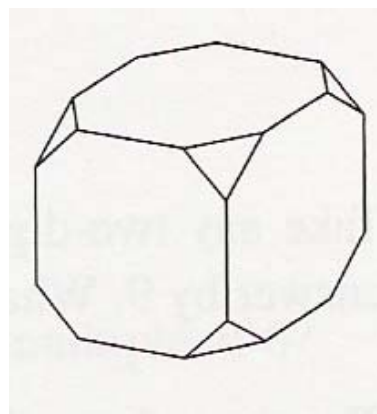
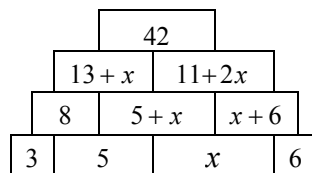


Figura 2

1. Usando a fatoração  $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ , obtemos :

$$\begin{aligned} 666.666.666^2 - 333.333.333^2 &= (666.666.666 - 333.333.333)(666.666.666 + 333.333.333) \\ &= 333.333.333 \times 999.999.999 \\ &= 333.333.333 \times (1.000.000.000 - 1) \\ &= 333.333.333.000.000.000 - 333.333.333 \\ &= 333.333.332.666.666.667 \end{aligned}$$

2. (E) Usando a regra dada no enunciado, preenchamos as casas vazias a partir da segunda linha a contar de baixo, obtemos:



Logo,  $(13 + x) + (11 + 2x) = 42$ . Assim,  $24 + 3x = 42$ . Donde  $x = 6$ .

3. (C) **Solução 1:** O algarismo final de  $9867^3$  é o mesmo que o de  $7^3 = 343$ , isto é, 3; o algarismo final de  $9867^2$  é o mesmo que o de  $7^2 = 49$ , isto é, 9. Se de um número terminado em 3 subtraímos outro terminado em 9, o algarismo final do resultado é 4.

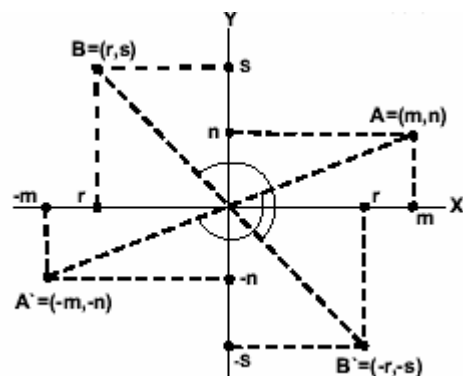
**Comentário:** Observe que:

$$\text{algarismo das unidades de } (9867^3 - 9867^2) = \text{algarismo das unidades de } (7^3 - 7^2)$$

**Solução 2:**  $n^3 - n^2 = n^2(n - 1)$ . Assim,  $n^2 = (9867)^2$  termina em 9 e  $n - 1 = 9866$  em 6.

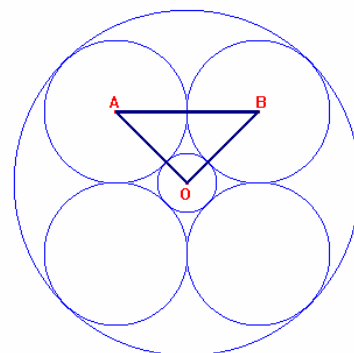
Como,  $9 \times 6 = 54$ , o algarismo final do resultado é 4.

4. (E) Uma rotação de  $180^\circ$  também é conhecida como *meia-volta*. Neste problema, temos uma meia-volta em torno da origem. O desenho ao lado ilustra o que esta meia-volta faz com as coordenadas dos pontos do plano. Por exemplo, o ponto  $A'$  é o resultado da meia-volta aplicada ao ponto  $A$ ; em outras palavras,  $A'$  é onde o ponto  $A$  vai parar após a meia-volta. Do mesmo modo,  $B'$  é onde  $B$  vai parar após a meia-volta. É fácil ver que na passagem de  $A$  para  $A'$  as coordenadas trocam de sinal. Deste modo, vemos que uma meia-volta em torno da origem leva um ponto qualquer  $(x, y)$  no ponto  $(-x, -y)$ .



