Apresentação

A idéia de organizar e divulgar um Banco de Questões com problemas propostos em provas de olimpíadas surgiu em 2005, por solicitação de alunos e professores que participavam da OBMEP e sentiram falta desse tipo de material. A excelente acolhida que teve o Banco de Questões-2006, por esses participantes, e também por estudantes de cursos de licenciatura em Matemática, nos motivou a continuar esse trabalho.

Boa parte dos problemas aqui apresentados foram extraídos de olimpíadas de Matemática nacionais e internacionais. Nessa edição, introduzimos alguns problemas com solução mais complexa, que não constaram do Banco Questões-2006. O mais importante é tentar resolvê-los, não importando o tempo gasto para isso e a dificuldade encontrada. Igualmente importante, é entender a solução que apresentamos. Não conseguir resolvê-los não deve ser motivo de desânimo. Entendemos que resolver, ou tentar resolver, problemas desafiadores, é uma das mais interessantes e eficientes formas de aprender Matemática.

Os problemas estão separados em três níveis, de acordo com a classificação feita pela OBMEP, mas muitos deles podem (e devem) ser resolvidos por todos os alunos. Assim sendo, recomendamos que os alunos "passeiem" por todos os problemas e selecionem alguns, de outros níveis, para resolver.

Desejamos que esse Banco de Questões propricie a todos um bom trabalho e um divertimento interessante.

Direção Acadêmica da OBMEP

Conteúdo

Nível 1

Lista 1

1. ***Múltiplos de*** 9

   (a) Qual é o menor múltiplo (positivo) de 9 que é escrito apenas com os algarismos 0 e 1?

   (b) Qual é o menor múltiplo (positivo) de 9 que é escrito apenas com os algarismos 1 e 2?

2. ***A florista -*** Uma florista colheu $49kg$ de flores do campo que podem ser vendidas imediatamente por $R\$1,25$ o quilo. A florista pode também vendê-las desidratadas por 2 reais a mais no quilo. O processo de desidratação faz as flores perderem 5/7 de seu peso. Qual é o tipo de venda mais lucrativo para a florista?

3. ***Divisores -*** Seja N o menor número que tem 378 divisores e é da forma $2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d$. Quanto vale cada um desses expoentes?

4. ***O produto dos algarismos -*** Denotemos por $P(n)$ o produto dos algarismos do número n. Por exemplo: $P(58) = 5 \times 8 = 40$ e $P(319) = 3 \times 1 \times 9 = 27$.

   (a) Quais os números naturais menores que 1000 cujo produto de seus algarismos é 12, ou seja: os números naturais $n < 1\,000$ tais que $P(n) = 12$?

   (b) Quantos números naturais menores que 199 satisfazem $P(n) = 0$? Ou seja: têm o produto de seus algarismos igual a 0?

(c) Quais números naturais menores que 200 satisfazem a desigualdade $37 < P(n) < 45$?

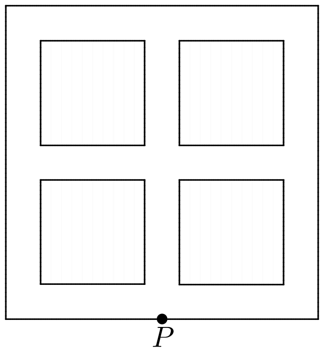
(d) Dentre os números de 1 a 250, qual o número cujo produto de seus algarismos é o maior?

5. ***Suco de laranja*** **-** Davi vai a um armazém que vende uma garrafa de suco de laranja por $R\$2,80$ e uma caixa com seis dessas garrafas por $R\$15,00$. Ele precisa comprar 22 garrafas para seu aniversário. Quanto ele gastará no mínimo?

6. ***A casa da Rosa*** **-** A figura mostra a planta da casa da Rosa. O quarto e o quintal são quadrados. Qual é a área da cozinha?

7. ***O passeio do Matias*** **-** Matias passeia em volta de 4 quarteirões perto de sua casa. O seu passeio consiste em fazer o maior percurso possível de bicicleta, respeitando as seguintes condições:

ele pode passar várias vezes pelos cruzamentos das ruas, mas ele não pode passar mais do que uma vez pela mesma quadra. Quando ele não pode mais respeitar essas condições, ele tem que saltar da bicicleta e voltar a pé. Ele parte de P e deve voltar a P. Os quatro quarteirões são quadrados com 100 metros de lado em cada quadra. Qual o maior percurso que ele pode fazer? A largura das ruas é desprezível.



8. ***O adesivo dos carros oficiais* -** O prefeito de uma cidade decidiu colocar um adesivo em todos os carros oficiais. O adesivo terá a forma retangular com 6 quadrados dispostos em 2x3 e com 3 cores: 1 quadrado azul, 2 quadrados amarelos e 3 quadrados verdes. Dentre quantos tipos diferentes de adesivo o prefeito terá que escolher?

Soluções da Lista 1

1. ***Múltiplos de*** 9

   (a) Um número é divisível por 9 se a soma dos seus algarismos é um múltiplo de 9. Logo, o número deve ter 9 algarismos iguais a 1. Assim, o menor número é: 111 111 111.

   (b) Devemos usar o maior número possível de algarismos iguais a 2, que devem ficar nas casas mais à direita. Assim, o menor número é: 12 222.

2. ***A florista* -** Se a florista vender as flores sem desidratá-las, ela vai apurar $49 \times 1,25 = 61,25$ reais.

   O peso das flores após a desidratação é $\frac{2}{7} \times 49 = 14\,kg$. Logo, vendendo as flores desidratadas, ela apura $14 \times 3,25 = 45,50$. Portanto, a florista ganha mais no processo sem a desidratação.

3. ***Divisores* -** Como 2, 3, 5 e 7 são primos, para que $2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d$ tenha 378 divisores, devemos ter:

   $$(a+1) \times (b+1) \times (c+1) \times (d+1) = 378.$$

   Decompondo 378 em fatores primos, encontramos $378 = 2 \times 3^3 \times 7$. Logo,

   $$(a+1) \times (b+1) \times (c+1) \times (d+1) = 2 \times 3^3 \times 7.$$

   Por outro lado, como N é mínimo então os expoentes estão ordenados do maior para o menor, isto é, $a \geq b \geq c \geq d$.

   Afirmamos que $d > 0$, pois se $d = 0$ então $a+1$, $b+1$ ou $c+1$ tem dois fatores maiores do que 1. Se $a + 1 = mn$ com $m \geq n > 1$ temos que

   $$2^a = 2^{mn-1} = 2^{m-1}2^{mn-m} = 2^{m-1}(2^m)^{n-1} \geq 2^{m-1}8^{n-1} > 2^{m-1}7^{n-1},$$

onde na penúltima desigualdade usamos o fato que $m \geq 3$. Assim, temos que $2^a 3^b 5^c 7^d > 2^{m-1} 3^b 5^c 7^{n-1}$, logo encontramos um número com a mesma quantidade de divisores, mas menor. A prova é igual no caso em que $b+1$ tem dois fatores ou $c+1$ tem dois fatores. Assim, $d \geq 1$ e temos unicamente as seguintes possibilidades

a	b	c	d	$(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) = 378$
20	2	2	1	$21 \times 3 \times 3 \times 2$
13	2	2	2	$14 \times 3 \times 3 \times 3$
8	6	2	1	$9 \times 7 \times 3 \times 2$
6	5	2	2	$7 \times 6 \times 3 \times 3$

Por último, como

$$\frac{2^{20} \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^1}{2^{13} \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2} = \frac{2^7}{7} > 1,$$

$$\frac{2^{13} \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{2^8 \cdot 3^6 \cdot 5^1 \cdot 7^1} = \frac{2^5 \cdot 7}{3^4} > 1$$

e

$$\frac{2^8 \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7^1}{2^6 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2} = \frac{2^2 \cdot 3}{7} > 1,$$

temos que o valor de N é $2^6 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2$. Portanto, $a = 6$, $b = 5$, $c = 2$ e $d = 2$.

4. ***O produto dos algarismos***

(a) Como $12 = 2 \times 6 = 4 \times 3 = 2 \times 2 \times 3$, devemos utilizar os algarismos $1, 2, 3, 4$ e 6 cujos produtos sejam 12. Assim temos:

- números com 2 algarismos: 26, 62, 34, 43
- números com 3 algarismos:
  - com os algarismos 1, 2 e 6: 126, 162, 216, 261, 612, 621

– com os algarismos 1, 3 e 4: 134, 143, 314, 341, 413, 431

– com os algarismos 2, 2 e 3: 223, 232, 322.

(b) Se $P(n) = 0$, então o produto de seus algarismos é igual a zero, logo pelo menos um dos algarismos do número n é zero. Temos 19 números com zero só nas unidades, 9 números com zero só nas dezenas e ainda o número 100, totalizando 29 números:

$$\underbrace{0\ ,\ 10\ ,\ 20\ ,\ \ldots\ ,\ 90\ ,\ 110, \ldots\ ,\ 190}_{\text{0 só nas unidades}}\ ,\ \underbrace{101,\quad 102,\quad \ldots,\quad 109}_{\text{0 só nas dezenas}}.$$

(c) Queremos encontrar os números menores do que 200, cujo produto de seus algarismos seja maior do que 37 e menor do que 45. Por exemplo, 58 é um desses números porque $5 \times 8 = 40$.

Em primeiro lugar, note que não existem números cujo produto de seus algarismos sejam 38, 39, 41, 43 e 44 porque esses números não podem ser escritos como produto de dois ou três algarismos. Restam, então: 40 e 42. Vejamos as possibilidades:

- números menores do que 200 cujo produto dos algarismos é 40: 58, 85, 158 e 185
- números menores do que 200 cujo produto dos algarismos é 42: 67, 76, 167 e 176

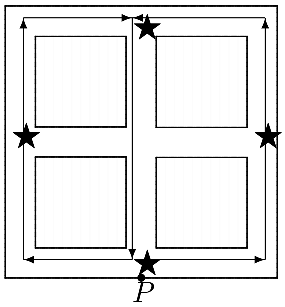
(d) O número é $249 = 2 \times 4 \times 9 = 72$.

5. ***Suco de laranja -*** Se Davi comprar 6 garrafas individualmente, ele vai gastar $6 \times 2,80 = 16,80$ reais, que é mais caro do que comprar uma caixa com seis. Portanto, ele deve comprar a maior quantidade possível de caixas. Para ter pelo menos 22 garrafas, ele pode comprar 4 caixas e gastará 60 reais, ou

comprar 3 caixas e 4 garrafas individualmente, caso em que gastará $3 \times 15 + 4 \times 2,80 = 56,20$ reais, que é o mínimo possível.

6. ***A casa da Rosa*** **-** Como o quarto é quadrado e tem $16m^2$ de área, então suas dimensões são $4\,m$ por $4\,m$. Da mesma forma, as dimensões do quintal são $2\,m$ por $2\,m$.
Agora, a sala tem $24\,m^2$ e uma das dimensões é a mesma que a dimensão do quarto, isto é $4\,m$, logo a outra dimensão da sala é $6\,m$. Assim, as dimensões totais da casa são $10\,m$ por $6\,m$ e a área total da casa é 60 metros quadrados. Logo, a área da cozinha é $60 - 16 - 24 - 4 = 16\,m^2$.

7. ***Passeio do Matias*** **-** Primeiro observamos que temos 12 quadras de 100 metros entre os 4 quarteirões. Além disso, entre os quatro quarteirões temos 4 esquinas nas quais chegam 3 quadras e que estão marcadas com ★ no desenho. Assim, no momento em que chegamos a uma das ditas esquinas temos que sair, logo usamos 2 das quadras em cada passada e, no momento que chegamos de novo, temos que parar.
Portanto, dentre as ditas 4 esquinas, em todo caminho que tracemos tem pelo menos duas esquinas ★ em que não usamos todas as quadras que chegam à esquina mencionada. Assim, o caminho de comprimento máximo usa no máximo 10 quadras. Na figura desenhamos um dos trajetos máximos.



8. ***O adesivo oficial* -** Como o quadrado pintado da cor azul pode estar em qualquer lugar, então temos 6 possíveis formas de escolher a posição desse quadrado. Entre os 5 quadrados restantes precisamos pintar dois de amarelo, o que podemos fazer de 10 formas, assim os três quadrados restantes são pintados de verde. Portanto, o prefeito tem $6 \times 10 = 60$ formas diferentes de escolher o adesivo.

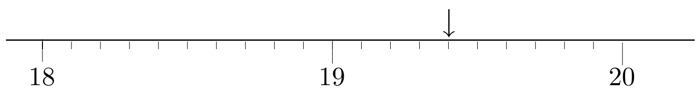
Lista 2

1. ***Adição de números*** **-** Qual é o algarismo a em

$$a000 + a998 + a999 = 22997\ ?$$

2. ***Cubo perfeito e divisibilidade*** **-** Quais os cubos perfeitos que dividem 9^4?

3. ***Localizando pontos*** **-** Qual é o ponto indicado no diagrama?

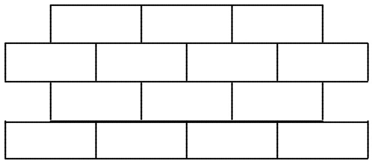


4. ***Calculando porcentagem*** **-** Num teste com 84 questões se você acerta 58/84 das questões, então qual é o seu percentual de acertos?

5. ***Comparando algarismos*** **-** Um número se chama *ascendente* se cada um de seus algarismos é maior do que o algarismo que está à sua esquerda. Por exemplo, 2568 é ascendente e 175 não. Quantos números ascendentes existem entre 400 e 600?

6. ***Muro colorido*** **-** O muro da figura é construído com 14 tijolos nas cores amarelo, azul e vermelho e tal que dois tijolos que se tocam são de cores diferentes. Os preços dos tijolos são dados na tabela. Qual o menor preço que se gastará na compra dos tijolos para construir esse muro?

tijolo	$R\$$
amarelo	6
azul	7
vermelho	8



7. ***Divisores e fatoração* -** Decompor 96 em dois fatores cuja soma dos quadrados seja 208.

8. ***Brincando com áreas* -** Luís desenhou um retângulo de $6cm$ por $10cm$ e quer dividi-lo em quatro partes. Cada parte deve ter de área, respectivamente, $8cm^2$, $12cm^2$, $16cm^2$, $24cm^2$. Desenhe como ele pode fazer essa divisão.

Soluções da Lista 2

1. ***Adição de números*** **-** Efetuando a adição

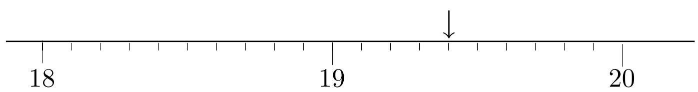
$$\begin{array}{r} \overset{1}{a}\,000 \\ a\,998 \\ +\,a\,999 \\ \hline \square\,997 \end{array}$$

   encontramos $\square 997 = 22997$, onde $\square = a + a + a + 1$.

   Logo, $22 = a + a + a + 1$. Assim, $a = 7$.

2. ***Cubo perfeito e divisibilidade*** **-** Um cubo perfeito é um número da forma a^3, onde a é um natural. Como $9^4 = (3^2)^4 = 3^8$, os cubos perfeitos que dividem 3^8 são: 3^3 e $(3^2)^3 = 3^6$.

3. ***Localizando pontos*** **-** O ponto indicado está 4 marcas à direita de 19. Entre 18 e 19 e entre 19 e 20 são feitas subdivisões em 10 partes iguais, logo cada marca equivale a $0,1$ nessa escala. Assim, o ponto indicado é $19,4$.



4. ***Calculando porcentagem*** **-** Temos 58 acertos em 84 questões, logo a razão de acertos é $\frac{58}{84}$. Dividindo 58 por 84 encontramos $0,69047$ com aproximação. Logo, o percentual é aproximadamente $69,047\%$.

5. ***Comparando algarismos -*** Os números que estamos procurando são maiores do que 400 e menores do que 600, logo o algarismo das centenas é 4 ou 5. Como são números ascendentes, o algarismo das dezenas tem que ser menor do que o algarismo das unidades. Vejamos como escolher os algarismos das dezenas e das centenas.

$$4\begin{cases}56\\57\\58\\59\end{cases};\quad 4\begin{cases}67\\68\\69\end{cases};\quad 4\begin{cases}78\\79\end{cases};\quad 4\left\{\,89\right.$$

$$5\begin{cases}67\\68\\69\end{cases};\quad 5\begin{cases}78\\79\end{cases};\quad 5\left\{\,89\right.$$

Logo, temos 10 números ascendentes com 4 como algarismo das centenas e 6 números ascendentes com 5 como algarismo das centenas; no total temos 16 números ascendentes.

6. ***Muro colorido -*** Observamos que no momento que fixamos a cor de dois tijolos vizinhos, então a cor de todos os tijolos fica fixa. Assim, os tijolos marcados por A, B ou C na figura têm que ter a mesma cor.

B	A	C	
A	C	B	A
B	A	C	
A	C	B	A

Como a maior quantidade de tijolos está marcada com A, 6 no total, então tais tijolos são amarelos. Por outro lado, temos a mesma quantidade de tijolos

B e C, 4 de cada tipo, logo temos que pintar 4 tijolos de azul e 4 de vermelho. Assim, o menor preço na compra dos tijolos é

$$6 \times 6 + 4 \times 7 + 4 \times 8 = 96 \text{ reais.}$$

7. ***Divisores e fatoração* -** Como o produto dos dois números é 96, eles são divisores de 96. Decompondo 96 em fatores primos, encontramos $96 = 2^5 \times 3$, logo seus divisores são:

$$1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 6\ ,\ 8\ ,\ 12\ ,\ 16\ ,\ 24\ ,\ 32\ ,\ 48\ ,\ 96.$$

Os divisores $96, 48, 32, 24$ e 16 não servem pois seus quadrados já são maiores do que 208. Sobram

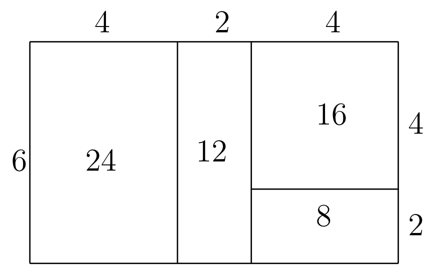
$$1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 6\ ,\ 8\ ,\ 12$$

cujos quadrados são:

$$1\ ,\ 4\ ,\ 9\ ,\ 16\ ,\ 36\ ,\ 64\ ,\ 144.$$

Agora vemos que a única possibilidade é $64 + 144 = 208$. Como $8 \times 12 = 96$, os números são 8 e 12.

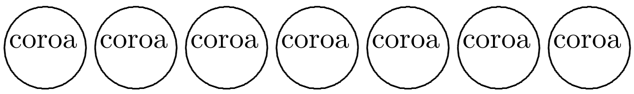
8. ***Brincando com áreas* -** Faremos a divisão com retângulos. Observamos que $24 = 6 \times 4$ e $12 = 6 \times 2$, logo ele pode fazer um primeiro corte a 4 cm no lado de 10cm e outro corte a 2 cm do corte anterior. Depois de tais cortes, ficamos uma cartolina de tamanho 6×4. Por último, como $16 = 4 \times 4$, basta fazer um último corte a 4 cm no lado de 6 cm. Os cortes estão ilustrados na seguinte figura.



Lista 3

1. ***Comparação de números -*** Escreva em ordem crescente os números: $\sqrt{121}$, $\sqrt[3]{729}$ e $\sqrt[4]{38416}$.

2. ***As moedas -*** Uma brincadeira começa com 7 moedas alinhadas em cima de uma mesa, todas com a face coroa virada para cima. Para ganhar a brincadeira é preciso virar algumas moedas de modo que no final duas moedas vizinhas estejam sempre com faces diferentes viradas para cima. A regra da brincadeira é: em cada jogada tem-se que virar duas moedas vizinhas. Quantas jogadas, no mínimo, são necessárias para ganhar a brincadeira?



3. ***O preço do frango -*** O preço do quilo de frango era $R\$1,00$ em janeiro de 2000 e começou a triplicar a cada 6 meses. Quando ele atingirá $R\$81,00$?

   (a) 1 ano (b) 2 anos (c) 2 1/2 anos (d) 13 anos (e) 13 1/2 anos

4. ***Excursões a Foz do Iguaçu -*** Em 2005, uma agência de turismo programou uma excursão para a Foz do Iguaçu, distribuindo as pessoas em ônibus de 27 lugares, tendo sido necessário formar um ônibus incompleto com 19 lugares. Em 2006, aumentou em 53 o número de participantes e continuou a utilizar ônibus de 27 de lugares. Quantos ônibus a mais foram necessários e quantas pessoas ficaram no ônibus incompleto em 2006?

5. ***As frações de Laura -*** Laura desenhou 5 círculos dentro dos quais ela quer colocar números. Ela coloca os círculos afim de formar uma fração e seu valor inteiro.

$$\frac{\bigcirc + \bigcirc + \bigcirc}{\bigcirc} = \bigcirc$$

De quantas maneiras Laura colocou os números 2, 3 , 5 , 6 e 11 dentro dos círculos para que a igualdade seja verdadeira?

6. ***Cálculo da unidade -*** Qual é o algarismo da unidade do produto

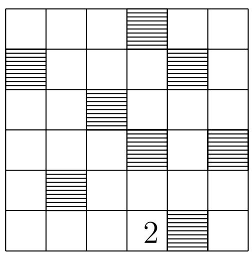
$$(5+1)(5^3+1)(5^6+1)(5^{12}+1)\,?$$

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 5 (e) 6

7. ***Números cruzados -*** Francisco escreveu 28 algarismos numa tabela 6×6 e pintou de preto algumas casas, como nas palavras cruzadas. Ele fez uma lista de todos os números que podem ser lidos horizontalmente ou verticalmente, excluindo os números de um só algarismo. Veja a lista:

28	45	51	57	72	88
175	289	632	746	752	805
885	5647	5873	7592	8764	

Preencha a tabela escrevendo os números dados. Um algarismo já foi colocado.



8. ***Ovos e maçãs* -** Num armazém, uma dúzia de ovos e 10 maçãs tinham o mesmo preço. Depois de uma semana, o preço dos ovos caiu 10% e o da maçã subiu 2%. Quanto se gastará a mais na compra de uma dúzia de ovos e 10 maçãs?

   (a) 2% (b) 4% (c) 10% (d) 12% (e) $12,2\%$

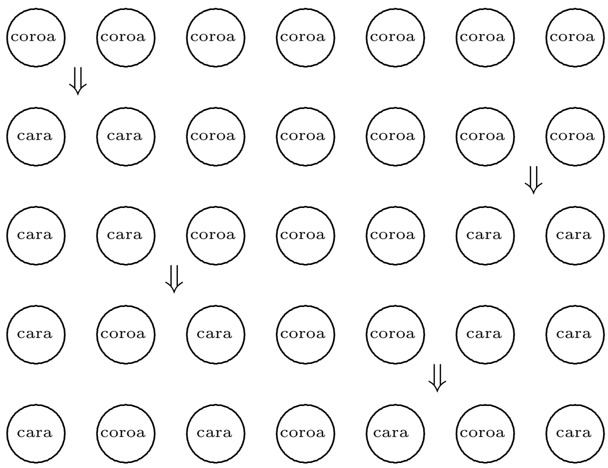
Soluções da Lista 3

1. ***Comparação de números -*** Fatorando os números e extraindo as raízes temos:

$$\begin{array}{lclcl}
\sqrt{121} & = & \sqrt{11^2} & = & 11 \\
\sqrt[3]{729} & = & \sqrt[3]{9^3} & = & 9 \\
\sqrt[4]{38416} & = & \sqrt[4]{2^4 \times 7^4} & = & 2 \times 7 = 14.
\end{array}$$

Logo, em ordem crescente temos: $\sqrt[3]{729}$, $\sqrt{121}$, $\sqrt[4]{38416}$.

2. ***As moedas -*** Se damos o valor de 1 às coroas e -1 às caras e somamos os resultados depois de cada jogada, inicialmente a brincadeira começa com 7 como soma e temos que chegar a cara e coroa alternadas, logo a brincadeira termina em 1 ou -1. Observamos que em cada passo da brincadeira temos as seguintes possibilidades: trocamos duas coroas por duas caras e o valor da soma diminui em 4; trocamos uma cara e uma coroa por uma coroa e uma cara e o valor da soma fica inalterado ou trocamos duas caras por duas coroas e o valor da soma aumenta em 4. Portanto, é impossível de 7 como soma inicial chegar a 1, mas é possível chegar a -1, isto é, 4 caras e 3 coroas. Como precisamos obter 4 caras não consecutivas, então precisamos de pelo menos 4 jogadas. As 4 jogadas se ilustram no seguinte desenho:



3. ***O preço do frango -*** Como $81 = 3^4$, então o valor do franco triplicou 4 vezes, o número de meses transcorridos foi $4 \times 6 = 24$ meses, isto é, 2 anos, ou seja, em janeiro de 2002 o frango atingirá o preço proposto. A opção correta é (b).

4. ***Excursões a Foz do Iguaçu -*** Temos um ônibus com $27 - 19 = 8$ lugares livres e ainda precisamos acomodar os $53 - 8 = 45$ participantes em ônibus de 27 lugares. É claro que um ônibus não é suficiente, logo precisamos de 2 ônibus e vamos ter $2 \times 27 - 45 = 9$ lugares livres no último ônibus. Ficaram 18 pessoas no ônibus incompleto.

5. ***As frações de Laura -*** Como a fração é igual a um número inteiro, o seu numerador tem que ser um múltiplo do seu denominador. Vamos testar todas as possibilidades e escolher as que satisfazem as condições do problema:

$$\frac{3+5+6}{2} = 7\,;\ \frac{3+11+6}{2} = 10\,;\ \frac{5+11+6}{2} = 11 \quad \longrightarrow \quad \text{não satisfazem}$$

$$\frac{2+5+11}{3} = 6 \quad \longrightarrow \quad \text{satisfaz}$$

$$\frac{3+6+11}{5} = 4 \quad \longrightarrow \quad \text{não satisfaz}$$

$$\frac{2+5+11}{6} = 3 \quad \longrightarrow \quad \text{satisfaz}$$

$$\frac{2+3+6}{11} = 1 \quad \longrightarrow \quad \text{não satisfaz.}$$

Assim temos duas respostas:

$$\frac{2 + 5 + 11}{3} = 6 \qquad\qquad \frac{2 + 5 + 11}{6} = 3$$

6. ***Cálculo da unidade -*** O algarismo da unidade de qualquer potência de 5 é 5, segue que o algarismo da unidade de cada fator do produto é $5+1=6$. Mas, $6\times 6=36$, ou seja, o produto de dois números terminados em 6 é também um número que termina em 6. Logo, o algarismo da unidade desse produto é 6. A opção correta é (e).

7. ***Números cruzados -***

7	5	2		8	8
	8	8	5		0
5	7		1	7	5
6	3	2		4	
4		8	7	6	4
7	5	9	2		5

8. ***Ovos e maçãs -*** Suponhamos, inicialmente, que uma dúzia de ovos custava $R\$\,1,00$. Assim, 10 maçãs também custavam $R\$\,1,00$. Como o preço dos ovos subiu 10%, o novo valor dos ovos é $R\$\,1,10$. O preço das maçãs diminuiu 2%, logo o novo preço das maçãs é $R\$\,0,98$.

Assim, antes gastava-se 2 reais na compra de 1 dúzia de ovos e 10 maçãs, agora gasta-se $1,10+0,98=2,08$. Daí temos que o aumento foi de $R\$\,0,08$, que corresponde ao percentual:

$$\frac{0,08}{2}=0,04=\frac{4}{100}=4\%.$$

A opção correta é (b).

Lista 4

1. ***Divisão de números decimais -*** Sabendo que $144 \times 177 = 25488$ podemos concluir que $254,88 \div 0,177$ é igual a

   (a) 1440 (b) 14,4 (c) 1,44 (d) 0,144 (e) 144

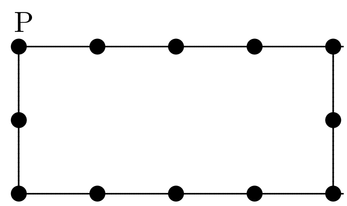
2. ***Cálculo de porcentagem -*** Num teste com 84 questões se você acerta $58/84$ das questões, então qual é o seu percentual de acertos?

3. ***Almoço dos amigos -*** Júlio e Denise almoçaram num restaurante que oferece três tipos de prato e três tipos de vitamina, cujos preços estão na tabela ao lado. Cada um escolheu um prato e uma vitamina. Júlio gastou 6 reais a mais do que Denise. Quanto Denise gastou?

	$R\$$
prato simples	7
prato com carne	11
prato com peixe	14
vitamina de leite	6
vitamina de frutas	7
vitamina especial	9

4. ***Adição de inteiros positivos -*** Encontre quatro números inteiros distintos e maiores do que 0 tais que somados de três em três dão $6, 7, 8$ e 9.

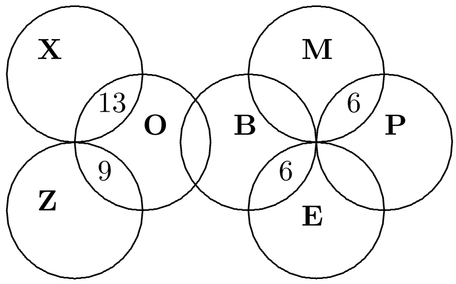
5. ***O passeio do Jorge -*** Jorge passeia por um caminho em forma de retângulo, onde estão dispostas doze árvores com $5\,m$ de distância entre duas consecutivas. Jorge brinca de tocar cada árvore durante seu passeio.



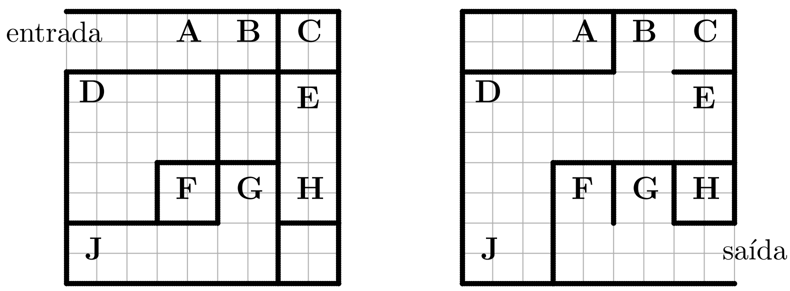
   Primeiro ele toca a árvore do canto, assinalada com P na figura, e percorre 32 metros num mesmo sentido; aí ele volta 18 metros e depois torna a andar para frente mais 22 metros. Em quantas árvores ele tocou?

6. ***A descoberta do algarismo* -** Os quadrados dos números naturais de 1 a 99 foram escritos um após o outro, formando o número 14916253649.... Qual é o algarismo que ocupa a 100ª posição? (As posições são contadas da esquerda para a direita: a 1ª posição é o 1, a 2ª é o 4, etc.)

7. ***OBMEP* -** Cada um dos 7 discos X, Z, O, B, M, E, P tem um peso diferente, de 1 g a 7 g. Nas interseções dos discos indicamos a soma dos pesos desses dois discos. Qual é a soma dos pesos dos cinco discos O, B, M, E, P ?



8. ***Prédio misterioso* -** As figuras mostram as plantas do 1º e 2º andares de um prédio que guarda segredos muito perigosos. Os 9 elevadores estão representados por letras e em cada letra podemos pegar o elevador ou continuar. Qual o caminho mais curto da entrada até a saída?



Soluções da Lista 4

1. ***Divisão de números decimais*** **-** Efetuando a divisão temos:

$$\frac{254,88}{0,177} = \frac{254880}{177} = \frac{144 \times 177 \times 10}{177} = 1440.$$

2. ***Cálculo de porcentagem*** **-** A divisão de 58 por 84 é: $58 \div 84 = 0,69047...$ Multiplicando por 100 temos que o percentual de acertos é $0,69047 \times 100 = 69,047\%$, que é aproximadamente 69%.

3. ***Almoço dos amigos*** **-** Os preços de um prato mais uma vitamina são:

$$\underbrace{13}_{7+6}, \underbrace{14}_{7+7}, \underbrace{16}_{7+9}, \underbrace{17}_{11+6}, \underbrace{18}_{11+7}, \underbrace{20}_{11+9}, \underbrace{20}_{14+6}, \underbrace{21}_{14+7}, \underbrace{23}_{14+9}$$

   Dentre esses, os que diferem de 6 são: 14 e 20 ou 17 e 23. Logo, temos duas soluções: Denise pode gastar $7+7=14$ e Júlio $14+6=11+9=20$ ou Denise gasta $11+6=17$ e Júlio $14+9=23$.

4. ***Adição de inteiros positivos*** **-**

   Solução 1 **-** Inicialmente observe que se a maior soma de três desses números é 9, então todos os números têm que ser menores do que 7, ou seja:

$$1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5\ ,\ 6\,.$$

   Por outro lado, se a menor soma é 6, então eles têm que ser menores do que 5, logo restam:

$$1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\,.$$

Verificamos que esses são os números:

$$1+2+3=6\ ,\ 1+2+4=7\ ,\ 1+3+4=8\ ,\ 2+3+4=9\,.$$

***Solução 2* -** Somando de três em três quatro números a, b, c e d temos os números $a+b+c$, $a+b+d$, $a+c+d$ e $b+c+d$. Logo,

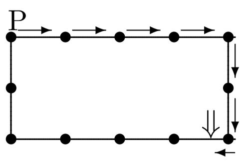
$$6+7+8+9=(a+b+c)+(a+b+d)+(a+c+d)+(b+c+d)=3(a+b+c+d).$$

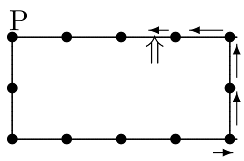
Donde, $a+b+c+d=\frac{30}{3}=10$. Portanto, os números procurados são

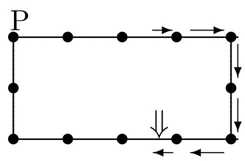
$$10-6=4 \quad ; \quad 10-7=3 \quad ; \quad 10-8=2 \quad ; \quad 10-9=1.$$

5. ***O passeio do Jorge* -** As figuras ilustram o percurso que Jorge fez:

- caminhando $32\,m$ no início, ele toca em 7 árvores e pára a $2\,m$ da última que tocou;
- voltando $18\,m$, ele toca em 4 árvores e pára a $1\,m$ da última que tocou;
- ao retornar os $22\,m$ ele toca em 5 árvores e pára a $1\,m$ da última que tocou.







Assim, ele tocou em $7+4+5=16$ árvores.

6. ***A descoberta do algarismo* -** Separando os números cujos quadrados têm 1, 2 e 3 algarismos temos:

1 algarismo:	1, 2, 3
2 algarismos:	4, 5, 6, 7, 8, 9
3 algarismos:	10, 11, 12, ..., 31

Até 31^2 a seqüência tem $3 + 12 + 66 = 81$ algarismos.

$$\underbrace{1^2\,,2^2\,,3^2}_{1\times 3 \text{ algs}}\,,\ \underbrace{4^2\,,\ldots,9^2}_{2\times 6=12 \text{ algs}},\ \underbrace{10^2\,,\ldots,31^2}_{3\times 22=66 \text{ algs}}$$

Assim, faltam $100 - 81 = 19$ algarismos para o $100^{\underline{o}}$. Como $19 = 4 \times 4 + 3$, teremos mais 4 números de 4 algarismos cada um, que são $32^2, 33^2, 34^2$ e 35^2, e mais os 3 algarismos (milhar, centena, dezena) do número: $36^2 = 1296$.

$$\underbrace{1^2\,,2^2\,,3^2}_{1\times 3 \text{ algs}}\,,\ \underbrace{4^2\,,\ldots,9^2}_{2\times 6=12 \text{ algs}}\,,\ \underbrace{10^2\,,\ldots,31^2}_{3\times 22=66 \text{ algs}},\ \underbrace{32^2\,,33^2,34^2,35^2}_{4\times 4=16 \text{ algs}}\,,\ 12\underbrace{\,9\,}_{100^{\underline{o}}\text{alg}}6$$

Logo, o número é 9.

7. ***OBMEP*** **-** Como

$$\text{peso de } X + \text{peso de } O = 13 \quad \text{e} \quad \text{peso de } Z + \text{peso de } O = 9,$$

segue que

$$\text{peso de } X = \text{peso de } Z\ + 4.$$

Logo, as opções para os pesos de Z e de X são:

$$1 \text{ e } 5 \quad , \quad 2 \text{ e } 6 \quad , \quad 3 \text{ e } 7\,.$$

Por outro lado, temos:

$$\text{peso de } M + \text{peso de } P = 6 \quad \text{e} \quad \text{peso de } B + \text{peso de } E = 6\,.$$

Logo, os pesos de M, P, B e E são todos menores do que 6, ou seja:

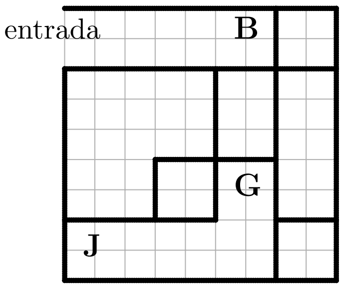
$$1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5\,.$$

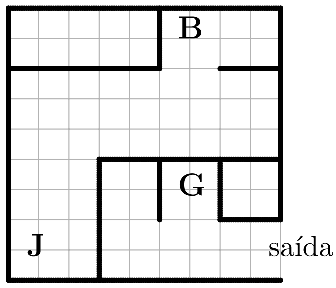
Além disso, nenhum deles pode ter peso $3\,g$.

Concluímos que os pesos de Z e de X são 3 e 7, o que nos dá o peso de O igual a 6. Assim, temos:

$$\text{peso de } O + \text{peso de } B + \text{peso de } E + \text{peso de } M + \text{peso de } P = 6 + 6 + 6 = 18.$$

8. ***Prédio misterioso* -** Primeiro observamos que os elevadores A, C, D, E, F e H conduzem a quartos fechados em algum dos dois andares e, portanto, não levam à saída. Assim, desconsiderando os elevadores mencionados, nosso desenho de elevadores úteis é o seguinte





Assim, o caminho adequado fica evidente: primeiro pegar o elevador B, depois o J e por último o G.

Lista 5

1. ***Soma de frações*** **-** Qual é o valor de $\frac{1}{10} - \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} - \frac{1}{10000}$?

2. ***Biblioteca*** **-** A biblioteca de uma escola comprou 140 novos livros, ficando com $\frac{27}{25}$ de livros. O número de livros antes da compra, é:

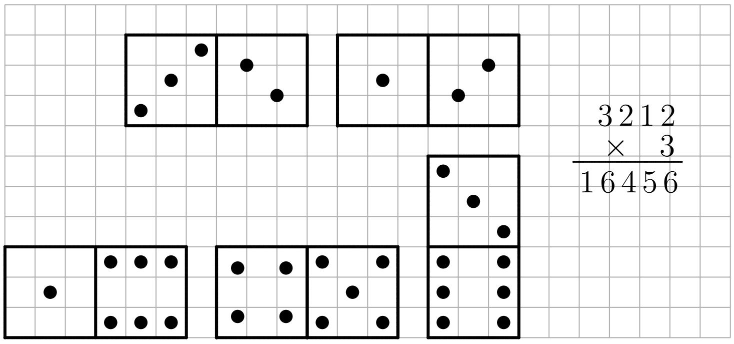
   (a) 1750 (b) 2500 (c) 2780 (d) 2140 (e) 1140

3. ***Comparação de frações*** **-** Quantas frações menores do que 1 existem, tais que o numerador e denominador são números naturais de um algarismo?

4. ***Divisão com resto*** **-** Quantos são os números que ao dividir 2007 deixam resto 5?

5. ***Panelas*** **-** Uma panela pesa $645\,g$ e outra $237\,g$. José divide $1\,kg$ de carne entre as duas panelas, de modo que as duas com seus conteúdos ficam com o mesmo peso. Quanto ele colocou de carne em cada panela?

6. ***Dominós*** **-** Juliana representou uma multiplicação com 5 dominós. Seu irmão Bruno trocou dois dominós de posição e agora a multiplicação ficou errada. Troque a posição de dois dominós para que a multiplicação fique correta novamente.



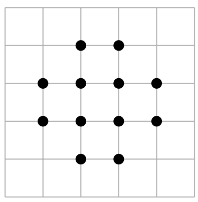
7. ***Código secreto* -** Antônio tem que descobrir um código de 3 algarismos diferentes $A\,B\,C$. Ele sabe que B é maior que A, que A é menor do que C e ainda:

$$\boxed{B\,|\,B} + \boxed{A\,|\,A} + \boxed{C\,|\,C} = \boxed{2\,|\,4\,|\,2}$$

$$\boxed{B} \times \boxed{A} \times \boxed{C} = \boxed{3\,|\,6\,|\,0}$$

Qual é o código que Antônio procura?

8. ***Os doze pontos* -** Doze pontos estão marcados numa folha de papel quadriculada, conforme mostra a figura.



Qual o número máximo de quadrados que podem ser formados unindo quatro desses pontos?

Soluções da Lista 5

1. ***Soma de frações -***

   Solução 1: Transformando as frações em números decimais temos:

$$\frac{1}{10}-\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}-\frac{1}{10000}=0,1-0,01+0,001-0,00001=0,0909=\frac{909}{10000}.$$

   Solução 2: Efetuando temos:

$$\frac{1}{10}-\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}-\frac{1}{10000}=\frac{1000-100+10-1}{10000}=\frac{909}{10000}.$$

2. ***Biblioteca -*** Ao comprar 140 livros a biblioteca ficou com $\frac{27}{25}$ do número de livros, logo 140 corresponde a $\frac{2}{25}$ dos livros da biblioteca. Logo, temos:

$$\begin{array}{lcl} \frac{2}{25} & \longrightarrow & 140 \\ \frac{1}{25} & \longrightarrow & 140 \div 2 = 70 \\ \frac{25}{25} & \longrightarrow & 70 \times 25 = 1750. \end{array}$$

   A opção correta é (a).

3. ***Comparação de frações -*** Para que uma fração seja menor do que 1, o numerador tem que ser menor do que o denominador. As frações são:

   - com denominador 2: $\frac{1}{2}$
   - com denominador 3: $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$
   - com denominador 4: $\frac{1}{4}$, $\underbrace{\frac{2}{4}}_{1/2}$ e $\frac{3}{4}$

- com denominador 5: $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$
- com denominador 6: $\frac{1}{6}$, $\underbrace{\frac{2}{6}}_{1/3}$, $\underbrace{\frac{3}{6}}_{1/2}$, $\underbrace{\frac{4}{6}}_{2/3}$, $\frac{5}{6}$
- com denominador 7: $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{7}$
- com denominador 8: $\frac{1}{8}$, $\underbrace{\frac{2}{8}}_{1/4}$, $\frac{3}{8}$, $\underbrace{\frac{4}{8}}_{1/2}$, $\frac{5}{8}$, $\underbrace{\frac{6}{8}}_{3/4}$, $\frac{7}{8}$
- com denominador 9: $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$, $\underbrace{\frac{3}{9}}_{1/3}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{9}$, $\underbrace{\frac{6}{9}}_{2/3}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{8}{9}$

Temos então 27 frações.