Temos:  $(a, b)$  pertence à nova parábola  $\Leftrightarrow (-a, -b)$  pertence à parábola  $y = x^2 - 5x + 9 \Leftrightarrow -b = a^2 + 5a + 9 \Leftrightarrow b = -a^2 - 5a - 9$ . Logo a equação da nova parábola é  $y = -x^2 - 5x - 9$ .

5. Seja  $r$  o raio das quatro circunferências iguais. Ligando os centros  $A$  e  $B$  de duas destas circunferências ao centro  $O$  das circunferências concêntricas, obtemos o triângulo  $OAB$  como na figura ao lado. Lembrando que a reta que une os centros de duas circunferências tangentes passa pelo ponto de tangência, vemos que  $OA = OB = 1+r$  e  $AB = 2r$ . Lembrando também, que o triângulo  $OAB$  é retângulo em  $O$ , o teorema de Pitágoras nos diz então que  $(2r)^2 = (1+r)^2 + (1+r)^2$ , ou seja,  $4r^2 = 2r^2 + 4r + 2$ . Logo  $r^2 - 2r - 1 = 0$ ; daqui tiramos  $r = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$ . Como  $1 - \sqrt{2}$  é negativo, descartamos esta raiz e obtemos  $r = 1 + \sqrt{2}$ . Segue que o raio da circunferência maior é  $1 + 2r = 3 + 2\sqrt{2}$ .

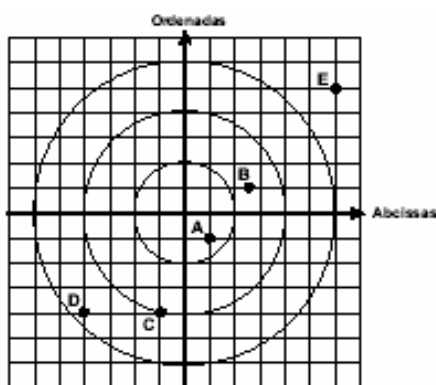


6. (D) Seja  $x$  a quantidade de farinha, em quilos, de que o padeiro dispõe. Trabalhando sozinho, ele usaria  $\frac{x}{6}$  quilos de farinha em 1 hora; trabalhando com seu ajudante, eles usariam  $\frac{x}{2}$  quilos de farinha em 1 hora. Seja  $t$  o tempo, em horas, que o padeiro trabalhou sozinho. Como a farinha acaba em 150 minutos (2 horas e 30 minutos = 2,5 horas), o tempo que ele trabalhou com seu ajudante foi  $2,5 - t$  horas. Logo, a quantidade gasta de farinha durante o tempo que o padeiro trabalhou sozinho é  $\frac{x}{6} \times t$ , e a quantidade gasta durante o tempo que o padeiro trabalhou com seu ajudante é  $\frac{x}{2} \times (2,5 - t)$ . Como

$$\underbrace{\text{quantidade total de farinha}}_x = \underbrace{\text{quantidade farinha gasta pelo padeiro trabalhando sozinho}}_{\frac{x}{6}t} + \underbrace{\text{quantidade farinha gasta pelo padeiro trabalhando com o ajudante}}_{\frac{x}{2}(2,5-t)}$$

temos  $x = \frac{x}{6}t + \frac{x}{2}(2,5 - t)$ . A quantidade de farinha que o padeiro tinha inicialmente era não

nula, isto é  $x \neq 0$ . Logo, podemos dividir ambos os membros por  $x$  e encontramos  $1 = \frac{t}{6} + \frac{2,5 - t}{2}$ , portanto,  $t = 0,75$  horas =  $0,75 \times 60$  minutos = 45 minutos.



7. (a) Marcamos os pontos, conforme mostra a figura:

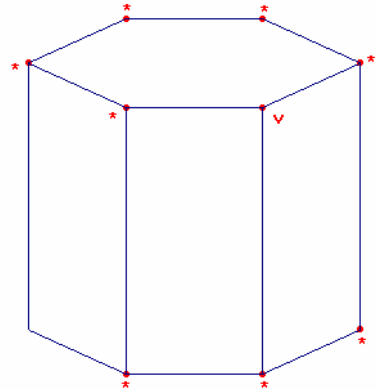
(b) No círculo menor temos apenas o ponto  $A$ . Portanto, Manoel acertou apenas uma vez neste círculo, o que lhe dá 300 pontos.