4. ***Divisão com resto* -** Se um número ao dividir 2007 deixa resto 5, então esse número é um divisor de $2007 - 5 = 2002$. Logo, temos que calcular os divisores de 2002:

$$\begin{array}{r|l|l}
 & & 1 \\
2002 & 2 & 2 \\
1001 & 7 & 7 ,\ 14 \\
143 & 11 & 11 ,\ 22 ,\ 77 ,\ 154 \\
13 & 13 & 13 ,\ 26 ,\ 91 ,\ 182 ,\ 143 ,\ 286 ,\ 1001 ,\ 2002 \\
1 & &
\end{array}$$

Logo, os números que ao dividirem 2007 deixam resto 5 são:

$$1, 2, 7, 11, 13, 14, 22, 26, 77, 91, 143, 154, 182, 286, 1001, 2002$$

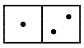
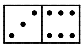
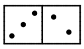
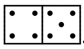
5. ***Panelas* -** Convertendo quilo para gramas temos que $1\,kg = 1\,000\,g$. As duas panelas mais a carne pesam juntas

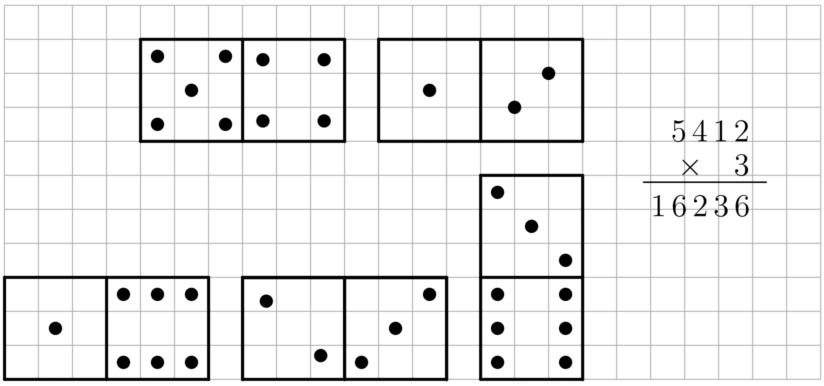
$$645 + 237 + 1\,000 = 1\,882\,g.$$

Logo, cada panela mais o seu conteúdo de carne deve pesar $1882 \div 2 = 941\,g$. Logo, José colocou em cada panela, respectivamente,

$$941 - 645 = 296\,g \text{ e } 941 - 237 = 704\,g$$

.

6. ***Dominós*** **-** Dado que $2 \times 3 = 6$, suporemos por enquanto que os dominós  e  estão na posição certa. Caso isso seja verdade, dado que $1 \times 3 = 3$ temos que o algarismo na dezena do resultado é três, logo temos que trocar o dominó  pelo dominó , de tal forma que o 3 fique na dezena. Dado que temos um 2 na centena do resultado, então na centena do primeiro número tem que ter um 4. Assim, o produto certo fica da forma



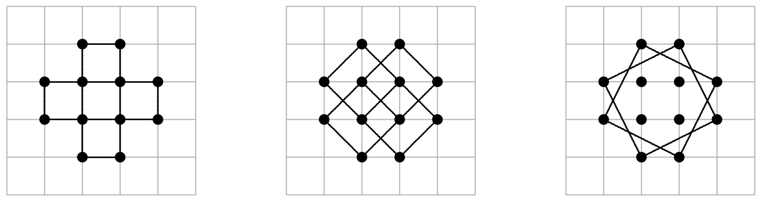
7. ***Código secreto*** **-** A única maneira de obter 360 como produto de três números de um algarismos cada um é

$$360 = 9 \times 8 \times 5\,.$$

Logo, a soma $AA + BB + CC$ é igual a $55 + 88 + 99$. Como A é menor do que B e do que C , temos que $A = 5$. Logo, temos duas possibilidades para o código: 589 ou 598.

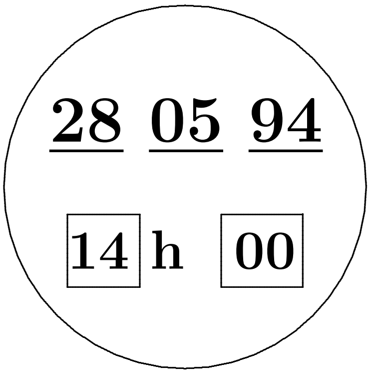
8. ***Os doze pontos -*** No total, temos 11 possíveis quadrados como mostrado a seguir.

5 quadrados 4 quadrados 2 quadrados



Lista 6

1. ***Relógio* -** O grande relógio de parede da escola marca a data (dia, mês e ano) e as horas (horas e minutos) como na figura. Que dia, mês e ano esses mesmos 10 algarismos da figura voltarão a aparecer juntos no relógio pela primeira vez?



2. ***Lápis* -** Em 13 caixas foram embalados 74 lápis. Se a capacidade máxima de cada caixa é de 6 lápis, qual é o número mínimo de lápis que pode haver em uma caixa?

   (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 6

3. ***Contagem* -** Se o algarismo 1 aparece 171 vezes na numeração das páginas de um livro, quantas páginas tem o livro?

4. ***Viagem a Recife* -** Em meu vôo para Recife, quando fui receber a medalha de ouro que conquistei na OBMEP, as seguintes informações apareceram na tela da cabine de passageiros:

Velocidade média: $864\,km/h$
Distância do local de partida: $1\,222\,km$
Tempo de chegada a Recife: $1\,h\,20\,min$

Se o avião manteve a mesma velocidade, então qual é, aproximadamente, a distância de Recife à cidade onde tomei esse vôo?

(a) $2\,300\,km$ (b) $2\,400\,km$ (c) $2\,500\,km$ (d) $2\,600\,km$ (e) $2\,700\,km$

5. ***Praça* -** Maria e João dão uma volta completa na praça juntos, contando as casas que ficam em volta da praça. Eles começaram a contar as casas em pontos diferentes. A quinta casa da Maria é a décima segunda do João e a quinta casa do João é a trigésima da Maria. Quantas casas tem em volta da praça?

6. ***Seqüência de figuras* -** As figuras $\triangle$, $\clubsuit$, $\diamondsuit$, $\spadesuit$, $\heartsuit$, $\square$ são repetidas na seqüência

$$\triangle, \clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \heartsuit, \square, \triangle, \clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \heartsuit, \square, \ldots$$

   (a) Que figura aparecerá na $1000^{\underline{a}}$ posição da seqüência?

   (b) Em qual posição aparece o milésimo $\diamondsuit$?

7. ***A brincadeira do quadrado* -** Um quadrado de $1\,m$ de lado foi cortado, com cortes paralelos aos seus lados, em quadradinhos de $1\,mm$ de lado. Colocando-se lado a lado os quadradinhos, sem superposição, formou-se um retângulo de $1\,mm$ de largura. Qual o comprimento desse retângulo?

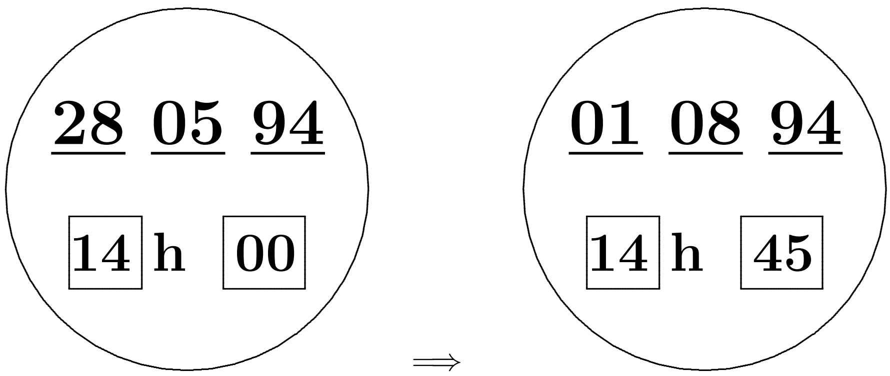
8. ***O código da Arca do Tesouro -*** Simão precisa descobrir um número que é o código da Arca do Tesouro que está escondido na tabela.

5	9	4	9	4	1
6	3	7	3	4	8
8	2	4	2	5	5
7	4	5	7	5	2
2	7	6	1	2	8
5	2	3	6	7	1

Para descobrir o código ele tem que formar grupos de 3 algarismos que estão em casas sucessivas, na horizontal ou na vertical, cuja soma é 14. Retirados esses grupos, o código é a soma dos números que não aparecem nesses grupos. Qual é esse código?

Soluções da Lista 6

1. ***Relógio* -** Vamos tentar uma data e um horário no mesmo ano de 94. Já que com os números dados não podemos alterar o dia nem para 29 nem para 30 sem alterar o ano, então a data procurada não está no mês 05. O seguinte mês possível é o 08. Como precisamos da data mais próxima possível, observemos que podemos formar o dia 01 sobrando os números 0, 2, 4 e 5 para formar a hora. A menor hora possível que podemos formar com esses algarismos é 02 : 45, logo a data procurada é 1 de agosto de 1994 às 2 horas e 45 minutos.



2. ***Lápis* -** Vamos ver em quantas caixas podemos colocar o número máximo de lápis, que é 6 por caixa. Nas 13 caixas não é possível, pois $13 \times 6 = 78$, que é maior do que o número de lápis 74. Em 12 caixas teríamos: $12 \times 6 = 72$. Assim, sobraria uma caixa com $74 - 72 = 2$ lápis. Logo, a opção correta é (b).

3. ***Contagem* -** A cada 10 páginas aparece 1 nas unidades e a cada 100 páginas aparece 10 vezes o número 1 nas dezenas.

   Contando o número de páginas que contém o algarismo 1 em cada faixa abaixo temos:

- 20 páginas entre 1-99:

  $1, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91$: 10 (1 na unidade)

  $10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19$: 10 (1 na dezena)

- 120 páginas entre 100 - 199:

  $101, 111, 121, 131, 141, 151, 161, 171, 181, 191$: 10 (1 na unidade)

  $110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119$: 10 (1 na dezena)

  $100, 101, 102, \ldots, 199$: 100 (1 na centena)

- 20 páginas entre 200-299:

  $201, 211, 221, 231, 241, 251, 261, 271, 281, 291$: 10 (1 na unidade)

  $210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219$: 10 (1 na dezena)

Até a página 299 temos $20 + 120 + 20$ vezes que aparece o número 1, faltando assim apenas $171 - 160 = 11$ uns, que seriam os 2 primeiros que aparecem na unidade de 301, 311 e os 9 primeiros que aparecem nas dezenas de 310, 311 , 312 , 313 , 314 , 315 , 316 , 317 , 318. Logo, o livro tem 318 páginas.

4. ***Viagem a Recife* -** No momento em que a informação foi dada, o tempo que faltava de vôo era de $1h\,20\,min$, ou $4/3\,h$. Logo, nesse momento, a distância a Recife era de $864 \times \frac{4}{3} = 1\,152\,km$. Desde que estávamos a $1\,222\,km$ da cidade de partida, a distância entre essa cidade e Recife é de $1\,152 + 1\,222 = 2\,374\,km$. Dentre as opções, a mais próxima é $2\,400\,km$, ou seja, a opção (b).

5. ***Praça* -** Como a $5^{\underline{a}}$ casa da Maria é a $12^{\underline{a}}$ casa do João, a diferença entre as contagens é de 7 casas. Assim, a $1^{\underline{a}}$ casa da Maria é a $8^{\underline{a}}$ casa do João e a $5^{\underline{a}}$ casa do João corresponde a duas casas antes da casa que a Maria começou a contar. Mas, como a $5^{\underline{a}}$ casa do João é a $30^{\underline{a}}$ da Maria, então a praça tem 32

casas: as 30 casas que Maria já contou mais as 2 casas que faltam para Maria chegar ao ponto onde começou a contar.

6. ***Seqüência de figuras -*** As figuras se repetem de 6 em 6. Dividindo 1000 por 6 temos: $1000 = 6 \times 166 + 4$.

$$\underbrace{\triangle, \clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \heartsuit, \square}_{1^{\underline{o}} \text{ grupo de } 6}, \ \ldots \ , \underbrace{\triangle, \clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \heartsuit, \overbrace{\square}^{996^{\underline{o}}}}_{166^{\underline{o}} \text{ grupo de } 6}, \ \triangle, \clubsuit, \diamondsuit, \overbrace{\spadesuit}^{1000^{\underline{o}}}, \heartsuit, \square, \ldots$$

(a) A figura que fica em $1000^{\underline{o}}$ lugar é $\spadesuit$.

(b) O primeiro $\diamondsuit$ está na $3^{\underline{a}}$ posição, o segundo na posição de número $3+6$, o terceiro em $3+6+6$, e assim por adiante, como indicado a seguir:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{1}^{\underline{o}} & \longrightarrow & 3 + \mathbf{0} \times 6 \\
\mathbf{2}^{\underline{o}} & \longrightarrow & 3 + \mathbf{1} \times 6 \\
\mathbf{3}^{\underline{o}} & \longrightarrow & 3 + \mathbf{2} \times 6 \\
\mathbf{4}^{\underline{o}} & \longrightarrow & 3 + \mathbf{3} \times 6 \\
\vdots & & \\
\mathbf{1000}^{\underline{o}} & \longrightarrow & 3 + \mathbf{999} \times 6
\end{array}$$

Logo, o $1000^{\underline{o}}\,\diamondsuit$ aparece na posição: $3 + 999 \times 6 = 5997$.

7. ***A brincadeira com o quadrado -***

Solução 1 - Convertendo metros em milímetros temos: $1\,m = 1000\,mm$. Assim, o quadrado ficou dividido em $1000 \times 1000 = 10^6$ quadradinhos de lado $1\,mm$ cada um. Colocando-se lado a lado os 10^6 quadradinhos, teremos um retângulo de comprimento

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{10^6 \text{ parcelas}} = 10^6 \times 1 = 10^6\,mm$$

.

Solução 2 - O quadrado tem área igual $1\,m^2 = 10^6\,mm^2$. A área Δ do retângulo é a mesma do quadrado. Como a largura do retângulo é $\ell = 1\,mm$ temos que o comprimento c em milímitros é

$$c = \frac{\Delta}{\ell} = \frac{10^6}{1} = 10^6\,mm.$$

8. ***O código da Arca do Tesouro* - ** Nas seguintes duas tabelas mostramos unicamente os números cuja soma é 14, horizontalmente e verticalmente, respectivamente.

			9	4	1
		7	3	4	
8	2	4			
			7	5	2
	7	6	1		
			6	7	1

	9				1
	3			4	8
	2			5	5
7		5	7	5	
2		6	1	2	
5		3	6	7	

Assim, quando eliminamos esses números da tabela inicial, os números que sobrevivem são:

5		4			
6					
	4				
					8
	2				

Portanto, a soma dos números que ficam é $5 + 4 + 6 + 4 + 8 + 2 = 29$.

Lista 7

1. ***Operações com decimais* -** Efetue $\dfrac{(0,2)^3+1}{0,2+1}$

2. ***Fatores inteiros* -** Decompor 96 em dois fatores inteiros cuja soma dos quadrados seja 208.

3. ***Divisibilidade* -** No número $6a78b$, a é o algarismo da unidade de milhar e b é o algarismo da unidade. Se $6a78b$ é divisível por 45, então o valor de $a+b$ é:

   (a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 8 (e) 9

4. ***Número simples* -** Um número inteiro positivo é denominado *simples* se ele tem apenas os algarismos 1 ou 2 (ou ambos). Quantos números *simples* existem inferiores a um milhão?

5. ***O retângulo do Luís* -** Luís desenhou um retângulo de $6\,cm$ por $10\,cm$, e quer dividi-lo em quatro partes. Cada parte tem área, respectivamente, $8\,cm^2$, $12\,cm^2$, $16\,cm^2$, $24\,cm^2$. Desenhe como ele pode fazer essa divisão.

6. ***Venda de TV* -** O gerente de uma loja foi verificar qual tinha sido o preço de venda em 2006 de uma televisão da marca VejoTudo. Encontrou uma fatura meio apagada, onde se lia: "lote de 72 TV's da VejoTudo vendido por $R\$\ldots 679\ldots$ reais", onde os algarismos da unidade e da dezena de milhar estavam ilegíveis. Qual foi o preço de venda em 2006 de cada uma dessas televisões?

7. ***Chocolate* -** Henrique comprou barras de chocolate por $R\$1,35$ cada uma. Ele pagou com uma nota de $R\,\$10,00$ reais e recebeu de troco menos do que $R\,\$1,00$. Quantas barras ele comprou?

Soluções da Lista 7

1. ***Operações com decimais* -** Temos:

$$\frac{(0,2)^3+1}{0,2+1} = \frac{0,008+1}{1,2} = \frac{1,008}{1,2} = 0,84$$

2. ***Fatores inteiros* -** No Exercício 7 da Lista 2, encontramos os fatores positivos 8 e 12. As duas possibilidades são: 8 e 12 ou -8 e -12.

3. ***Divisibilidade* -** O número é divisível por 5 e 9.

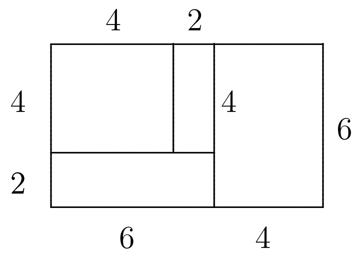
   Todo número divisível por 5 termina em 0 ou 5. Assim, $b = 0$ ou $b = 5$.

   Todo número divisível por 9 tem como a soma dos seus algarismos um número múltiplo de 9.

   Logo, temos que $6 + a + 7 + 8 + 0 = 21 + a$ ou $6 + a + 7 + 8 + 5 = 26 + a$ são múltiplos de 9. Donde, $a = 6$ ou $a = 1$, respectivamente. Daí temos: $a + b = 6 + 0 = 6$ ou $a + b = 1 + 5 = 6$.

4. ***Número simples* -** Se o número é menor do que um milhão, então ele tem 6 algarismos. Para cada posição deste número temos duas possibilidades: 1 ou 2. Como são 6 posições temos $2^6 = 64$ números simples.

5. ***O retângulo do Luís* -** Como $24 = 4 \times 6$, então ele construiu o primeiro retângulo, tirando $4\,cm$ do lado de $10\,cm$, sobrando um quadrado de lado $6\,cm$. Sendo $16 = 4 \times 4$, ele construiu um quadrado de lado $4\,cm$ sobrando dois retângulos de áreas $(6-4) \times 4 = 8\,cm^2$ e $(6-4) \times 6 = 12\,cm^2$, como, por exemplo, a divisão mostrada na figura ao lado.



6. ***Venda de TV*** **-** Sejam a o algarismo da dezena de milhar e b o da unidade. Como o número é divisível por $72 = 8 \times 9$ temos que $79b$ é um número par divisível por 8. Testando os valores de $b = 0$, 2, 4, 6 e 8, vemos que $b = 2$. Um número é divisível por 9 se a soma dos seus algarismos é um múltiplo de 9. Então, $a + 6 + 7 + 9 + 2 = a + 24$ é um múltiplo de 9. Logo, $a = 3$. Assim, cada TV custou: $36792 \div 72 = 511$ reais.

7. ***Chocolate*** **-** Como $8 \times 1,35 = 10,8$ é maior do que 10, então ele comprou 7 barras de chocolate e recebeu de troco: $10 - 7 \times 1,35 = 0,55$ reais ou 55 centavos.

Lista 8

1. ***O quadradinho*** **-** Qual o valor de $\square$ em $\dfrac{6\,400\,000}{400} = 1,6 \times \square$?

2. ***Dois números*** **-** O produto de dois números de dois algarismos cada um é 1728. Se e o máximo divisor comum (mdc) deles é 12, quais são esses números?

3. ***As idades dos irmãos*** **-** No dia de seu aniversário de 7 anos, 13 de março de 2007, uma 3^a-feira, Carlos disse a seu irmão: "A contar de hoje, faltam 2000 dias para você completar 15 anos". Em que dia da semana vai cair o aniversário do irmão de Carlos?. Quantos anos terá Carlos nesse dia?

4. ***A mistura de concreto*** **-** Uma certa mistura de concreto é feita de cimento, areia e terra na razão 1 : 3 : 5 por quilo. Quantos quilos dessa mistura pode ser feita com 5 quilos de cimento?

   (a) $13\frac{1}{3}$ (b) 15 (c) 25 (d) 40 (e) 45

5. ***Ponto na escala*** **-** A que número corresponde o ponto P na escala abaixo?

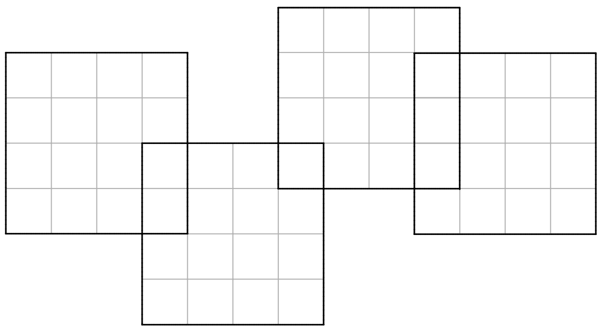
6. ***O pomar do Francisco*** **-** O pomar do Francisco tem macieiras, pereiras, laranjeiras, limoeiros e tangerineiras, dispostas em cinco filas paralelas, cada uma com uma única variedade de árvores, da seguinte maneira:

- as laranjeiras estão do lado dos limoeiros;
- as pereiras não estão do lado das laranjeiras nem dos limoeiros;
- as macieiras estão do lado das pereiras, mas não dos limoeiros, nem das laranjeiras.

Em que fila estão as tangerineiras?

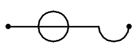
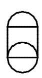
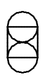
(a) $1^{\underline{a}}$ (b) $2^{\underline{a}}$ (c) $3^{\underline{a}}$ (d) $4^{\underline{a}}$ (e) $5^{\underline{a}}$

7. ***Quatro quadrados -*** Quatro quadrados iguais, com $3\,cm^2$ de área cada um, estão superpostos formando a figura abaixo. Qual é a área dessa figura?

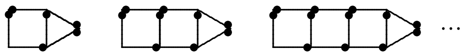


8. ***O fio de arame -*** Com um fio de arame Ernesto formou a figura abaixo.