(c) Para calcular o total de pontos, observe que no ponto  $B$  ele ganha 100 pontos, no  $C$  ganha 50 pontos e no  $D$  ganha 50 pontos. Já no ponto no  $E$ , ele não ganha pontos, porque este está fora do alvo. Logo, o número total de pontos foi de  $300 + 100 + 50 + 50 = 500$  pontos.

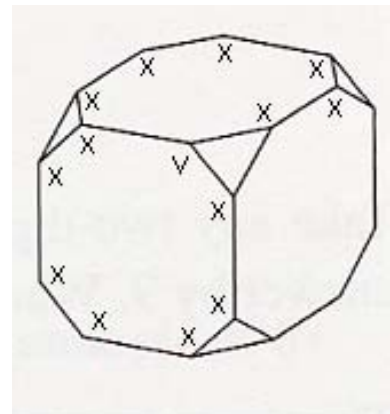
8. Como podemos repartir o total de convidados em mesas de 6 ou 7, o número de convidados é um múltiplo de 6 e de 7. Como o menor múltiplo comum de 6 e 7 é 42, podemos ter 42, 84, 126, ... convidados. Como são menos do que 120 convidados, só podemos ter 42 ou 84 convidados. Por outro lado, como são necessárias mais do que 10 mesas, temos mais do que 60 convidados. Logo, descartamos o 42, e o número de convidados só pode ser 84.

9. Em um poliedro qualquer, dois vértices distintos determinam uma diagonal se eles estiverem em faces distintas.

(a) No caso do prisma hexagonal, vemos na figura que o vértice  $v$  não forma uma diagonal com os vértices marcados com \*; levando o próprio  $v$  em conta, vemos que  $v$  não forma uma diagonal com exatamente 9 vértices. Como o prisma tem 12 vértices, segue que  $v$  forma uma diagonal com exatamente  $12 - 9 = 3$  vértices. O mesmo raciocínio vale para qualquer vértice, e concluímos que de cada vértice do prisma partem exatamente 3 diagonais. Como a diagonal que parte de um vértice  $v$  para o vértice  $w$  é a mesma que parte de  $w$  para  $v$ , segue que o número de diagonais é  $\frac{12 \times 3}{2} = 18$



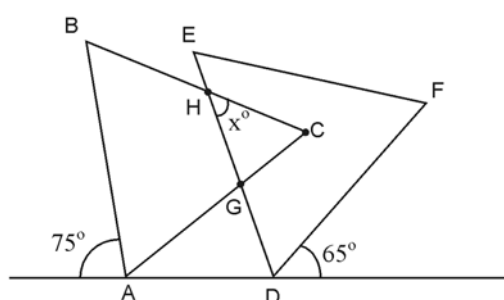
(b) Seja  $V$  um vértice do poliedro. Observando a figura vemos que  $V$  não forma uma diagonal com exatamente 14 vértices: 13 marcados com  $X$  e mais o próprio  $V$ . Como o poliedro tem 24 vértices no total, sobram  $24 - 14 = 10$  vértices com os quais  $V$  forma uma diagonal. Logo, o número de diagonais deste poliedro é  $\frac{24 \times 10}{2} = 120$ .



1) Uma loja de sabonetes realiza uma promoção com o anúncio "Compre um e leve outro pela metade do preço". Outra promoção que a loja poderia fazer oferecendo o mesmo desconto percentual é:

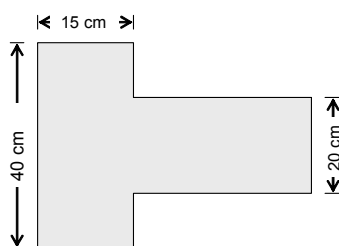
- A) "Leve dois e pague um"                      B) "Leve três e pague um"  
 C) "Leve três e pague dois"                  D) "Leve quatro e pague três"  
 E) "Leve cinco e pague quatro"

2) Na figura, os dois triângulos ABC e FDE são equiláteros. Qual é o valor do ângulo  $x$ ?



- A)  $30^\circ$                       B)  $40^\circ$                       C)  $50^\circ$                       D)  $60^\circ$                       E)  $70^\circ$

3) O desenho mostra um pedaço de papelão que será dobrado e colado ao longo das bordas para formar uma caixa retangular. Os ângulos nos cantos do papelão são todos retos. Qual será o volume da caixa em  $cm^3$ ?



- A) 1500                      B) 3000                      C) 4500                      D) 6000                      E) 12000

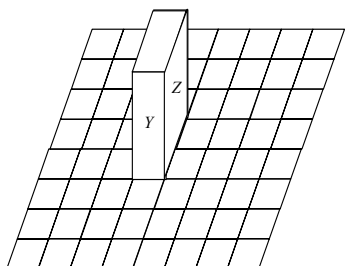
4) Numa seqüência, cada termo, a partir do terceiro, é a soma dos dois termos imediatamente anteriores, o segundo termo é 1 e o quinto termo é 2005. Qual é o sexto termo?

- A) 3002                      B) 3008                      C) 3010                      D) 4002                      E) 5004

5) Quantos números entre 10 e 13000, quando lidos da esquerda para a direita, são formados por algarismos consecutivos e em ordem crescente? Por exemplo, 456 é um desses números, mas 7890 não é.

- A) 10                      B) 13                      C) 18                      D) 22                      E) 25

6) Num bloco de  $1\text{cm} \times 2\text{cm} \times 3\text{m}$ , marcamos três faces com as letras X, Y e Z como na figura. O bloco é colocado sobre um tabuleiro de  $8\text{cm} \times 8\text{cm}$  com a face X virada para baixo (em contato com o tabuleiro) conforme mostra a figura. Giramos o bloco de  $90^\circ$  em torno de uma de suas arestas de modo que a face Y fique virada para baixo (isto é, totalmente em contato com o tabuleiro). Em seguida, giramos novamente o



bloco de  $90^\circ$  em torno de uma de suas arestas, mas desta vez de modo que a face Z fique virada para baixo. Giramos o bloco mais três vezes de  $90^\circ$  em torno de uma de suas arestas, fazendo com que as faces X, Y e Z fiquem viradas para baixo, nessa ordem. Quantos quadradinhos diferentes do tabuleiro estiveram em contato com o bloco?

- A) 18                      B) 19                      C) 20                      D) 21                      E) 22

7) A função  $f$  é dada pela tabela a seguir.

$x$	1	2	3	4	5
$f(x)$	4	1	3	5	2

Por exemplo,  $f(2) = 1$  e  $f(4) = 5$ . Quanto vale  $f(\underbrace{f(f(f(\dots f(4)\dots)))}_{2004 \text{ vezes}})$  ?

- A) 1                      B) 2                      C) 3                      D) 4                      E) 5

8) Esmeralda escreveu em ordem crescente todos os números de 1 a 999, sem separá-los, formando o número mostrado a seguir: 12345678910111213... 997998999. Nesse número, quantas vezes aparece o agrupamento "21", nesta ordem?

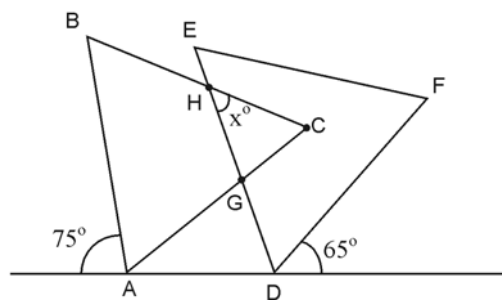
1. **(D)** Pela promoção, quem levar 2 unidades paga pelo preço de 1,5 unidade, logo quem levar 4 unidades paga pelo preço de 3 unidades, ou seja, leva quatro e paga três.

2. **(B)** Como ABC e DEF são triângulos equiláteros, cada um de seus ângulos internos mede  $60^\circ$ . No triângulo AGD temos

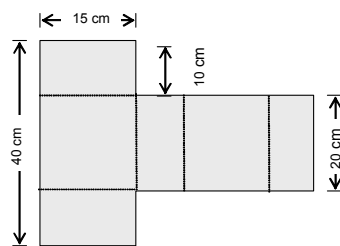
$$\hat{G}AD = 180^\circ - 75^\circ - 60^\circ = 45^\circ \text{ e}$$

$$\hat{G}DA = 180^\circ - 65^\circ - 60^\circ = 55^\circ$$

Portanto,  $\hat{A}GD = 180^\circ - 45^\circ - 55^\circ = 80^\circ$ . Logo no triângulo CGH temos  $x + 80^\circ + 60^\circ = 180^\circ$ , donde  $x = 40^\circ$ .