Qual das figuras abaixo ele pode formar com o mesmo fio de arame, cortando ou não o fio?

(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

9. Quantos fósforos são necessários para formar o oitavo termo da seqüência, cujos três primeiros termos são mostrados abaixo?



(a) 21 (b) 24 (c) 27 (d) 30 (e) 34

Soluções da Lista 8

1. ***O quadradinho*** **-** Por simplificação $\dfrac{6\,400\,000}{400} = 16\,000$, logo:

$$\frac{6\,400\,000}{400} = 1,6 \times \square \quad \Longrightarrow \quad 16\,000 = 1,6 \times \square.$$

Segue que $\square = 10000$.

2. ***Dois números*** **-** Como 12 é o maior divisor comum dos dois números, ambos são múltiplos de 12, logo estão dentre os números

$$12\ ,\ 24\ ,\ 36\ ,\ 48\ ,\ 60\ ,\ 72\ ,\ 84\ ,\ 96\ ,\ 108\ ,\ 120\ ,\ 132\ ,\ 144\ ,\ldots$$

Da lista acima, temos três únicas possibilidades:

$$\begin{aligned} 12 \times 144 = 1728 \quad &\text{e} \quad mdc\,(12\ ,\ 144) = 12 \\ 24 \times 72 = 1728 \quad &\text{e} \quad mdc\,(24\ ,\ 72) = 24 \\ 36 \times 48 = 1728 \quad &\text{e} \quad mdc\,(36\ ,\ 48) = 12 \end{aligned}$$

Logo, temos duas soluções: 12 e 144, ou 36 e 48.

$12 = 2^2 \times 3$, $144 = 2^4 \times 3^2$

$mdc(12\,,144) = 2^2 \times 3$

72 é múltiplo de 24,

$\Rightarrow mdc(24\,,72) = 24$

$36 = 2^2 \times 3^2$ e $48 = 2^4 \times 3$,

$\Rightarrow mdc(36\,,48) = 2^2 \times 3$

3. ***As idades dos irmãos*** **-** Dividindo 2000 por 7 obtemos $2000 = 7 \times 285 + 5$. Logo, 2000 dias equivalem a 285 semanas mais 5 dias. Como o dia 13 de março de 2007 caiu em uma terça-feira, contando os 5 dias restantes, temos que o aniversário do seu irmão cairá em um domingo.

Agora, dividindo 2000 por 365 obtemos $2000 = 365 \times 5 + 175$. Logo, 2000 é, aproximadamente, igual a cinco anos e meio, portanto Carlos terá 12 anos de idade.

4. ***A mistura de concreto* -** De acordo com os dados do problema temos :

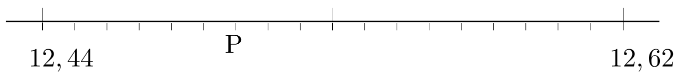
$$\begin{array}{ccccc} \text{cimento} & & \text{areia} & & \text{terra} \\ 1\,kg & \longleftrightarrow & 3\,kg & \longleftrightarrow & 5\,kg \end{array}$$

Logo, com $5\,kg$ de cimento temos:

$$\begin{array}{ccccc} \text{cimento} & & \text{areia} & & \text{terra} \\ 1\,kg \times 5 & \longleftrightarrow & 3\,kg \times 5 & \longleftrightarrow & 5\,kg \times 5 \end{array}$$

Assim, com 5 quilos de cimento essa mistura tem $5 + 15 + 25 = 45\,kg$.

5. ***Ponto na escala* -** A distância entre os pontos inicial e final é de: $12,62 - 12,44 = 0,18$. Como estão marcados 18 intervalos, o comprimento de cada um deles é de $0,18 \div 18 = 0,01$.



O número P está na $6^{\underline{a}}$ posição à direita de $12,44$. Assim, o ponto P vale:

$$12,44 + 0,01 \times 6 = 12,50.$$

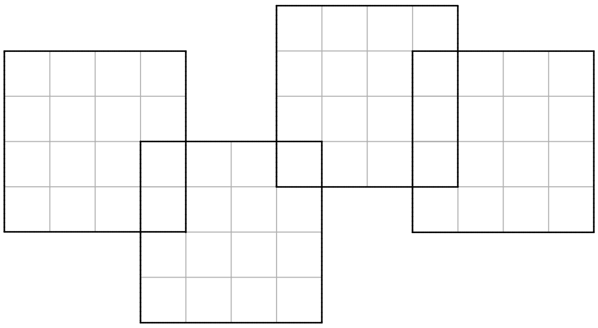
6. ***O pomar de Francisco* -** Podemos observar que temos os dois pares de árvores:

- laranjeiras e limoeiros,
- macieiras e pereiras,

que não são vizinhos. Como $5 = 2 + 1 + 2$, temos que as tangerineiras estão na $3^{\underline{a}}$ fila.

7. ***Quatro quadrados -*** Se a área de cada quadrado é $3\,cm^2$ e cada um deles está dividido em 16 quadradinhos, então a área de cada quadradinho é $\frac{3}{16}\,cm^2$. Como os 4 quadrados se superpõem em 6 quadradinhos, temos que a área da figura é:

$$4 \times 3 - 6 \times \frac{3}{16} = 12 - \frac{9}{8} = 10,875\,cm^2.$$



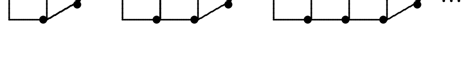
8. ***O fio de arame -*** A figura é composta de 3 semicírculos, o que exclui as opções (b), (c) e (e), e 4 segmentos de reta. A opção (a) só tem 3 segmentos, logo a opção correta é (d).

Observação: Esse exercício usa uma certa "informalidade", pois para decidirmos entre as opções (a) e (d), estamos admitindo que cada segmento de reta na figura tem o comprimento do diâmetro dos círculos.

9. Observe que o número de fósforos da seqüência é formado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} 1^{\underline{o}}\text{termo} &= 3+3 = \mathbf{2} \times 3 \\ 2^{\underline{o}}\text{termo} &= 3+3+3 = \mathbf{3} \times 3 \\ 3^{\underline{o}}\text{termo} &= 3+3+3+3 = \mathbf{4} \times 3 \end{aligned}$$

Logo, o $8^{\underline{o}}$ termo da seqüência é: $(8+1) \times 3 = 27$.



Nível 2

Lista 1

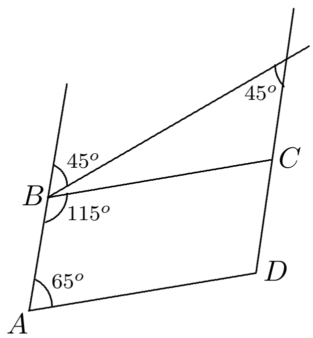
1. ***Potências de 10 -*** O valor de $\dfrac{0,00001 \times (0,01)^2 \times 1000}{0,001}$ é:

   (a) 10^{-1} (b) 10^{-2} (c) 10^{-3} (d) 10^{-4} (e) 1

2. ***Diferença de quadrados -*** Se $(x+y)^2-(x-y)^2=20$, então xy é igual a:

   (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 5 (e) 10

3. ***Um quadrilátero -*** O quadrilátero $ABCD$ da figura é um paralelogramo?



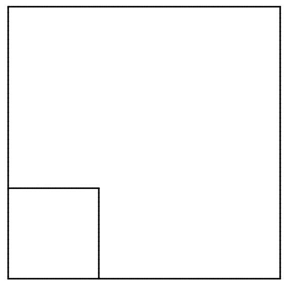
4. ***Sexta-feira 13 -*** Qual o número máximo de sextas-feiras 13 que podem ocorrer num ano não bissexto? Neste caso, qual é o 10º dia do ano?

5. ***Triângulos com lados inteiros -*** Quantos triângulos existem cujos lados são números inteiros e o perímetro é 12?

   (a) 1 (b) 3 (c) 5 (d) 7 (e) 9

6. ***Festa de aniversário -*** Para comemorar seu aniversário, Ana vai preparar tortas de pera e tortas de maçã. No mercado, uma maçã pesa $300g$ e uma pera $200g$. A sacola de Ana aguenta um peso máximo de $7k$. Qual é o numero máximo de frutas que ela pode comprar para poder fazer tortas das duas frutas?

7. ***Os dois quadrados -*** As medidas em centímetros dos lados de cada um dos dois quadrados são números inteiros. Se o menor quadrado tivesse $2001\,cm^2$ a mais de área, os dois quadrados seriam iguais. Quanto pode medir o lado do maior quadrado?



8. ***A multiplicação -*** Júlio faz multiplicações usando apenas os quadrados dos números. Ele tem que calcular o produto 85×135. Para isso, ele desenha um retângulo de $85\,mm$ por $135\,mm$ e traça nesse retângulo o maior quadrado possível; faz o mesmo no quadrado restante e assim sucessivamente. Dessa maneira ele obtém oito quadrados. Desenhe a figura feita por Júlio e escreva 85×135 como a soma de oito quadrados: $85 \times 135 = 85^2 + \ldots$

Soluções da Lista 1

1. ***Potências de 10 -*** Temos:

$$\frac{0,00001\times(0,01)^2\times 1000}{0,001} = \frac{10^{-5}\times(10^{-2})^2\times 10^3}{10^{-3}} = \frac{10^{-5}\times 10^{-4}\times 10^3}{10^{-3}} =$$

$$= \frac{10^{-5+(-4)+3}}{10^{-3}} = \frac{10^{-6}}{10^{-3}} = 10^{-6-(-3)} = 10^{-3}.$$

A opção correta é (c).

2. ***Diferença de quadrados -*** Como $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$ e $(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2$, temos:

$$(x+y)^2-(x-y)^2 = x^2+2xy+y^2-x^2+2xy-y^2 = 4xy = 20,$$

segue-se que $xy = 5$. A opção correta é (d).

3. ***Um quadrilátero -*** Para que $ABCD$ seja um paralelogramo, seus lados devem ser dois a dois paralelos, isto é: $AB//CD$ e $AD//BC$.

Como

$$\widehat{DAB}+\widehat{ABC} = 180^\circ\,,$$

então as retas AD e BC são paralelas. Além disso, temos dois ângulos alternos internos de 45° entre as retas AB e DC, segue-se que elas são paralelas. Logo $ABCD$ é um paralelogramo.

4. ***Sexta-feira 13 -*** Dado que os dias da semana se repetem a cada 7 dias, então a diferença entre os dias da semana é dada pelo resto ao dividir por 7 o número de dias transcorridos.

Na tabela seguinte temos:

- na primeira linha o número de dias entre o dia 13 de um mês e o dia 13 do mês seguinte;
- na segunda linha o resto quando dividimos esse numero por 7;
- na terceira linha o resto quando dividimos por 7 o número de dias entre o 13 de janeiro e o 13 do mês correspondente, ou seja, é obtida somando os resultados obtidos na linha anterior desde janeiro até o mês correspondente e depois calculando o resto ao dividir por 7.

J-F	F-M	M-A	A-M	M-J	J-J	J-A	A-S	S-O	O-N	N-D
31	28	31	30	31	30	31	31	30	31	30
3	0	3	2	3	2	3	3	2	3	2
3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5

Os valores iguais na última linha, significam que nestes meses o dia 13 caiu no mesmo dia da semana. Em particular esta última linha nos diz que 13 de fevereiro, 13 de março e 13 de novembro correspondem ao mesmo dia da semana. Logo, temos no máximo três sexta-feiras treze.

Nesse caso temos que 13 de janeiro ocorreu 3 dias antes de sexta-feira, isto é terça-feira e o dia 10 de janeiro aconteceu 3 dias antes, isto é, no sábado.

Observação: Note que a 6^a-feira 13 ocorre apenas quando o 1^o dia do mês é um domingo. Assim, uma outra maneira, talvez mais simples, de resolver o problema é determinar o número máximo de vezes em que o 1^o dia do mês é um domingo num ano não bissexto.

5. ***Triângulos com lados inteiros* -** Para que três números a, b, c sejam os comprimentos dos lados do triângulo, cada um deles deve ser maior que a diferença e menor que a soma dos outros dois.

Sejam $a \leq b \leq c$ os comprimentos dos lados do triângulo. Assim, $c < a + b$.

Agora, somando c a ambos os membros temos que: $2c < a + b + c = 12$, ou seja, $2c < 12$, logo $c < 6$.

Além disso, como $3c \geq a + b + c = 12$ temos que: $c \geq 4$. Logo, $4 \leq c < 6$.

No caso de $c = 5$, temos que $a + b = 7$. Os possíveis valores de a e b são: $a = 2$ e $b = 5$ ou $a = 3$ e $b = 4$

No caso de $c = 4$, temos que $a + b = 8$, e portanto temos somente a solução $a = b = 4$.

assim temos 3 possíveis triângulos. A opção correta é (b).

6. ***Festa de aniversário -*** Denotemos por m o número de maças e p o número de peras que Ana comprou, assim o peso que ela leva na sacola é $300m + 200p$ gramas. Como a sacola aguenta no máximo 7000 gramas, temos que

$$300m + 200p \leq 7000, \text{ que é equivalente a } 3m + 2p \leq 70.$$

Como as peras pesam menos, Ana tem que levar a máxima quantidade de peras, e portanto, a mínima quantidade de maçãs. Assim, se ela levar 1 maçã, temos:

$$2p \leq 70 - 3 = 67 \implies p \leq 33,5.$$

Logo, levando 1 maçã, ela pode levar 33 peras. Então, o numero máximo de frutas é 34.

Na tabela abaixo vemos que Ana pode também levar 2 maçãs e 32 peras.

p	m	$300m + 200p$	$p + m$
34	0	6800	34
33	1	6900	34
32	2	7000	34
31	2	6800	33

7. ***Os dois quadrados -*** Se a é a medida do lado do quadrado maior e b a medida do lado do quadrado menor, então pelo enunciado temos

$$a^2 = b^2 + 2001\,.$$

Logo:

$$2001 = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$

Como a e b são números inteiros, temos que $a+b$ e $a-b$ são divisores de 2001. Mas, $2001 = 3 \times 23 \times 29$, segue que

$$(a+b)(a-b) = 2001 \times 1 = 667 \times 3 = 87 \times 23 = 69 \times 29.$$

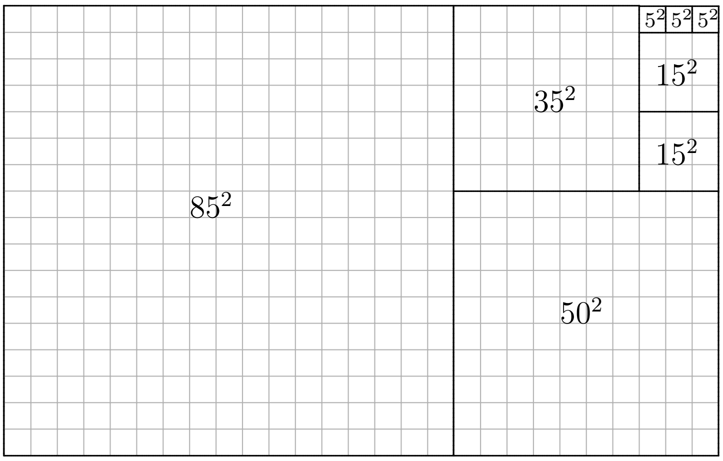
Consequentemente, temos 4 possíveis formas de fatorar 2001 em dois fatores:

- se $a+b = 2001$ e $a-b = 1 \Longrightarrow a = \frac{(a+b)+(a-b)}{2} = 1001$;
- se $a+b = 667$ e $a-b = 3 \Longrightarrow a = \frac{667+3}{2} = 335$;
- se $a+b = 87$ e $a-b = 23 \Longrightarrow a = \frac{87+23}{2} = 55$;
- se $a+b = 69$ e $a-b = 29 \Longrightarrow a = \frac{69+29}{2} = 49$.

Assim as possibilidades para o lado maior são: $1001\,,\ 335\,,\ 55\ \text{ e }\ 49$.

8. ***A multiplicação -*** O maior quadrado no retângulo de 85×135 é aquele de 85×85. Sobra então um retângulo de 50×85, onde o maior quadrado é de 50×50. Continuando assim, obtemos:

$$85 \times 135 = 85^2 + 50^2 + 35^2 + 15^2 + 15^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2.$$


5^2
5^2
5^2
15^2
35^2
15^2
85^2
50^2

Lista 2

1. ***Expressão fracionária -*** Se $\dfrac{x}{y} = 2$, então $\dfrac{x-y}{x}$ é igual a:

   (a) -1 (b) $-\dfrac{1}{2}$ (c) $\dfrac{1}{2}$ (d) 1 (e) 2

2. ***Potências de 2 -*** Calcule:

   a) $1678^2 - 1677^2$ b) $1001^2 + 1000^2$ c) 19999^2 d) $2001^2 + 2002^2 + 2003^2$

3. ***Um queijo triangular -*** Osvaldo comprou um queijo em forma de um triângulo equilátero. Ele quer dividir o queijo igualmente entre ele e seus quatro primos. Faça um desenho indicando como ele deve fazer essa divisão.

4. ***Notas de Matemática -*** João e Cláudia receberam suas notas numa prova de matemática. A nota de João foi $\blacksquare\bigstar$ e a de Cláudia $\bigstar\divideontimes$. Juntos eles obtiveram $\divideontimes\square\boxplus$. Além disso, Cláudia obteve 13 pontos a mais que João. Qual a nota de cada um?

5. ***Operação com raiz quadrada -*** O número

   $$A = (\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - 2)\sqrt{\sqrt{3} + 2}$$

   é igual a:

   (a) $-\sqrt{3}$ (b) $-\sqrt{2}$ (c) -2 (d) 1 (d) 2

6. ***O caminho da escola -*** Cátia sai da escola todos os dias no mesmo horário e volta para casa de bicicleta. Quando ela pedala a $20 km/h$, ela chega em

casa às $4:30$ horas da tarde. Se ela pedalar a $10km/h$, ela chega em casa às $5:15$ horas da tarde. A qual velocidade ela deve pedalar para chegar em casa às $5:00$ horas da tarde?

7. ***Distância na reta -*** Cinco pontos estão sobre uma mesma reta. Quando listamos as dez distâncias entre dois desses pontos, da menor para a maior, encontramos $2, 4, 5, 7, 8, k, 13, 15, 17, 19$. Qual o valor de k?

8. ***Número ímpar -*** Se n é um número inteiro qualquer, qual das seguintes opções é um número ímpar?

   (a) $n^2 - n + 2$ (b) $n^2 + n + 2$ (c) $n^2 + n + 5$

   (d) $n^2 + 5$ (e) $n^3 + 5$

Soluções da Lista 2

1. ***Expressão fracionária -***

Solução 1: Temos:
$$\frac{x-y}{x}=\frac{x}{x}-\frac{y}{x}=1-\frac{y}{x}.$$
Como $\frac{x}{y}=2$ temos que $\frac{y}{x}=\frac{1}{2}$, assim
$$\frac{x-y}{x}=\frac{x}{x}-\frac{y}{x}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$
A opção correta é (c).

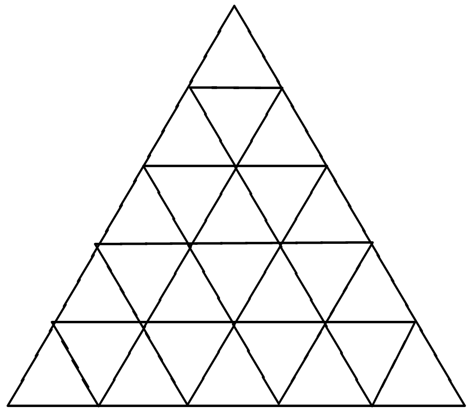
Solução 2: Se $\frac{x}{y}=2$, então $x=2y$. Logo
$$\frac{x-y}{x}=\frac{2y-y}{2y}=\frac{y}{2y}=\frac{1}{2}.$$

2. ***Potências de 2 -*** Fatorando temos:

$1678^2-1677^2=(1678+1677)(1678-1677)=3355.$

(b) Como $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, temos:
$$\begin{aligned}1001^2+1000^2 &= (1000+1)^2+1000^2=1000^2+2000+1+1000^2=\\ &= 2\times 1000^2+2001=2002001.\end{aligned}$$
(c) Como $(a-b)^2=a^2-2ab-b^2$, temos:
$$\begin{aligned}19999^2 &= (20000-1)^2=(2\times 10^4)^2-4\times 10^4+1=\\ &= 4\times 10^8-4\times 10^4+1=399\,960\,001.\end{aligned}$$
(d) Colocando em função de 2000 temos:
$$\begin{aligned}2001^2+2002^2+2003^2 &= (2000+1)^2+(2000+2)^2+(2000+3)^2=\\ &= 3\times 2000^2+12\times 2000+14\\ &= 12\,024\,014.\end{aligned}$$

3. ***Um queijo triangular -*** Para dividir o queijo em 5 partes iguais, é suficiente dividi-lo em $5k$ partes iguais e dar k partes a cada um. Uma forma de fazer essa partição, é mostrada na figura, onde o queijo foi partido em $25 = 5 \times 5$ triângulos.



4. ***Notas de Matemática -*** Temos que encontrar os valores dos símbolos na soma $\begin{array}{r} \blacksquare\,\bigstar \\ +\ \bigstar\,\divideontimes \\ \hline \divideontimes\,\square\,\boxplus \end{array}$.

As duas notas são números de dois algarismos e a soma tem três algarismos, logo a soma tem que ser maior do que 100 e menor do que 200, assim temos que $\divideontimes = 1$.

Mas, Cláudia obteve 13 pontos mais do que João, assim $\begin{array}{r} \blacksquare\,\bigstar \\ +\ 1\ 3 \\ \hline \bigstar\ 1 \end{array}$.

Agora como a soma de $\bigstar$ e 3 tem que terminar em 1, temos que $\bigstar = 8$, e portanto $\blacksquare = 6$. Assim as notas de Cláudia e João são, respectivamente, 81 e 68.