3. **(B)** A figura mostra as dobras que serão feitas para montar a caixa. A caixa terá dimensões  $20\text{cm}$  de largura,  $15\text{cm}$  de comprimento e  $10\text{cm}$  de altura. Logo, seu volume será igual a  $20 \times 15 \times 10 = 3000\text{cm}^3$ .



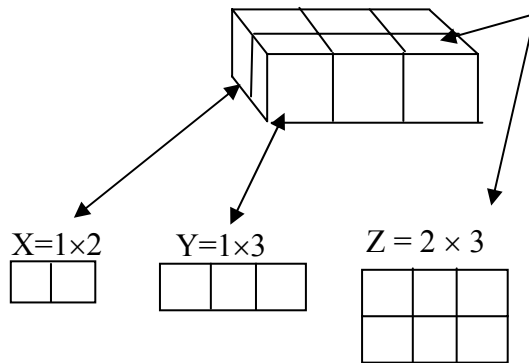
4. **(B)** Seja  $x$  o primeiro termo. Como o segundo termo é 1 e, a partir do terceiro, cada termo é a soma dos dois anteriores, temos:

- terceiro termo:  $1+x$ ;
- quarto termo:  $1+(1+x) = 2+x$ ;
- quinto termo:  $(1+x)+(2+x) = 3+2x$ ;
- sexto termo:  $(2+x)+(3+2x) = 5+3x$ .

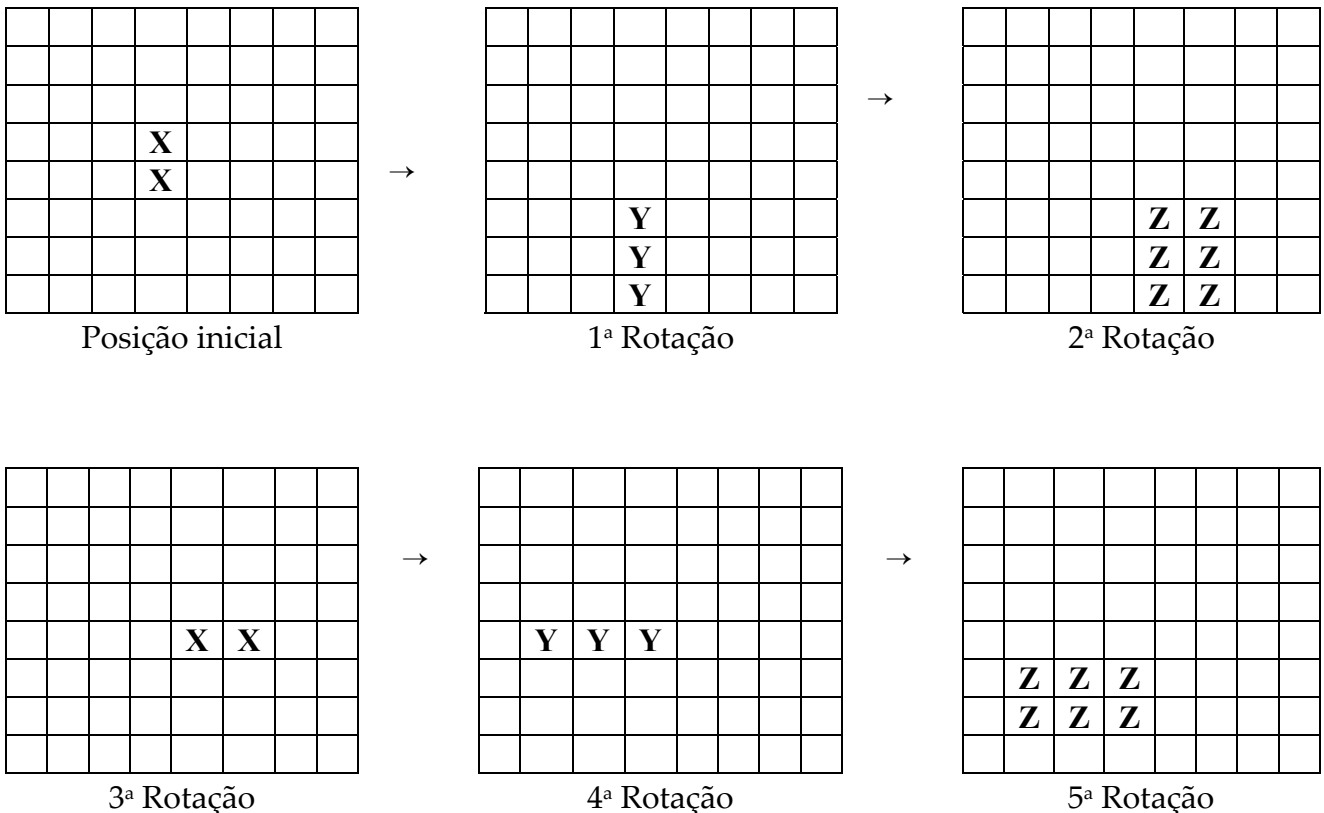
Como o quinto termo é 2005, temos  $3+2x=2005$ , donde  $x=1001$ ; logo o sexto termo é  $5+3 \times 1001 = 3008$ .