5. ***Operação com raiz quadrada -*** (c) Como

$$\begin{aligned}
A^2 &= \left[(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-2)\sqrt{\sqrt{3}+2}\right]^2 \\
&= (\sqrt{6}+\sqrt{2})^2(\sqrt{3}-2)^2\left(\sqrt{\sqrt{3}+2}\right)^2 \\
&= (\sqrt{6}+\sqrt{2})^2(\sqrt{3}-2)^2(\sqrt{3}+2) \\
&= (\sqrt{6}+\sqrt{2})^2(\sqrt{3}-2)[(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)] \\
&= (6+2\sqrt{12}+2)(\sqrt{3}-2)((\sqrt{3})^2-2^2) \\
&= (6+2\sqrt{12}+2)(\sqrt{3}-2)(-1) \\
&= (8+4\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) \\
&= 4(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) \\
&= 4(2^2-(\sqrt{3})^2) = 4\times 1 = 4
\end{aligned}$$

Assim $A^2 = 4$ e logo, A pode ser 2 ou -2. Como $\sqrt{3}-2$ é negativo, temos que A tem que ser negativo, e portanto $A = -2$.

6. ***O caminho da escola -*** Seja t o tempo que ela gasta pedalando a $20km/h$. Pedalando a 10 km/h, ela faz o percurso no dôbro do tempo que pedalando a 20km/h, isto é $2t$. No entanto, como ela demora 45 minutos a mais temos:

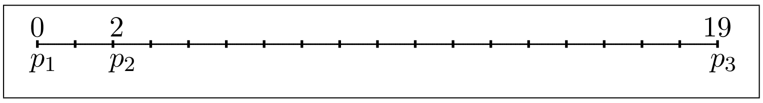
$$2t - t = 45 \implies t = 45min.$$

Logo, diariamente ela sai da escola às $4:30\,h - 45\,min = 3:15\,h$, e o percurso até em casa é de $45min \times 20km/h = \frac{3}{4}\times 20 = 15km$. Para percorrer $15km$ em $5:00\,h - 3:15\,h = 1:45\,h = \frac{5}{4}h$, ela deve manter uma velocidade de

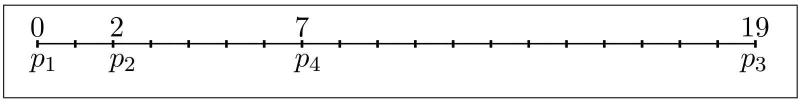
$$\frac{15km}{\frac{5}{4}h} = 12km/h.$$

7. ***Distância na reta -***

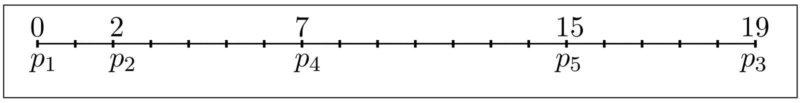
Solução 1: - Essa solução é um pouco difícil de escrever porque é feita na base de“tentativa e erro”. Começamos desenhando uma reta numérica e colocando os pontos 0 e 19. Como a primeira distância é 2, marcamos nossos primeiros três pontos:



Como temos que ter uma distância 7, colocamos o ponto 7 na reta. Isso nos dá distâncias que não são incompatíveis com o problema:

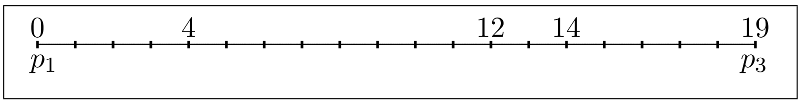


As distâncias entre esses 4 pontos são: 2, 7, 19, 5, 17 e 12. Finalmente, colocando o ponto 15 na reta obtemos o seguinte:



Com esses pontos as distâncias são: 2, 7, 15, 19, 5, 13 , 17, 8, 12, 4, que são compatíveis com os dados do problema. Logo, $k = 12$.

Note que temos também uma outra distribuição dos números, a saber:



Nessa distribuição também obtemos $k = 12$.

Solução 2: Como a maior distância é 19 podemos, supor que um ponto é o 0 e outro é 19.

Se a é um outro ponto, então na lista das distâncias temos os números: $a-0 = a$ e $19 - a$. De fato, na lista aparecem os pares 2 e 17, assim podemos supor que o número 2 é outro ponto sobre a reta.

Da mesma forma, como 4 e 15 estão na lista das distâncias, temos que 4 ou 15 é outro ponto na reta. Mas, 4 não pode ser um dos pontos porque a distância 2 não apareceu duas vezes. Logo, 15 é outro ponto na reta.

Por último o quinto ponto tem que estar a uma distância 5 de um dos pontos e a 7 de outro, logo o ponto que falta é o ponto 7 e a distância desconhecida é $k = 19 - 7 = 12$.

8. ***Número ímpar* -** Lembremos que:

- n e n^2 têm a mesma paridade: (par)^2=par e (ímpar)^2=ímpar;
- a soma ou diferença de números de mesma paridade é um número par: (par$\pm$ par=par e ímpar $\pm$ímpar=par).

Solução 1: Observemos que $n^2 + n$ e $n^2 - n$ são soma e diferença de dois números que sempre têm a mesma paridade, logo estes números sempre serão pares. Portanto $n^2 + n + 5 = (n^2 + n) + 5$ é soma de um par e um ímpar, logo sempre será ímpar para todo valor inteiro de n. A opção correta é (c).

Solução 2: Observemos que $n^2+n = n(n+1)$ e $n^2-n = n(n-1)$ são produtos de dois números consecutivos, logo estes números são pares. Portanto, $n^2 + n + 5 = (n^2 + n) + 5$ é a soma de um par com um ímpar, assim este numero é ímpar para todo valor inteiro de n.

Observemos que (a) e (b) são sempre números pares para qualquer valor de n, enquanto que (d) e (e) podem ser pares ou ímpares, dependendo se n é ímpar ou par.

Lista 3

1. ***Quatro números inteiros -*** Se quatro inteiros positivos distintos m, n, p e q satisfazem a equação

$$(7-m)(7-n)(7-p)(7-q)=4\,,$$

então a soma $m+n+p+q$ é igual a:

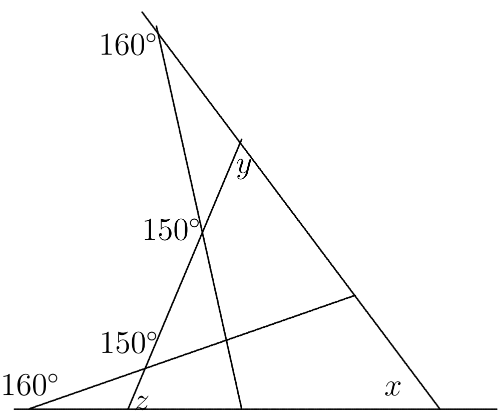
(a) 10 (b) 21 (c) 24 (*d*) 26 (e) 28

2. ***As páginas do dicionário -*** Para numerar as páginas de um dicionário, imprimiu-se 1988 vezes o algarismo 1. Quantas páginas tem esse dicionário?

3. ***Soma de potências de 2 -*** Determine um valor de n para o qual o numero $2^8+2^{11}+2^n$ seja um quadrado perfeito.

4. ***Reverso de um número -*** O *reverso* de um número inteiro de dois algarismos é o número que se obtém invertendo a ordem de seus algarismos. Por exemplo, 34 é o reverso de 43. Quantos números existem que somados ao seu reverso dão um quadrado perfeito?

5. ***Ângulos externos de um triângulo -*** Dados os ângulos de $150°$ e $160°$, indicados na figura, calcule os valores dos ângulos x, y e z.



6. ***Uma brincadeira -*** É feita uma brincadeira com quatro números inteiros da seguinte maneira: some três desses números, divida essa soma por 3 e o

resultado some com o quarto número. Existem quatro formas de fazer esta brincadeira, obtendo os seguintes resultados: 17, 21, 23 e 29. Qual é o maior dos quatro números?

7. ***Ovos e maçãs -*** Num armazém, uma dúzia de ovos e 10 maçãs tinham o mesmo preço. Depois de uma semana, o preço dos ovos caiu 2% e o da maçã subiu 10%. Quanto se gastará a mais na compra de uma dúzia de ovos e 10 maças?

   (a) 2% (b) 4% (c) 10% (d) 12% (e) $12,2\%$

8. ***Dividir um cubo -*** Se dividirmos um cubo de $1\,m$ de aresta em cubinhos de $1\,mm$ de aresta, que altura terá uma coluna formada por todos os cubinhos, dispostos sucessivamente um em cima do outro?

   (a) $1m$ (b) $1km$ (c) $10km$ (d) $100km$ (e) $1000km$

Soluções da Lista 3

1. ***Quatro números inteiros -*** Como m, n, p e q são inteiros, então $7-m$, $7-n$, $7-p$ e $7-q$ também são inteiros. Agora,

$$4 = (-1) \times (-2) \times 1 \times 2$$

é a única decomposição de 4 em um produto de números inteiros distintos. Segue que

$$(7-m)+(7-n)+(7-p)+(7-q) = (-1)+(-2)+1+2\,,$$

e daí obtemos $m+n+p+q = 28$. A opção correta é (e).

2. ***As páginas do dicionário -*** Observemos que:

- a cada 10 números imprime-se 1 vez o 1 nas unidades,
- a cada 100 números imprime-se 10 vezes o 1 nas dezenas,
- a cada 1000 números imprime-se 100 vezes o 1 nas centenas.

Assim, de 1 até 999 imprime-se o número 1:

100 vezes nas unidades $+$ 100 nas dezenas $+$ 100 nas centenas $= 300$.

De 1000 até 1999, imprime-se o numero 1 outras 300 vezes entre as unidades, dezenas e centenas, e 1000 vezes na posição dos milhares, portanto entre 1 e 1999 o numero de vezes que imprime-se o 1 é: $300+300+1000 = 1600$.

Agora entre 2000 e 2999 imprime-se o 1 mais 300 vezes, completando $1600+300 = 1900$.

De 3000 a 3099 temos 20 algarismos 1, de 3100 a 3119, temos 40 algarismos 1 e de 3120 a 3139 temos 22 algarismos, portanto até 3139 o numero de vezes que imprime-se o 1 é: $1900+20+40+22 = 1982$ vezes. Como faltam 6 algarismos 1, o número de páginas do livro é 3144.

3. ***Soma de potências de 2 -*** Observe que

$$2^8 + 2^{11} + 2^n = (2^4)^2 + 2 \times 2^4 \times 2^6 + (2^{\frac{n}{2}})^2.$$

Logo, se $n = 12$, temos

$$2^8 + 2^{11} + 2^{12} = (2^4 + 2^6)^2$$

Logo $n = 12$ é uma solução.

Solução Geral: Se $2^8 + 2^{11} + 2^n = k^2$, então:

$$\begin{aligned} 2^8 + 2^3 \times 2^8 + 2^n &= k^2 \\ 9 \times 2^8 + 2^n &= k^2 \\ 2^n &= k^2 - (3 \times 2^4)^2 \\ 2^n &= (k - 3 \times 2^4)(k + 3 \times 2^4) \end{aligned}$$

Logo, $(k - 3 \times 2^4)$ e $(k + 3 \times 2^4)$ são potências de 2, ou seja:

$$k + 3 \times 2^4 = 2^a \ , \ k - 3 \times 2^4 = 2^b \ \text{ e } \ a + b = n$$

Temos:

$$2^a - 2^b = (k + 3 \times 2^4) - (k - 3 \times 2^4) = 3 \times 2^5 = 96.$$

Examinemos a lista das potências de 2:

$$1 \ , \ 4 \ , \ 8 \ , \ 16 \ , \ 32 \ , \ 64 \ , \ 128 \ , \ 256 \ , \ \cdots$$

Constatamos que $128 - 32 = 96$. Logo, $a = 7$, $b = 5$ e $n = 12$.

4. ***Reverso de um número* -** Denotemos por ab e ba o número e seu reverso. Temos que

$$ab + ba = 10a + b + 10b + a = 11(a + b).$$

Por outro lado, $a \leq 9$ e $b \leq 9$, logo, $a + b \leq 18$. Como 11 é um número primo e $a+b \leq 18$, para que $11(a+b)$ seja um quadrado perfeito, só podemos ter $a + b = 11$.
Assim, temos 8 números satisfazendo a condição do problema: 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 e 92.

Lembrete: números de dois algarismos onde a é o algarismos das dezenas e b o das unidades são da forma

$$10 \times a + b.$$

Ex: $47 = 4 \times 10 + 7$

5. ***Ângulos externos de um triângulo* -** Observemos que os ângulos y, $150°$ e $160°$ são ângulos externos de um triângulo, logo

$$y + 150° + 160° = 360°\,.$$

Assim $y = 50°$. Pela mesma razão concluímos que $z = 50°$. Como x, y e z são ângulos internos de um triângulo então $x + y + z = 180°$, portanto $x = 80°$.

6. ***Uma brincadeira* -** Sejam a, b, c e d os números procurados. São dados os números

$$\frac{a+b+c}{3} + d\ ,\ \frac{a+b+d}{3} + c\ ,\ \frac{a+c+d}{3} + b \text{ e } \frac{b+c+d}{3} + a$$

mas não sabemos a ordem deles. Como

$$\begin{aligned}\tfrac{a+b+c}{3} + d + \tfrac{a+b+d}{3} + c + \tfrac{a+c+d}{3} + b + \tfrac{b+c+d}{3} + a &= 2(a+b+c+d)\\ &= 17 + 21 + 23 + 29\end{aligned}$$

Logo,

$$2(a + b + c + d) = 90 \Longrightarrow a + b + c + d = 45.$$

Agora, seja d o maior dentre os números a. b, c e d. Assim,

$$d = 29 - \frac{a+b+c}{3} = 29 - \frac{45-d}{3} \Longrightarrow d = 21\,.$$

7. ***Ovos e maçãs -*** Podemos supor que o preço inicial de uma dúzia de ovos é $R\$\,1,00$, assim 10 maças também custa $R\$\,1,00$. Como o preço do ovo caiu 2%, então o novo valor de uma dúzia de ovos é $R\$\,0,98$. O preço das maças subiu 10%, logo o novo preço das 10 maças é $R\$\,1,10$. Assim antes gastava-se $R\$\,2,00$ na compra dos ovos e das maças e agora gasta-se $0,98 + 1,10 = 2,08$ reais. Logo, o aumento foi de $R\$\,0,08$, que corresponde a $\dfrac{0,08}{2} \times 100\% = 4\%$. A opção correta é (b).

8. ***Dividir um cubo -*** Convertendo metros em milímetros temos: $1\,m = 1000\,mm$. Assim, o cubo ficou dividido em $1000 \times 1000 = 10^6$ cubinhos de lado $1\,mm$ cada um. Colocando-se lado a lado os 10^6 cubinhos, teremos uma coluna de comprimento

$$1000 \times 1000 = 10^6\,mm = 10^6 \times 10^{-3}\,m = 10^3\,m = 1\,km\,.$$

Lista 4

1. ***Uma expressão -*** A expressão $\dfrac{a^{-2}}{a^5} \times \dfrac{4a}{(2^{-1}a)^{-3}}$ onde $a \neq 0$, é igual a:

   (a) $\dfrac{a^3}{2}$ (b) $\dfrac{2}{a^3}$ (c) $\dfrac{1}{2a^3}$ (d) $\dfrac{a^5}{2}$ (e) $\dfrac{2}{a^5}$

2. ***Uma igualdade -*** Os números a e b são inteiros positivos e satisfazem $96a^2 = b^3$. Qual é o menor valor de a?

3. ***O retângulo do Luís -*** Luís desenhou um retângulo de $6cm$ por $10cm$, e quer dividí-lo em quatro partes. Cada parte deve ter de área, respectivamente, $8cm^2$, $12cm^2$, $16cm^2$, $24cm^2$. Desenhe como ele pode fazer essa divisão.

4. ***Somas de 3 em 3 -*** Encontre quatro números inteiros que somados de três em três dão 6, 7, 8 e 9.

5. ***Uma fábrica de blusas -*** Uma fábrica produz blusas a um custo de $R\$\,2,00$ por unidade além de uma parte fixa de $R\$\,500,00$. Se cada unidade produzida é comercializada a $R\$\,2,50$, a partir de quantas unidades produzidas a fábrica obtém lucro?

   (a) 250 (b) 500 (c) 1000 (d) 1200 (e) 1500

6. ***Existência de triângulos -*** Qual dos seguintes triângulos não pode existir?

   (a) triângulo agudo isósceles

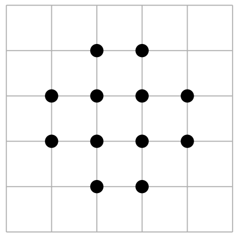
   (b) triângulo retângulo isósceles

(c) triângulo retângulo obtusângulo

(d) triângulo retângulo escaleno

(e) triângulo escaleno obtusângulo

7. ***Os doze pontos -*** Doze pontos estão marcados numa folha de papel quadriculada, conforme mostra a figura. Qual o número máximo de quadrados que podem ser formados unindo quatro desses pontos?



8. ***O colar -*** Um colar é composto de pérolas grandes e pérolas pequenas, num total de menos do que 500 pérolas.

   i - Se substituirmos 70% das pérolas grandes por pequenas, o peso do colar diminui de 60%.

   ii - Se substituirmos 60% das pérolas pequenas por grandes, o peso do colar aumenta de 70%.

   Quantas pérolas tem o colar?

Soluções da Lista 4

1. ***Uma expressão -*** Temos:

$$\frac{a^{-2}}{a^5} \times \frac{4a}{(2^{-1}a)^{-3}} = a^{-2-5} \times \frac{2^2\, a}{2^3\, a^{-3}}$$
$$= a^{-7} \times \frac{a^{1-(-3)}}{2}$$
$$= a^{-7} \times \frac{a^4}{2}$$
$$= \frac{a^{-7+4}}{2} = \frac{a^{-3}}{2} = \frac{1}{2a^3}$$

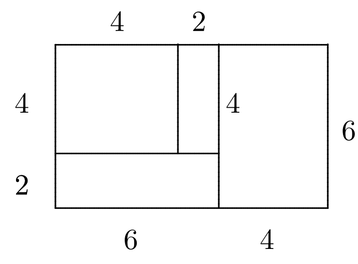
A opção correta é (c)

2. ***Uma igualdade -*** Fatorando 96 temos: $2^5 \times 3 \times a^2 = b^3$. Para que $2^5 \times 3 \times a^2$ seja um cubo, o numero a deve ser da forma: $a = 2^n \times 3^m$. Assim,

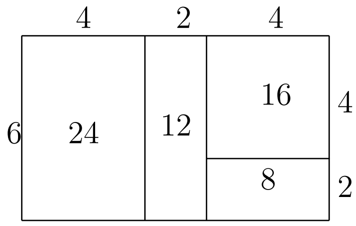
$$2^5 \times 3 \times a^2 = 2^5 \times 3 \times (2^n \times 3^m)^2 = 2^{5+2n} \times 3^{1+2m} = b^3$$

Logo, $5 + 2n$ e $1 + 2m$ são múltiplos de 3. Os menores valores de n e m são: $n = 2$ e $m = 1$. Portanto, $a = 2^2 \times 3 = 12$.

3. ***O retângulo do Luís -*** Como $24 = 4 \times 6$, então ele construiu o primeiro retângulo, tirando $4\,cm$ do lado de $10\,cm$, sobrando um quadrado de lado $6\,cm$. Sendo $16 = 4 \times 4$, ele construiu um quadrado de lado $4\,cm$ sobrando dois retângulos de áreas $(6-4) \times 4 = 8\,cm^2$ e $(6-4) \times 6 = 12\,cm^2$, como, por exemplo, a divisão mostrada na figura ao lado.



A seguinte configuração também é uma solução para o problema.



4. ***Somas de 3 em 3 -*** Sejam a, b, c e d os números procurados. São dados os números

$$a+b+c\ ,\ a+b+d\ ,\ a+c+d \quad \text{e} \quad b+c+d$$

logo

$$6+7+8+9=(a+b+c)+(a+b+d)+(a+c+d)+(b+c+d)=3(a+b+c+d)\,.$$

Assim,

$$a+b+c+d=\frac{30}{3}=10\,.$$

Note que cada numero é igual à diferença entre a soma dos quatro números e a soma dos outros três. Por exemplo: $c=(a+b+c+d)-(a+b+d)$. Logo, os números procurados são

$$10-6=4 \quad , \quad 10-7=3 \quad , \quad 10-8=2 \quad \text{e} \quad 10-9=1\,.$$

5. ***Uma fábrica de blusas -*** Denotemos por x o número de unidades produzidas. Assim o custo de produção é $500+2x$ reais. Pela venda o fabricante está recebendo $2,5x$. Assim, ele terá lucro quando

$$2,5x > 500+2x\,.$$

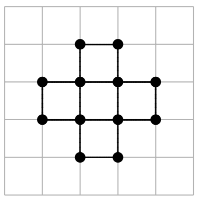
isto é, $0,5x > 500$. Portanto $x > 1000$. Logo, a opção correta é (c).

6. ***Existência de triângulos -*** A soma dos três ângulos internos de um triângulo é 180^o. Logo, se um deles mede 90^o, a soma dos outros dois é 90^o, e por isso não podem ser maiores do que 90^o. Portanto, não existem triângulos retângulos obtusângulos. Os seguintes exemplos de comprimentos de lados mostram que os outros casos podem ocorrer:

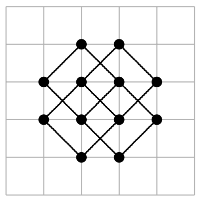
$$(a)\,2,3,3 \quad ; \quad (b)\,1,1,\sqrt{2} \quad ; \quad (d)\,3,4,5, \quad ; \quad (e)\,3,4,6.$$

7. ***Os doze pontos -*** No total, temos 11 possíveis quadrados como mostrado a seguir.