5. (D) Os números em questão são:
- com 2 algarismos: 12, 23, 34, 45, ..., 89 (8 números),
  - com 3 algarismos: 123, 234, 345, ..., 789 (7 números),
  - com 4 algarismos: 1234, 2345, ..., 6789 (6 números)
- e, por fim,
- com 5 algarismos: 12345, um total de  $8 + 7 + 6 + 1 = 22$  números.

6. (B) Note que giramos o bloco 5 vezes. Indicaremos os movimentos feitos pelo bloco e as faces que entram em contato com os quadradinhos em cada etapa. De acordo com a figura dada, podemos concluir que as dimensões das faces X, Y e Z são:



As figuras a seguir mostram os quadradinhos do tabuleiro que ficam em contato com cada um das 3 faces do bloco desde a posição inicial até a final, após a última rotação.



Alguns quadradinhos entram em contato com as faces mais de uma vez, como mostra a figura a seguir, que mostra todos os quadradinhos que tiveram contato com as faces do bloco desde a posição inicial até a última rotação:

			X				
	Y	Y	X/Y	X	X		
	Z	Z	Y/Z	Z	Z		
	Z	Z	Y/Z	Z	Z		
			Y	Z	Z		

Contando nesta última figura, vemos que o bloco esteve em contato com 19 quadradinhos do tabuleiro.

7. (D) Da tabela temos: Daí segue:

$$f(4) = 5 \quad , \quad f(\underbrace{f(4)}_5) = f(5) = 2 \quad , \quad f(\underbrace{f(f(4))}_5) = f(\underbrace{f(5)}_2) = f(2) = 1 \quad e$$

$$f(\underbrace{f(f(f(4)))}_5) = f(\underbrace{f(f(5))}_2) = f(\underbrace{f(2)}_1) = f(1) = 4 \quad \text{Logo, } \underbrace{f(f(f(f(4))))}_{4 \text{ vezes}} = 4.$$

Como 2004 é múltiplo de 4, segue que  $\underbrace{f(f(f(f(\dots f(4)\dots))))}_{2004 \text{ vezes}} = 4$ . O diagrama a seguir

ilustra esta afirmação.

A seqüência a seguir ilustra esta composição.

$$\underbrace{4 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{f} 4}_{4 \text{ vezes}} \underbrace{\xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{f} 4}_{8 \text{ vezes}} \underbrace{\xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{f} 4}_{12 \text{ vezes}} \xrightarrow{\dots} \underbrace{\xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{f} 4}_{2004 \text{ vezes}}$$

8. Vamos primeiro listar os números que têm o agrupamento 21 no meio de sua representação decimal:

$$21, 121, 221, \dots, 921 \rightarrow 10 \text{ números}$$

$$210, 211, \dots, 219 \rightarrow 10 \text{ números}$$

Temos também que contar os agrupamentos 21 obtidos a partir de um par de números consecutivos tal que o primeiro termina com 2 e o segundo começa com 1, que são os seguintes 11 casos:

$$12-13, 102-103, 112-113, 122-123, 132-133, 142-143, 152-153, 162-163, 172-173, 182-183, 192-193$$

Temos então um total de  $11 + 20 = 31$  números.