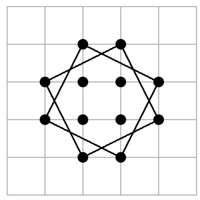
5 quadrados



4 quadrados



2 quadrados



8. ***O colar -*** Sejam n o número de pérolas grandes, p o número de pérolas pequenas, a o peso de uma pérola grande e b o de uma pérola pequena. Com essa notação temos:

- número total de pérolas no colar $= p + n$. Logo: $n + p < 500$
- peso das pérolas grandes $= n \times a$
- peso das pérolas pequenas $= p \times b$
- peso total do colar $= pb + na$

Para equacionar o problema, vamos equacionar antes as duas hipóteses:

i - Ao substituirmos 70% das pérolas grandes pelas pequenas, o colar fica composto como

$$\underbrace{30\% \times n}_{\text{grandes}} + \underbrace{p + 70\% \times n}_{\text{pequenas}} = 0,3n + (p + 0,7n)$$

e seu peso fica sendo

$$\underbrace{0,3n \times a}_{\text{peso das grandes}} + \underbrace{(p + 0,7n) \times b}_{\text{peso das pequenas}} = \underbrace{0,4(na + pb)}_{40\% \text{ do peso inicial}}$$

ii - Analogamente, temos que ao substituirmos 60% das pérolas pequenas pelas grandes, o colar fica composto como

$$\underbrace{n + 60\% \times p}_{\text{grandes}} + \underbrace{40\% \times p}_{\text{pequenas}} = (n + 0,6p) + 0,4p$$

e seu peso fica sendo

$$\underbrace{(n + 0,6p) \times a}_{\text{peso das grandes}} + \underbrace{0,4p \times b}_{\text{peso das pequenas}} = \underbrace{1,7(na + pb)}_{170\% \text{ do peso inicial}} \, .$$

Temos, então, o sistema:

$$\begin{cases} 0,3\,n\,a + 0,7n\,b + p\,b &= 0,4(n\,a + p\,b) \\ n\,a + 0,6p\,a + 0,4p\,b &= 1,7(n\,a + p\,b)\,. \end{cases}$$

Para resolvê-lo, começamos eliminando as incógnitas a e b, escrevendo o sistema na seguinte forma:

$$\begin{cases} \dfrac{7n + 6p}{n} = \dfrac{a}{b} \\ \dfrac{-13p}{7n - 6p} = \dfrac{a}{b}\,. \end{cases}$$

Segue que

$$\frac{7n + 6p}{n} = \frac{-13p}{7n - 6p} \implies 36p^2 - 13pn - 49n^2 = 0\,.$$

Para fatorar essa expressão, escrevemos

$$-13p\,n = 36p\,n - 49p\,n\,,$$

e temos:

$$\begin{aligned} 36p^2 - 13p\,n - 49n^2 &= 36p^2 + 36p\,n - 49p\,n - 49n^2 \\ &= p\,(36p - 49n) + n\,(36p - 49n) \\ &= (36p - 49n)(p + n)\,. \end{aligned}$$

Finalmente:

$$(36p - 49n)(p + n) = 0\,.$$

Obtemos $36p = 49n$, e como p e n são inteiros positivos, segue que n é múltiplo de 36 e p de 49. Assim temos: $n = 36k$ e $p = 49k'$, onde k e k' são inteiros maiores do que 1. Logo,

$$36 \times 49k' = 49 \times 36k \implies k = k'.$$

Portanto, $n = 36k$ e $p = 49k$. Deduzimos que $n + p = 85k$. Como $n + p < 500$, o colar só pode ter: 85 , 170 , 255 , 340 ou 425 pérolas.

Lista 5

1. ***Suco de laranja -*** Davi vai a um armazém que vende uma garrafa de suco de laranja por $R\$2,80$ e uma caixa com seis dessas garrafas por $R\$15,00$. Ele precisa comprar 22 garrafas para seu aniversário. Quanto ele gastará no mínimo?

2. ***Mulheres votantes -*** Numa cidade, 40% de todas as mulheres são votantes e 52% da população é de mulheres. Qual o percentual da população formado de mulheres votantes?

   (a) $18,1\%$ (b) $20,8\%$ (c) $26,4\%$ (d) 40% (d) 52%

3. ***Amigos do século XX -*** Dois amigos nasceram no século XX, com uma semana de intervalo e no mesmo mês e ano. Escrevendo da esquerda para a direita a data na forma o (ou os) algarismo(s) do dia, (ou os) algarismo(s) do mês, e os dois últimos algarismos do ano, obtemos dois números sendo um o sêxtuplo do outro. Não colocamos 0 na frente dos 9 primeiros meses. Qual é a data de nascimento do amigo mais velho?

4. ***Operação em uma fração -*** Que número se deve somar aos dois termos de uma fração para se obter o inverso dessa mesma fração?

5. ***O número 119 -*** O número 119 tem a seguinte propriedade:

   - a divisão por 2 deixa resto 1;
   - a divisão por 3 deixa resto 2;
   - a divisão por 4 deixa resto 3;

- a divisão por 5 deixa resto 4;
- a divisão por 6 deixa resto 5.

Quantos inteiros positivos menores que 2007 satisfazem essa propriedade?

6. ***Fonte com 3 torneiras -*** Sílvia vai a uma fonte que tem três torneiras, encher os seus dez garrafões. Um dos garrafões demora um minuto para encher, outro dois minutos, outro três minutos e assim por diante. Como Sílvia deverá distribuir os garrafões pelas torneiras de modo a gastar o menor tempo possível? Qual é esse tempo?

7. ***A seqüência xyz -*** Na seqüência $\frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, x, y, z, \ldots$ os valores de x, y e z são...

8. ***A mesa circular -*** Uma mesa circular tem 60 cadeiras em sua volta. Existem N pessoas sentadas nessas cadeiras de tal modo que a próxima pessoa a se sentar vai ter que se sentar ao lado de alguém. Qual é o menor valor possível para N?

Soluções da Lista 5

1. ***Suco de laranja -*** Se Davi comprar 6 garrafas individualmente, ele gastará

$$6 \times 2,80 = 16,80 \text{ reais}$$

que é mais caro do que comprar uma caixa com seis. Portanto ele deve comprar a maior quantidade possível de caixas. Nesse caso, ele deve comprar 3 caixas e 4 garrafas individualmente, caso em que gastará

$$3 \times 15 + 4 \times 2,80 = 56,20 \text{ reais},$$

que é o mínimo possível.

2. ***Mulheres votantes -*** A fração de mulheres na população é $\frac{52}{100}$, e delas, a fração que é votante é $\frac{40}{100}$. Logo, a fração de mulheres volantes é:

$$\frac{52}{100} \times \frac{40}{100} = \frac{104}{5 \times 100} = \frac{104}{5 \times 100} \times 100\% = 20,8\%.$$

A opção correta é (b).

3. ***Amigos do século XX -*** Os dois amigos nasceram no mesmo mês e no mesmo ano, com uma diferença de 7 dias, assim um nasceu no dia $d/m/a$ e o outro no dia $(d+7)/m/a$. Com esta datas formamos os números $(d)(m)(a)$ e $(d+7)(m)(a)$. Sabemos que:

$$(d+7)(m)(a) = (d)(m)(a) + 7 \times 10^k .$$

Assim,

$$(d+7)(m)(a) = 6 \times (d)(m)(a), \quad \Longrightarrow \quad 7 \times 10^k = 5(d)(m)(a).$$

Logo, $k = 3$ se o mês tem 1 algarismo e $k = 4$ se o mês tem 2 algarismos. No primeiro caso, quando $k = 3$, temos que $\frac{7000}{5} = 1400$, isto é, 1 de abril de 1900. Logo, seu amigo nasceu em 8 de abril de 1900. No segundo caso, quando $k = 1$, $\frac{70000}{5} = 14000$ não é uma data válida.

4. ***Operação em uma fração -*** Seja $\frac{a}{b}$ a fração procurada e seja c um número tal $\frac{a+c}{b+c} = \frac{b}{a}$. Esta igualdade é equivalente a $(a+c)a = (b+c)b$. Assim temos:

$$(a+c)a = (b+c)b \implies a^2 + ac - b^2 - bc = 0 \implies (a^2 - b^2) + c(a-b) = 0.$$

Donde

$$0 = (a^2 - b^2) + c(a-b) = (a-b)(a+b) + c(a-b) = (a-b)(a+b+c).$$

Portanto $(a-b)(a+b+c) = 0$. Temos dois casos:

1^o) $a - b = 0 \implies a = b$. Nesse caso a fração é igual a $1 = \frac{a}{a}$ e podemos somar qualquer número.

2^o) $a + b + c = 0 \implies c = -(a+b)$. Nesse caso temos que somar $-a-b$.

5. ***O número 119 -*** Inicialmente note que se N dividido por d deixa resto r, então somando a N um múltiplo de d, o resto não se altera, isto é:

$$\frac{(N + \text{múltiplo de}\, d)}{d} \text{ também deixa resto } r.$$

Por exemplo: 38 dividido por 3 deixa resto 2, logo o resto da divisão de $(38 + 5 \times 3)$ também é 2.

Assim, se somamos a 119 um número que seja múltiplo simultaneamente de 2, 3, 4, 5 e 6, esse número deixa os mesmos restos que 119 quando dividido por

$2, 3, 4, 5$ e 6. O menor múltiplo comum de $2, 3, 4, 5$ e 6 é 60, logo todo número da forma

$$119 + (\text{múltiplo de } 60)$$

satisfaz as cinco condições do enunciado.

Da divisão de 2007 por 60 temos:

$$2007 = 33 \times 60 + 27 = 32 \times 60 + 87 = 31 \times 60 + 147.$$

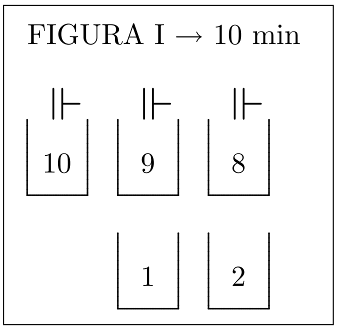
Como 119 está entre 87 e 147, temos que os números

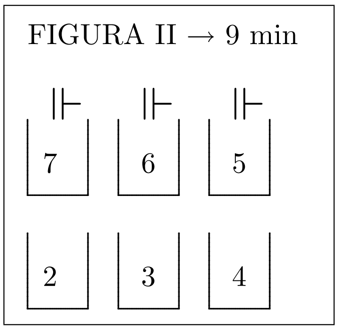
$$59, 119, 179, \ldots, 31 \times 60 + 119$$

cumprem a mesma propriedade que 119. Logo, temos 33 possíveis números.

6. ***Fonte com 3 torneiras -***

Solução 1: Para simplificar, numeramos os garrafões de acordo com os respectivos tempos que gastam para ficar cheios. A idéia , é utilizar o "tempo que sobra"de um garrafão para encher outro garrafão, enchendo simultaneamente outros. As figuras ilustram a solução.





Na figura I as 3 torneiras gastam 10 minutos para encher os garrafões 10, 9, 8, 1 e 2. Na figura II as 3 torneiras gastam 9 minutos para encher os garrafões 7, 6, 5, 2, 3 e 4. Logo, o tempo total gasto é de 19 minutos.

Solução 2: Se tivéssemos uma torneira só, o tempo gasto para encher os 10 garrafões é $1 + 2 + \cdots + 9 + 10 = 55$ minutos. Como $55 = 18 \times 3 + 1$, se temos

3 torneira devemos gastar pelo menos 19 minutos. A seguinte tabela mostra a forma de fazer o trabalho em 19 minutos.

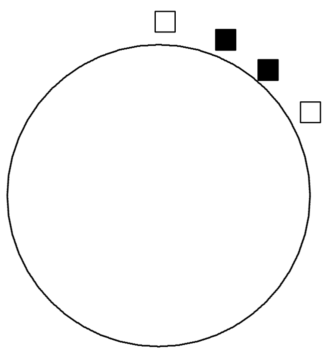
Torneira 1	10	9		
Torneira 2	8	7	3	
Torneira 3	5	4	2	1

7. ***A seqüência xyz -*** Igualando os denominadores, verificamos que a seqüência dada é a mesma que a seqüência

$$\frac{4}{8}\,,\ \frac{5}{8}\,,\ \frac{6}{8}\,,\ \frac{7}{8}\,,\ x\,,\ y\,,\ z\,,\ \ldots$$

Assim, o denominador é 8 e os numeradores são números consecutivos. Logo $x = \frac{8}{8} = 1$, $y = \frac{9}{8}$ e $z = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$.

8. ***A mesa circular -*** Se a próxima pessoa a se sentar vai ter que se sentar ao lado de uma cadeira ocupada, isso significa que existem no máximo 2 cadeiras desocupadas consecutivas. Veja na figura: as cadeiras ocupadas estão representadas por quadradinhos brancos e as desocupadas por quadradinhos pretos. Podemos então pensar nas cadeiras em grupos de 3 e a terceira está ocupada. Logo, o menor valor de N é $60 \div 3 = 20$.



Lista 6

1. ***Números proporcionais -*** Se $\dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{z}$, então $9y^2$ é igual a:

   (a) $\frac{x^2}{9}$ (b) x^3z (c) $3x^2$ (d) x^2z^2 (e) $\frac{1}{9}x^2z^2$

2. ***Esportistas de uma escola -*** Em um grupo de 40 estudantes, 20 jogam futebol, 19 jogam vôlei e 15 jogam exatamente uns destes dois esportes. Quantos estudantes não praticam futebol e vôlei?

   (a) 7 (b) 5 (c) 13 (d) 9 (e) 10

3. ***Vamos ao teatro -*** Na campanha "Vamos ao teatro", 5 ingressos podem ser adquiridos pelo preço usual de 3 ingressos. Mário comprou 5 ingressos nessa campanha. A economia que Mário fez representa que percentual sobre o preço usual dos ingressos?

   (a) 20% (b) $33\frac{1}{3}$% (c) 40% (d) 60% (e) $66\frac{2}{3}$%

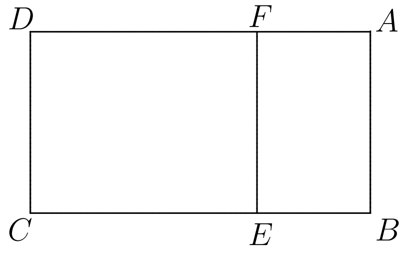
4. ***Uma desigualdade -*** Os valores de x que satisfazem $\dfrac{1}{x-1} > 1$ são:

   (a) $x < 2$ (b) $x > 1$ (c) $1 < x < 2$ (d) $x < 1$ (e) $x > 2$

5. ***A sala do Newton-*** Professor Newton dividiu seus alunos em grupos de 4 e sobraram 2. Ele dividiu seus alunos em grupos de 5 e um aluno ficou de fora. Se 15 alunos são mulheres e tem mais mulheres do que homens, o número de alunos homens é:

   (a) 7 (b) 8 (c) 9 (d) 10 (e) 11

6. ***Um jardim retangular -*** O retângulo ABCD representa um terreno retangular cuja largura é 3/5 do comprimento. O retângulo ABEF representa um jardim retangular cuja largura é também 3/5 do comprimento. Qual a razão entre a área do jardim e a área total do terreno?



(a) 30% (b) 36% (c) 40% (d) 45% (e) 50%

7. ***Os bombons misturados -*** Marta e Carmem ganharam, cada uma, muitos bombons. Elas misturarm os bombons e agora não sabem mais qual o número de bombons que cada uma ganhou. Vamos ajudá-las a descobrir os números sabendo que:

- juntas ganharam 200 bombons;
- cada número é múltiplo de 8;
- Marta se lembra que ganhou menos de 100 bombons, mas mais do que 4/5 do que ganhou Carmem.

Soluções da Lista 6

1. ***Números proporcionais -*** Como $\frac{x}{y} = \frac{3}{z}$, então $xz = 3y$. Elevando ao quadrado ambos os membros dessa igualdade obtemos $x^2z^2 = 9y^2$. A opção correta é (d).

2. ***Esportistas de uma escola -*** Denotemos por x o número de estudantes que praticam simultaneamente os dois esportes. Logo, temos que o número de estudantes que pratica somente futebol é $20 - x$ e o que pratica somente vôlei é $19 - x$. Portanto os estudantes que praticam exatamente um esporte são

$$(20 - x) + (19 - x) = 15.$$

Segue-se que $x = 12$ e teremos que os estudantes que praticam algum esporte são

$$20 + (19 - x) = 27\,.$$

Portanto, os que não praticam esporte são 13. A opção correta é (c).

3. ***Vamos ao teatro -*** Mário pagou 3 e levou 5, logo ele pagou apenas $\frac{3}{5}$ do preço usual e portanto, economizou $\frac{2}{5}$. Como $\frac{2}{5} = \frac{40}{100}$, a economia foi de 40%. A opção correta é (c).

4. ***Uma desigualdade -*** Note que o inverso de um número b só é maior do que 1 quando b for positivo e menor do que 1. Portanto,

$$\frac{1}{x-1} > 1 \iff 0 < x - 1 < 1 \iff 1 < x < 2\,.$$

A opção correta é (c).

5. ***A sala do Newton -***

Solução 1: Como o número de alunos homens é menor do que 15 e das mulheres é 15, temos

$$15 < \text{alunos homens } + \text{ alunas mulheres} < 15 + 15 = 30$$

ou seja: o número de alunos está entre 15 e 30.

Por outro lado quando dividimos por 4 sobram 2 alunos, então o número de alunos é par. Quando dividimos por 5 sobra um, então o último algarismo do número é 1 ou 6, mas sendo par só pode ser 6. Assim só temos dois possíveis valores: 16 e 26. Descartamos 16 porque é divisível por 4. Logo, a resposta é 26.

Solução 2: Como acima, o número de alunos está entre 15 e 30. Observemos que o número 6 dividido por 4 deixa resto 2 e dividido por 5 deixa resto 1. Logo se somamos a 6 um múltiplo comum de 4 e 5, o número obtido também terá esta propriedade. O menor múltiplo comum de 4 e 5 é 20, assim os possíveis valores para o número de alunos é $6, 26, 46, 66, \ldots$. Dado que o número de alunos está entre 15 e 30 então a solução é 26.

6. ***Um jardim retangular -*** Pelos dados do problema sabemos que

$$AD = \frac{5}{3}AB \quad \text{e} \quad AB = \frac{5}{3}AF\,.$$

Logo,

$$AD = (\frac{5}{3})^2 AF = \frac{25}{9}AF\,.$$

A área do terreno é $AB \times AD$ e a área do jardim é $AB \times AF$, portanto a razão entre as áreas é

$$\frac{AB \times AF}{AB \times AD} = \frac{AF}{AD} = \frac{AF}{(\frac{5}{3})^2 AF} = \frac{9}{25} = 36\%.$$

A opção correta é (b).

7. ***Números decrescentes* -** Escreva os números abaixo em ordem decrescente

$$\sqrt[5]{3}, \quad 3^{-2/3}, \quad 3^{-2}, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^3, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}.$$

Solução: Sabemos que

- $3^{-2/3} = \frac{1}{3^{2/3}} < 1$,
- $3^{-2} = \frac{1}{3^2} < 1$,
- $(\frac{1}{3})^3 = \frac{1}{3^3} < 1$,
- $1 < \sqrt[5]{3} < 3$.

Se a, b e c são não nulos e

$$a > b > c$$

então

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < \frac{1}{c}.$$

Como $3^3 > 3^2 > 3^{2/3}$ temos então :

$$\frac{1}{3^3} < \frac{1}{3^2} < \frac{1}{3^{2/3}} < 1 < \sqrt[5]{3} < 3.$$

Portanto,

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 < 3^{-2} < 3^{-2/3} < \sqrt[5]{3} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}.$$

8. ***Os bombons misturados* -** Sejam x o número de bombons que Marta ganhou e y o que Carmem ganhou. Temos $x + y = 200$. Como $x < 100$ então $y \geq 100$. Por outro lado, $x > \frac{4}{5}y$ e $y \geq 100$, concluímos que $x > \frac{4}{5} \times 100 = 80$. Logo, x é um inteiro compreendido entre 80 e 100 e múltiplo de 8, logo, só pode ser 88 ou 96. Vamos decidir:

- Se $x = 88$, então $y = 200 - 88 = 112$. Logo: $x > \frac{4}{5} \times 112 = 89,5$, o que não é possível.
- Se $x = 96$, então $y = 200 - 96 = 104$ e $x > \frac{4}{5} \times 104 = 83,2$, o que é possível.

Logo Marta ganhou 96 bombons e Carmem 104.

Lista 7

1. ***Jantar aos sábado -*** Três casais jantam todo sábado no mesmo restaurante, numa mesma mesa redonda. A política do restaurante é :

   (a) jamais colocar juntos à mesa como vizinhos marido e mulher;

   (b) a disposição dos seis à mesa é diferente a cada sábado.

   Durante quantos sábados os casais poderão ir ao restaurante sem repetir as disposições à mesa?

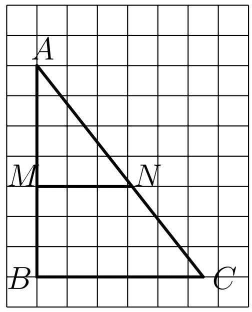
2. ***Expressão com radicais -*** O valor de $\left(\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}\right)^4$ é:

   (a) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ (b) $\frac{1}{2}\left(7+3\sqrt{5}\right)$ (c) $1+2\sqrt{3}$ (d) 3 (e) $3+2\sqrt{2}$

3. ***Uma diferença -*** O valor de $\dfrac{\sqrt[3]{-0,001}\times\sqrt{400}}{\sqrt{0,25}}-\dfrac{\sqrt{0,036}-\sqrt{0,4}}{\sqrt{0,4}}$ é:

   (a) $-3,3$ (b) $-4,7$ (c) $-4,9$ (d) $-3,8$ (e) $-7,5$

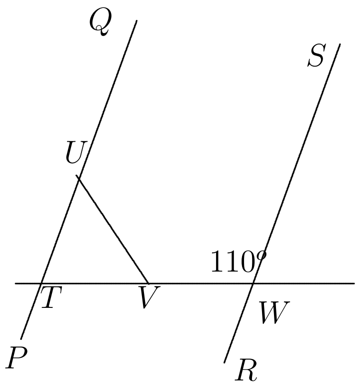
4. ***A Terra -*** A superfície do globo terrestre consiste de água (70%) e de terra (30%). Dois quintos da terra são desertos ou cobertos por gelo e, um terço é pastagem, floresta ou montanha; o resto é cultivado. Que percentual da superfície total do globo terrestre é cultivada?



5. ***Uma fração -*** Determine $\dfrac{AN}{AC}$.

6. ***Cáculo de ângulo -*** Na figura PQ é paralelo a RS e $TU = TV$. Se o ângulo $\widehat{TWS} = 110°$, o ângulo $\widehat{QUV}$ mede:

   (a) 135° (b) 130° (c) 125° (d) 115° (e) 110°

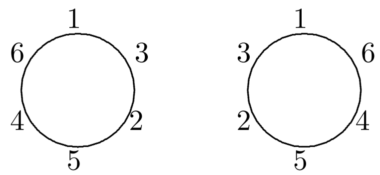


7. ***Uma loja de brinquedos -*** Uma loja estava vendendo um brinquedo por $R\$\,13,00$ a unidade. Para conseguir vender todo o seu estoque que não era superior a 100 unidades, resolveu abaixar o preço de um número inteiro de reais. Com isso, conseguiu vender todo o estoque por $R\$\,781,00$. Qual foi a redução do preço, por unidade?

Soluções da Lista 7

1. ***Jantar aos sábado -*** Para simplificar, vamos denotar cada casal por um par de números: (1, 2), (3, 4), (5, 6), onde em cada par, um número representa o marido e o outro a mulher. Três pares não podem ser vizinhos (1, 2), (3, 4), (5, 6)

   Veja duas disposições possíveis; no sentido horário começando em 1: 1-3-2-5-4-6 e 1-6-4-5-2-3.

   132546 164523

   Fixando a posição do 1 na mesa e lendo os números formados no sentido horário, o problema se resume em encontrar todos os números de 6 algarismos distintos que podem ser escritos com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, onde:

   - os números todos começam com o algarismo 1;
   - não podem aparecer juntos 1 e 2, 3 e 4, 5 e 6.

   Encontramos os 16 números que estão na tabela.

132546	132645	135246	135264	135426	136245
136254	136425	142536	142635	145236	145326
146235	146325	153246	154236		

   Logo, a resposta é 16 sábados.

2. ***Expressão com radicais -***

$$\left(\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}\right)^4 = \left(1+\sqrt{2}\right)^2 = 1+2\sqrt{2}+2 = 3+2\sqrt{2}.$$

A opção correta é (e).

3. ***Possíveis triângulos -*** Os lados de um triângulo têm comprimentos: a, $a+2$ e $a+5$, onde $a>0$. Determine os possíveis valores de a.

Solução: Como a soma dos comprimentos dos lados menores deve ser maior que o comprimento do lado maior, então temos que $a+(a+2)>a+5$, assim $a>3$.

4. ***Uma diferença -*** (a) Temos:

$$\frac{-0,1\times 20}{0,5}-\frac{\sqrt{0,4}\,(\sqrt{0,09}-1)}{\sqrt{0,4}}=-\frac{20}{5}-(0,3-1)=-4-0,3+1=-3,3.$$

5. ***A Terra -*** A fração da terra que é cultivada é

$$1-\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=\frac{15-6-5}{15}=\frac{4}{15}\,.$$

Como a terra é $\frac{3}{10}$ do globo, temos que área cultivada é $\frac{4}{15}\times\frac{3}{10}=\frac{2}{25}$ do globo, isto é o $\frac{2}{25}\times 100\%=8\%$ do globo terrestre.

6. ***Uma fração -*** A figura mostra que MN é paralelo a BC, logo os triângulos ABC e AMN são semelhantes, e por isso seus lados são proporcionais. Usando o lado dos quadradinhos da grade da figura, temos: $\frac{AM}{AB}=\frac{4}{7}$. Logo,

$$\frac{AN}{AC}=\frac{AM}{AB}=\frac{4}{7}.$$

7. ***Cáculo de ângulo -*** Como as retas PQ e RS são paralelas, então os ângulos $\widehat{TWS}$ e $\widehat{QTW}$ são complementares. Assim temos que

$$\widehat{QTW}=180^\circ-110^\circ=70^\circ\,.$$

Por outro lado, sabemos que o triângulo $\triangle UTV$ é isósceles, logo os ângulos em U e em V são iguais. Usando que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° temos que

$$2\widehat{TUV} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ\,.$$

Portanto

$$\widehat{TUV} = 55^\circ \quad \text{e} \quad \widehat{QUV} = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ\,.$$

A opção correta é (c).

8. ***Uma loja de brinquedos -*** Se x é o desconto em reais e y é o número de peças, então

$$(13 - x) \times y = 781 \ \text{ e } \ y < 100.$$

Assim, $(13 - x)$ e y são divisores de 781. Como $781 = 11 \times 71$, a única solução é $y = 71$ e $13 - x = 11$. Logo, a redução foi de $R\$2,00$.

Observação: $x = 12$ e $y = 781$ é solução da equação $(13 - x) \times y = 781$, mas não do problema porque devemos ter $y < 100$.

Lista 8

1. ***Fração de fração*** **-** Qual o valor de $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}$?

2. ***Potências de 3*** **-** Se $3^n = 2$ então quanto vale 27^{2n}?

3. ***Aumento de preço*** **-** Se o preço de um produto subiu de $R\$\,5,00$ para $R\$\,5,55$, qual foi a taxa percentual de aumento?

4. ***Roseiras em fila*** **-** Jorge ganhou 15 roseiras para seu jardim, com a condição de plantá-las em 6 filas de 5 roseiras cada uma. Isso é possível? Em caso afirmativo faça um desenho indicando para Jorge como plantar as roseiras.

5. ***Calculadora diferente*** **-** Uma fábrica produziu uma calculadora original que efetua duas operações:

   - a adição usual +
   - a operação $\circledast$

   Sabemos que para todo número natural a tem-se:

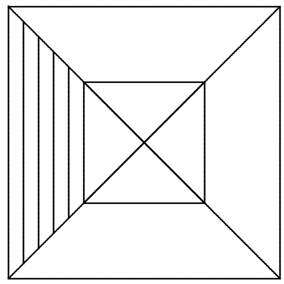
   $$\text{(i) } a \circledast a = a \quad \text{e} \quad \text{(ii) } a \circledast 0 = 2a$$

   e, para quaisquer quatro naturais a, b , c e d

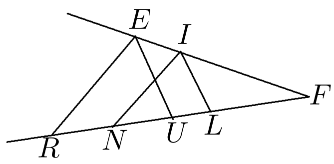
   $$\text{(iii) } (a \circledast b) + (c \circledast d) = (a+c) \circledast (b+d)\,.$$

   Quais são os resultados das operações $(2+3) \circledast (0+3)$ e $1024 \circledast 48$?

6. ***Dois quadrados -*** Na figura ao lado, a área do quadrado maior é $10\,cm^2$ e do menor é $4\,cm^2$. As diagonais do quadrado maior contém as diagonais do quadrado menor. Quanto mede a área da região tracejada?

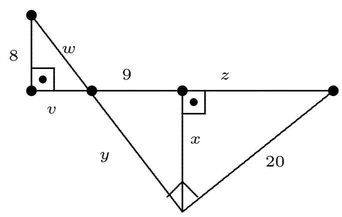


7. ***Paralelismo-*** Sendo IL paralela à EU e RE paralela à NI, determine $\dfrac{FN \times FU}{FR \times FL}$.



8. ***Um subconjunto -*** O conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 3000\}$ contém um subconjunto de 2000 elementos tal que nenhum elemento é o dobro do outro?

9. ***Triângulos retângulos -*** Dada a figura com as marcas, determine v, w, x, y e z.



10. ***Uma desigualdade especial-*** Quais valores de x satisfazem $x^2 < |x| + 2$?

(a) $x < -1$ ou $x > 1$ (b) $x > 1$ (c) $-2 < x < 2$ (d) $x < -2$ (e) $x < 0$

Soluções da Lista 8

1. ***Fração de fração -*** Temos:

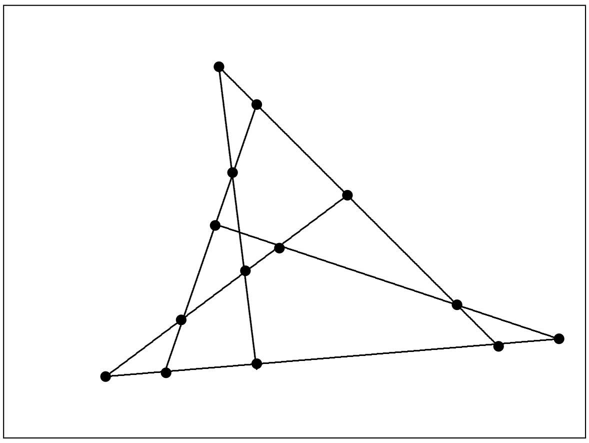
$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{3}{2}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{3}}=1+\frac{1}{\frac{5}{3}}=1+\frac{3}{5}=\frac{8}{5}.$$

2. ***Potências de 3 -*** Temos: $27^{2n}=(3^3)^{2n}=3^{6n}=(3^n)^6=2^6=64$.

3. ***Aumento de preço -*** O aumento em reais foi $5,55-5=0,55$; então o percentual de aumento foi

$$\frac{0,55}{5}=\frac{0,55\times 20}{5\times 20}=\frac{11}{100}=11\%.$$

4. ***Roseiras em fila -*** É possível plantar as roseiras em 6 filas de 5 roseiras cada uma, conforme mostra o desenho a seguir .



5. ***Calculadora diferente -*** Para calcular $(2+3)\circledast(0+3)$ utilizaremos a propriedade (iii), e temos:

$$(2+3) \circledast (0+3) = (2 \circledast 0) + (3 \circledast 3)$$

Agora, por (i) temos $2 \circledast 0 = 2 \times 2 = 4$, e por (ii) temos $3 \circledast 3 = 3$. Portanto,

$$(2+3) \circledast (0+3) = 4 + 3 = 7$$

Agora, para calcular $1024 \circledast 48$ vamos usar a mesma estratégia que acima. Para isso, note que $1024 = 976 + 48$ e $48 = 0 + 48$.

$$\begin{aligned} 1024 \circledast 48 &= (976+48) \circledast (0+48) \\ &= (976 \circledast 0) + (48 \circledast 48) \\ &= 2 \times 976 + 48 \\ &= 1952 + 48 = 2000. \end{aligned}$$

6. ***Dois quadrados -*** Observemos que a área do quadrado maior menos a área do quadrado menor é igual a 4 vezes a área procurada. Logo a área tracejada é

$$\frac{10^2 - 4^2}{4} = \frac{100-16}{4} = 25 - 4 = 21.$$

7. ***Paralelismo-*** Dado que IL e EU são paralelas então $\frac{FU}{FL} = \frac{FE}{FI}$. Analogamente, como RE é paralela a NI temos que $\frac{FN}{FR} = \frac{FI}{FE}$. Logo,

$$\frac{FN \times FU}{FR \times FL} = \frac{FE}{FI} \times \frac{FI}{FE} = 1.$$

8. ***Um subconjunto -*** Vamos construir o subconjunto pedido da seguinte forma:

- ele contém todos os números ímpares: $1, 3, 5, \ldots, 2999$. Aqui já temos uma lista com 1500 números.
- o conjunto não pode conter os números que são da forma $2\times$(número ímpar),
- o conjunto pode conter os números que são da forma $4\times$(número ímpar), isto é,

$$\underbrace{4\times 1}_{4}\ ,\ \underbrace{4\times 3}_{12}\ ,\ \underbrace{4\times 5}_{20}\ ,\ \ldots\ ,\ \underbrace{4\times 749}_{2996}$$

  essa lista tem 749 números e nenhum é o dôbro do outro. Além disso, nenhum deles é o dôbro de um número ímpar.

Logo, o nosso conjunto já possui $1500 + 749 = 2249$ elemento; assim qualquer subconjunto dele com 2000 elementos satisfaz as condições pedidas.

9. ***Triângulos retângulos -*** Observemos que os quatro triângulos que aparecem na figura são triângulos retângulos semelhantes, e portanto seus lados são proporcionais. Em particular

$$\frac{v}{8} = \frac{9}{x} = \frac{y}{20}.$$

Além disso, pelo teorema de Pitágoras temos que $y^2 = x^2 + 9^2$ e portanto

$$\frac{81}{x^2} = \frac{y^2}{400} = \frac{x^2+81}{400},$$

assim $x^4 + 81x^2 - 81\times 400 = 0$ e

$$x = \sqrt{\frac{81+\sqrt{81^2+4\times 81\times 400}}{2}} = 3\sqrt{\frac{9+\sqrt{81+1600}}{2}} = 3\sqrt{\frac{9+41}{2}} = 15,$$

donde $y = \sqrt{15^2+9^2} = 3\sqrt{34}$, $z = \sqrt{20^2-x^2} = 5\sqrt{7}$, $v = 8\frac{9}{15} = \frac{24}{5}$ e finalmente $w = \sqrt{8^2+v^2} = \frac{8}{5}\sqrt{34}$.

10. ***Uma desigualdade especial-*** Observemos que se um número a satisfaz a desigualdade, então $-a$ também satisfaz a desigualdade, logo os valores que satisfazem a desigualdade formam um conjunto simétrico, portanto basta considerar o caso em que x é positivo. Mas, $(2-x)(1+x) = x+3-x^2 > 0$ é positivo se $2-x$ é positivo, portanto $x < 2$. Como a solução é simétrica temos que $-2 < x < 2$ é a solução da equação inicial. A opção correta é (c).

Nível 3

Lista 1

1. ***Equação cúbica -*** Sobre a equação $2007x^3 + 2006x^2 + 2005x = 0$ é certo afirmar:

   (a) Não possui raízes (b) Tem 3 raízes reais distintas

   (c) Tem 2 raízes iguais (d) Tem apenas uma raiz real

   (e) Tem 3 raízes positivas

2. ***O perfume de Rosa -*** Rosa ganhou um vidro de perfume no formato de um cilindro de $7\,cm$ de raio da base e $10\,cm$ de altura. Depois de duas semanas usando o perfume restou $0,45\,l$ no vidro. Qual a fração que representa o volume que Rosa já usou?

3. ***Igualdade com inteiros -*** Quais números naturais m e n satisfazem a $2^n + 1 = m^2$?

4. ***O caminho da pulga -*** Para percorrer um caminho reto de 10 metros de comprimento, uma pulga usa a seguinte estratégia: a cada dia ela percorre a metade do caminho que faltava no dia anterior. Portanto, no primeiro dia ela percorre 5 metros, no segundo 2,5 metros e assim por diante (o tamanho da pulga é desprezível).

   (a) Quantos metros ela terá percorrido ao final do sétimo dia? E do décimo?

   (b) A partir de qual dia a pulga estará a menos de $0,001m$ do final do caminho?

5. ***Uma soma alternada -*** Se $S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots + (-1)^{n+1}n$, onde n é um inteiro positivo, então $S_{1992} + S_{1993}$ é:

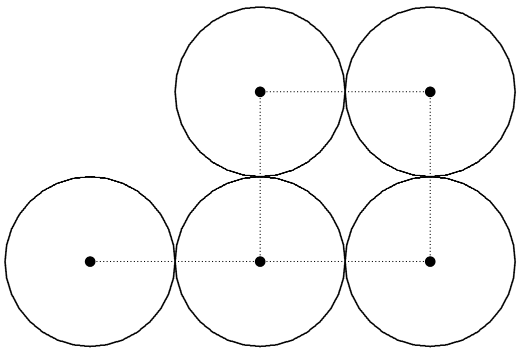
   (a) -2 (b) -1 (c) 0 (d) 1 (e) 2

6. ***O raio da circunferência -*** Um arco de circunferência mede 300° e o seu comprimento é $2\,km$. Qual o número inteiro mais próximo da medida do raio em metros?

   (a) 157 (b) 284 (c) 382 (d) 628 (e) 764

7. ***Quatro passageiros -*** Em um táxi podem se sentar um passageiro na frente e três atrás. De quantas maneiras podem se sentar os quatro passageiros se um deles quer ficar na janela?

8. ***Os cinco círculos -*** Cinco discos de mesmo raio estão dispostos como mostra a figura. Quatro centros são os vértices de um quadrado e três estão alinhados. Trace uma reta que divida a figura formada pelos 5 discos em duas partes de mesma área.



Soluções da Lista 1

1. ***Equação cúbica -*** Observemos que $x = 0$ é uma solução, logo as possibilidades (a) e (e) ficam descartadas. Agora só precisamos estudar as soluções de $2007x^2 + 2006x + 2005 = 0$, que é uma equação do 2^o grau com discriminante

$$\begin{aligned} \Delta &= 2006^2 - 4 \times 2007 \times 2005 = 2006^2 - 4(2006 + 1)(2006 - 1) \\ &= 2006^2 - 4(2006^2 - 1) = -3 \times 2006^2 + 4 < 0, \end{aligned}$$

logo não possui raízes reais. Portanto, a equação inicial tem uma única raiz real, e a opção correta é (d).

Observação: Uma outra maneira (e mais simples) de mostrar que $\Delta < 0$ é: como $2006 < 2007$ e $2006 < 4 \times 2005$, então

$$2006 \times 2006 < 4 \times 2005 \times 2007 \implies 2006^2 - 4 \times 2005 \times 2007 < 0.$$

2. ***O perfume de Rosa -*** O volume de um cilindro é o produto da área da base pela altura. Como o raio da base é $7\,cm$, a área da base é: $\pi \times 7^2$, e então o volume do vidro é

$$\pi \times 7^2 \times 10\,cm^3 = 490\pi\,cm^3 = \frac{490\pi}{1000}\,dm^3 = 0,49\,\pi\,\text{litros},$$

lembrando que $1000\,cm^3 = 1\,dm^3 = 1\,litro$.

Depois de duas semanas, restaram $0,45$ litros de perfume, então ela gastou $(0,49\,\pi - 0,45)$ litros. Portanto, a fração que representa o volume gasto é:

$$\frac{\text{volume gasto}}{\text{volume total}} = \frac{0,49\,\pi - 0,45}{0,49\,\pi} = \frac{49\,\pi - 45}{49\,\pi}.$$

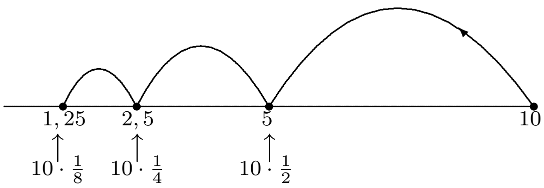
3. ***Igualdade com inteiros -*** Como

$$2^n = m^2 - 1 = (m + 1)(m - 1),$$

temos que $m-1$ e $m+1$ são potências de 2 cuja diferença é 2. Logo, a única solução possível é $m-1=2$ e $m+1=2^2$, donde $m=3$. Segue que $2^n+1=3^2$, e obtemos $n=3$.

4. ***O caminho da pulga -*** No 1º pulo a pulga percorre $10\times\frac{1}{2}$, no 2º, $10\times\frac{1}{2^2}$, e assim por diante.

Os pulos da pulga



Depois de 7 dias a pulga terá percorrido

$$10\left(\tfrac{1}{2}\right)+10\left(\tfrac{1}{2}\right)^2+10\left(\tfrac{1}{2}\right)^3+10\left(\tfrac{1}{2}\right)^4+10\left(\tfrac{1}{2}\right)^5+10\left(\tfrac{1}{2}\right)^6+10\left(\tfrac{1}{2}\right)^7=$$

$$10\left[\tfrac{1}{2}+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(\tfrac{1}{2}\right)^3+\left(\tfrac{1}{2}\right)^4+\left(\tfrac{1}{2}\right)^5+\left(\tfrac{1}{2}\right)^6+\left(\tfrac{1}{2}\right)^7\right]=$$

$$10\times\frac{2^6+2^5+2^4+2^3+2^2+2+1}{2^7}=10\times\frac{127}{128}\approx 9,9.$$

Logo em 7 dias ela percorreu, aproximadamente $9,9\,m$. Em geral, depois de n dias a pulga terá percorrido

$$10\left(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$$

Para calcular a soma acima, note que $\left(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$ é a soma dos n termos de uma progressão geométrica cujo primeiro termo é $a_1=1/2$ e a razão é $q=1/2$. A fórmula para essa soma é:

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{1/2(1-1/2^n)}{1-1/2}=1-\frac{1}{2^n}.$$

Logo, $10\left(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=10\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$.

Portanto, ao final do décimo dia a pulga terá percorrido $10(1-\frac{1}{2^{10}})m$.

A pulga estará a menos de $0,001$m do final do caminho, quando ela já tiver percorrido pelo menos $10-0,001=9,999$, ou seja quando

$$10\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\geq 9,999.$$

Vamos determinar o menor valor de n que satisfaz a desigualdade acima.

$$10\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\geq 9,999 \implies 10-\frac{10}{2^n}\geq 9,999 \implies 10-9,999\geq\frac{10}{2^n}$$

$$\implies 0,001\geq\frac{10}{2^n} \implies 2^n\geq\frac{10}{0,001} \implies 2^n\geq 10000.$$

Agora,

$$2^{10}=2^5\times 2^5=32\times 32=1024\,,$$

segue que

$$2^{13}=2^{10}\times 2^3=1024\times 8=8192$$

Logo, devemos ter $n=14$.

5. ***Uma soma alternada -***

Solução 1: Lembre que

$$(-1)^{n+1}=\begin{cases}1 & \text{se } n \text{ é ímpar}\\ -1 & \text{se } n \text{ é par}\end{cases}$$

Observemos que associando duas a duas parcelas consecutivas,

$$(1-2)+(3-4)+(5-6)+\cdots$$

obtemos uma soma de n parcelas todas iguais a -1. Logo,

$$S_{1992} = \underbrace{(1-2)+(3-4)+(5-6)+\cdots+(1991-1992)}_{1992\div 2=996 \text{ parcelas}} = (-1)\times 996 = -996.$$

$$S_{1993} = (1-2)+(3-4)+(5-6)+\cdots+(1991-1992)+1993 = -996+1993 = 997.$$

Assim, $S_{1992} + S_{1193} = -996 + 997 = 1$. A opção correta é (d).

Solução 2: Note que

$$S_{2n} = \underbrace{(1-2)+(3-4)+(5-6)+\cdots+[2n-(2n+1)]}_{n \text{ parcelas iguais a } -1}$$

Obtemos que $S_{2n} = -n$ e $S_{2n+1} = S_{2n} + (2n+1) = -n + 2n + 1 = n + 1$. Logo, $S_{2n} + S_{2n+1} = 1$.

6. ***O raio da circunferência -***

Solução 1: Se o raio é r então o comprimento de um arco de θ graus é $2\pi\frac{\theta}{360}r$. Assim, no problema dado, temos que

$$2\pi\frac{300}{360}r = 2000\,m \Longrightarrow r = 2000 \times \frac{3}{5\pi} \simeq 382,17\,m.$$

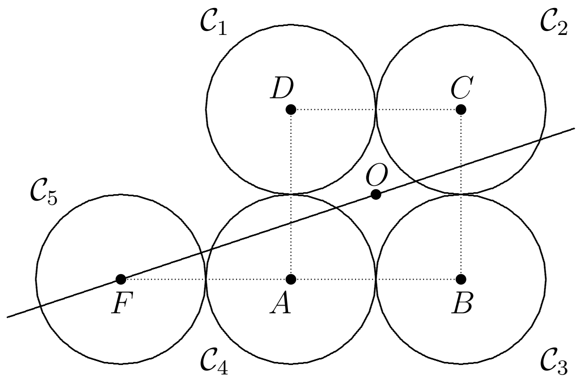
Logo, a opção correta é (c).

Solução 2: Como a circunferência tem 360°, um arco de 300° representa $\frac{5}{6}$ da circunferência, logo, seu comprimento é $\frac{5}{6}$ do comprimento da circunferência, isto é:

$$\frac{5}{6} \times 2\,\pi\,r = 2\,000\,m \Longrightarrow r = \frac{2\,000\times 6}{10\,\pi} = \frac{1\,200}{\pi} \approx 382,17\,m.$$

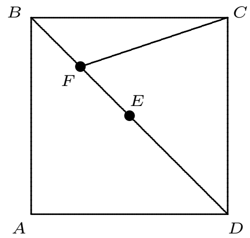
7. ***Quatro passageiros -*** O passageiro que quer ficar na janela tem 3 possíveis lugares para se sentar, o seguinte pode-se sentar em qualquer lugar livre, logo tem 3 possíveis lugares, o seguinte dois possíveis lugares, e o último não tem escolha. Concluímos que o número de formas de se sentar é $3 \times 3 \times 2 = 18$.

8. ***Os cinco círculos -*** Observemos que qualquer linha que passe por O, o centro do quadrado $ABCD$, divide a área formada pelos círculos $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ e $\mathcal{C}_4$ na metade. Por outro lado, qualquer linha reta que passe por F divide a área do circulo $\mathcal{C}_5$ na metade. Assim, a reta procurada é a reta FO.



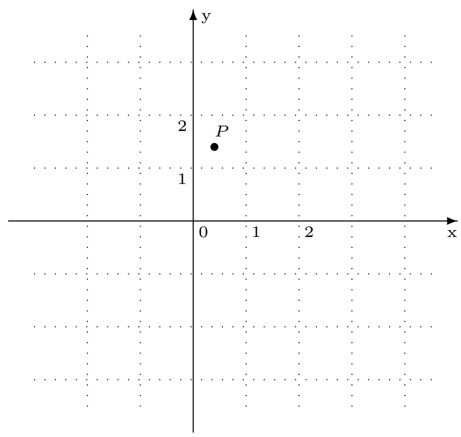
Lista 2

1. ***O triângulo e o quadrado -*** Na figura $ABCD$ é um quadrado cujo lado mede $1\,cm$, E é o ponto médio da diagonal BD e F o ponto médio do segmento BE. Qual é a área do triângulo $\triangle BCF$?



2. ***Uma refeição -*** Um sanduíche e um prato de refeição custam em média $R\$\,5,00$ e $R\$\,7,00$, respectivamente. De quantas maneiras pode-se comprar sanduíches e pratos de refei ção com $R\$\,90,00$, sem deixar troco?

3. ***Plano Cartesiano -*** O ponto $P = (a, b)$ está marcado na figura ao lado. Marque os pontos:



   (a) $A = (a/2, b + 1)$

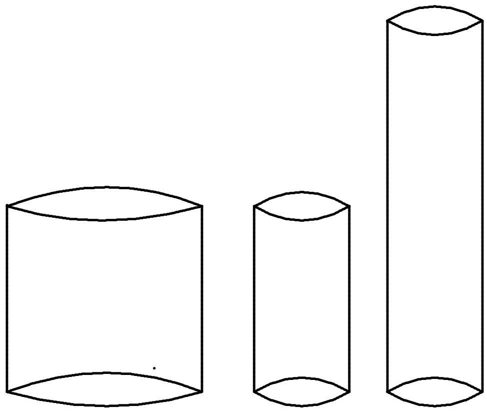
   (b) $B = (a - 1, b/2)$

   (c) $C = (-a, -b)$

   (d) $D = (1 - a, b - 1)$

4. ***Soma dos terminados em 9 -*** A soma $S_n = 9 + 19 + 29 + 39 + \cdots + a_n$ denota a soma dos primeiros n números naturais terminados em 9. Qual é o menor valor de n para que S_n seja maior do que 10^5?

5. ***Três cilindros -*** Três cilindros têm alturas e raios das bases iguais a 10cm $\times$ 10cm , 10cm $\times$ 5cm e 20cm $\times$ 5 cm, e volumes V_1, V_2 e V_3, respectivamente.



(a) Escreva em ordem crescente os volumes V_1, V_2 e V_3 dos três cilindros.

(b) Dê as dimensões de um cilindro V_4 cujo volume esteja entre V_2 e V_3.

(c) Dê as dimensões de um cilindro V_5 cujo volume esteja entre V_1 e V_3.

6. ***Percentagem de mortalidade -*** Se 15% dos membros de uma população afetados por uma doença 8% morreram, a percentagem da mortalidade em relação à população inteira é:

(a) $1,2\%$ (b) $1,8\%$ (c) 8% (d) 12% (e) 23%

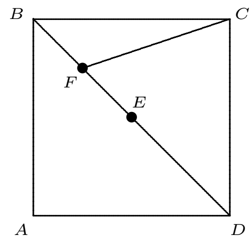
7. ***Agenda de aulas -*** Eliane quer escolher o seu horário para a natação. Ela quer ir a duas aulas por semana, uma de manhã e a outra de tarde, não sendo no mesmo dia nem em dias seguidos. De manhã, há aulas de natação de segunda-feira a sábado, às $9\,h$, às $10\,h$ e às $11\,h$ e de tarde, de segunda-feira a sexta-feira, às $17\,h$ e às $18\,h$. De quantas maneiras distintas pode Eliane escolher o seu horário?

8. ***Jogo de cartas -*** Um grupo de amigos disputa um jogo que consiste em mover sucessivamente a carta superior de uma pilha e colocá-la sobre uma

outra pilha, até obter 4 novas pilhas que são da forma: na Pilha 1 só tem Áses, na Pilha 2 só tem Valetes, na Pilha 3 só tem Damas e na Pilha 4 só tem Reis. Ganha o jogo quem fizer o menor número de movimentos. Qual é o número de movimentos que será sempre o vencedor?

Pilha 1	Pilha 2	Pilha 3	Pilha 4
Rei de ♡	Dama de ♡	Rei de □	Valete de ♠
Dama de □	Ás de □	Valete de ♡	Rei de ♠
Valete de □	Ás de ♡	Dama de ♠	Ás de ♠
Ás de ♣	Valete de ♣	Dama de ♣	Rei de ♣

Soluções da Lista 2



1. ***O triângulo e o quadrado -*** As diagonais do quadrado $ABCD$ dividem o quadrado em 4 triângulos iguais, logo a área do triângulo $\triangle BCE$ é

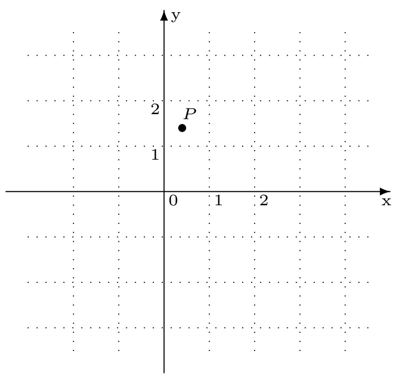
$$1 \div 4 = 0,25\,cm^2\,.$$

Como o comprimento de BF é a metade de BE e a altura relativa aos lados BF e BE é CE, então a área do triângulo $\triangle CBF$ é a metade da área do triângulo $\triangle CBE$. Assim, a área de dito triângulo é $0,25 \div 2 = 0,125\,cm^2$.

2. ***Uma refeição -*** Se S corresponde ao n úmero de sanduíches e P o número de pratos de refeição, então $5S + 7P = 90$. Precisamos encontrar soluções inteiras P e Q para essa equação. Temos:

$$5S + 7P = 90 \implies P = \frac{90 - 5S}{7} = 5 \times \frac{18 - S}{7}.$$

Como P é um número natural temos que 7 tem que dividir $18-S$, assim $S = 4$, 11 ou 18, e em cada um destes casos P é igual a 10, 5 e 0, respectivamente. Portanto, temos somente três formas de fazer a compra.



3. ***Plano Cartesiano -*** As coordenadas do ponto P satisfazem:

$$0 < a < 1$$

e

$$1 < b < 2\,.$$

Lembremos três propriedades de desigualdades:

(i) Uma desigualdade não se altera se somarmos (ou subtrairmos) um mesmo número a ambos os seus membros: $x < y \Longrightarrow x + z < y + z$.

(ii) Uma desigualdade não se altera se multiplicarmos por um número positivo ambos os seus membros: $x < y \Longrightarrow xz < yz, \quad z > 0$.

(iii) Uma desigualdade inverte o seu sentido se multiplicarmos por um número negativo ambos os seus membros: $x < y \Longrightarrow xz > yz, \quad z < 0$.

Assim temos:

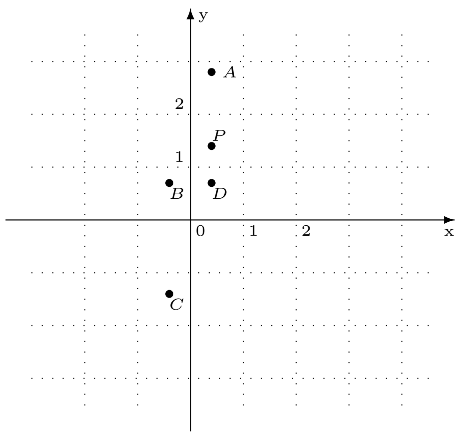
(a) $0 < a/2 < 1/2 \quad \text{e} \quad 1 + 1 < b + 1 < 2 + 1$;

(b) $-1 < a - 1 < 0 \quad \text{e} \quad 1/2 < b/2 < 1$;

(c) $-1 < -a < 0 \quad \text{e} \quad -2 < -b < -1$;

(d) $0 < 1 - a < 1 \quad \text{e} \quad 0 < b - 1 < 1$.

A figura mostra os pontos no Plano Cartesiano.



4. ***Soma dos terminados em 9 -*** Note que S_n é a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética cujo primeiro termo é $a_1 = 9$ e a razão

é $r = 10$. Substituindo esses dados na fórmula $a_n = a_1 + (n-1)r$ obtemos $a_n = 9 + 10(n-1)$. Por outro lado, note que:

$$\begin{aligned}
9 &= 9 + 0 \cdot 10 \\
19 &= 9 + 1 \cdot 10 \\
29 &= 9 + 2 \cdot 10 \\
39 &= 9 + 3 \cdot 10 \\
\cdots & \\
a_n &= 9 + (n-1) \cdot 10
\end{aligned}$$

Então temos:

$$\begin{aligned}
S_n &= 9 + 19 + 29 + \cdots + a_n \\
&= (9+0) + (9+10) + (9 + 2 \cdot 10) + \cdots + [9 + (n-1) \cdot 10] \\
&= 9n + [1 \cdot 10 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 10 + \cdots + (n-1) \cdot 10] \\
&= 9n + [1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)] \cdot 10 \\
&= 9n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 10 \\
&= 9n + 5 \cdot n(n-1) \\
&= 5n^2 + 4n
\end{aligned}$$

Como queremos que $S_n \geq 10^5$ então precisamos encontrar o menor valor inteiro positivo n tal que $5n^2 + 4n \geq 10^5$, ou equivalentemente, $5n^2 + 4n - 10^5 \geq 0$. Resolvendo a equação $5x^2 + 4x - 10^5 = 0$ temos que

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 20 \cdot 10^5}}{10}.$$

A raiz positiva é $x_1 = \dfrac{-4 + \sqrt{16 + 20 \cdot 10^5}}{10} \simeq 141,02$.

Mas, $5x^2 + 4x - 10^5$ é positiva fora das raízes. Como estamos procurando o menor número positivo e inteiro tal que $5x^2 + 4x - 10^5 \geq 0$, então $n = 142$.

5. ***Três cilindros -***

(a) Dado que o volume de um cilindro de raio R e altura h é $\pi R^2 h$ temos que os volumes V_1, V_2 e V_3 são:

$$V_1 = \pi \times 10^3 = 1000\pi \ , \ V_2 = \pi \times 5^2 \times 10 = 250\pi \ , \ V_3 = \pi \times 5^2 \times 20 = 500\pi$$

Assim, temos então que $V_1 > V_3 > V_2$.

(b) Como os dois cilindros têm o mesmo raio, basta manter o raio do cilindro com $5\,cm$ e a altura entre $10\,cm$ e $20\,cm$, por exemplo: $h = 15\,cm$. Neste caso, o volume V_4 é: $\pi \times 5^2 \times 15 = 375\pi\,cm^3$.

(c) Para construir um cilindro de volume V_5 entre V_1 e V_3, podemos diminuir o raio do cilindro de volume V_5 para $8\,cm$ e tomar como altura $10\,cm$, a menor das duas alturas, obtendo um cilindro de volume $\pi \times 8^2 \times 10 = 640\pi\,cm^3$.

6. ***Percentagem de mortalidade -*** A proporção de população que fica doente pela enfermidade é $\frac{15}{100}$ e dos que ficam doentes, a proporção que morre é $\frac{8}{100}$. Logo, a proporção de população que morre pela doença é $\frac{15}{100} \times \frac{8}{100}$, que corresponde a

$$\frac{15 \times 8}{100^2} = \frac{120}{10000} = \frac{12}{1000} = \frac{1,2}{100} = 1,2\%.$$

A opção correta é (a).

7. ***Agenda de aulas -*** Se a aula da manhã é segunda ou sexta (em qualquer dos três horários), então o dia da aula de tarde pode ser escolhida de 3 formas diferentes (em qualquer dos dois horários), assim temos $2 \times 3 \times 3 \times 2 = 36$ formas diferentes de escolher o horário. No caso em que a aula de manhã seja sábado então o dia da aula da tarde pode ser qualquer dia de segunda a quinta, assim temos $3 \times 4 \times 2 = 24$ possíveis formas. Por último, se a aula da manhã

é terça, quarta ou quinta, então a aula da tarde só pode ser escolhida de duas formas, assim temos $3 \times 3 \times 2 \times 2 = 36$ formas. Logo a Eliana pode escolher seu horário de $36 + 24 + 36 = 96$ formas distintas.

8. ***Jogo de Cartas -*** A estratégia abaixo permite realizar o jogo com 17 movimentos.

O primeiro número indica a pilha sobre a qual a carta é tomada e o segundo a pilha onde a carta é colocada, por exemplo: Movimento 1= pegar a carta superior na Pilha 4 e colocar na Pilha 2.

(1) 4 sobre 2	(2) 4 sobre 3	(3)4 sobre 2	(4) 3 sobre 4	(5) 3 sobre 4
(6) 1 sobre 4	(7) 3 sobre 4	(8)1 sobre3	(9) 1 sobre 4	(10) 2 sobre 1
(11) 2 sobre 4	(12) 2 sobre 3	(13)2 sobre1	(14) 2 sobre 1	(15) 4 sobre2
(16) 4 sobre 2	(17) 4 sobre 2			

O movimento 2 poderia ser também 4 sobre 1, o movimento 4 poderia ser 1 sobre 4, o movimento 5 poderia ser 1 sobre 4, o movimento 6 poderia ser 3 sobre 4. Os movimentos 4, 5 e 6 poderiam ser permutados em qualquer ordem. Teríamos assim, pelo menos, seis maneiras de se realizar o jogo com 17 movimentos.

Esse jogo pode ser realizado com um número menor de movimentos?

Lista 3

1. ***Frações inteiras -*** Quantos números inteiros positivos n existem tais que $\dfrac{2n^2+4n+18}{3n+3}$ é um inteiro?

2. ***Quatro prefeitos e um círculo -*** Quatro prefeitos decidem construir uma rodovia circular que passe em suas cidades, entretanto, as quatro cidades não estão sobre um mesmo círculo. Eles contratam uma empresa para elaborar um projeto para a construção da rodovia circular eqüidistante das quatro cidades. Qual o maior número de projetos geograficamente distintos que a empresa elaborou?

3. ***Fatoriais -*** Se n é um número natural, denotamos por $n!$ o produto de todos os inteiros de 1 a n. Por exemplo: $5! = 1\times 2\times 3\times 4\times 5$ e $13! = 1\times 2\times 3\times 4\times 5\times \ldots\times 12\times 13$. Por convenção, $0! = 1$. Encontre três números inteiros diferentes a, b e c, entre 0 e 9 tais que o número de tr ês algarismos $a\,b\,c$ é igual a $a!+b!+c!$.

4. ***Para a escola de bicicleta -*** Cátia sai da escola todos os dias no mesmo horário e volta para casa de bicicleta. Quando ela pedala a $20km/h$, ela chega em casa às $4:30$ horas da tarde. Se ela pedalar a $10km/h$, ela chega em casa às $5:15$ horas da tarde. A qual velocidade ela deve pedalar para chegar em casa às $17:00$ horas?

5. ***O Riquinho -*** Riquinho distribuiu $R\$\,1000,00$ reais entre os seus amigos: Antônio, Bernardo e Carlos da seguinte maneira: deu, sucessivamente, 1 real

ao Antônio, 2 reais ao Bernardo, 3 reais ao Carlos, 4 reais ao Antônio, 5 reais ao Bernardo, etc. Quanto que o Bernardo recebeu?

6. ***Retângulo com dimensões inteiras -*** As diagonais de um retângulo medem $\sqrt{1993}\,cm$. Quais são suas dimensões, sabendo que elas são números inteiros?

7. ***Múltiplos de 3 e quadrados perfeitos -*** Escreve-se em ordem crescente cada múltiplo de 3 cuja soma com o número 1 é um quadrado perfeito:

$$3 \quad ; \quad 15 \quad ; \quad 24 \quad ; \quad 48 \quad ; \quad \ldots$$

Qual é o múltiplo na posição 2006º?

8. ***Cinco cartas -*** As cinco cartas abaixo estão sobre uma mesa, e cada uma tem um número numa face e uma letra na outra. Simone deve decidir se a seguinte frase é verdadeira: *"Se uma carta tem uma vogal numa face, então ela tem um número par na outra."* Qual o menor número de cartas que ela precisa virar para decidir corretamente?

$$\boxed{\mathbf{2}} \quad \boxed{\mathbf{3}} \quad \boxed{\mathbf{M}} \quad \boxed{\mathbf{A}} \quad \boxed{\mathbf{E}}$$

Soluções da Lista 3

1. ***Frações inteiras -*** Como

$$\frac{2n^2+4n+18}{3n+3} = \frac{2}{3}\frac{(n^2+2n+1)+8}{n+1} = \frac{1}{3}\left(2n+2+\frac{16}{n+1}\right),$$

segue que $n+1$ tem que dividir 16. Assim, n tem que pertencer ao conjunto $\{1,3,7,15\}$. Em cada um destes casos temos

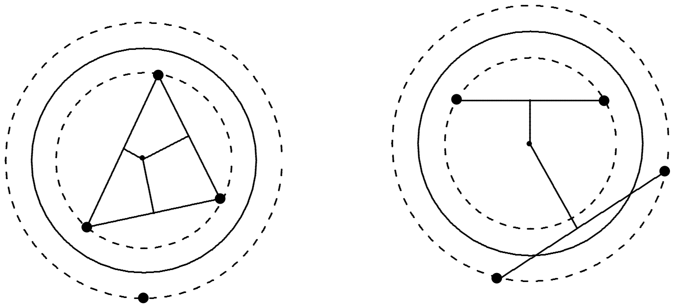
n	$\frac{2n^2+4n+18}{3n+3}$
1	4
3	4
7	6
15	11

Portanto para os quatro valores de n, 1, 3, 7 e 11, tem- se que $\dfrac{2n^2+4n+18}{3n+3}$ é um inteiro.

2. ***Os prefeitos e o círculo -*** O número de rodovias é igual ao número de pontos que podem ser centros da circunferência formada pelas rodovias.

Observemos por outra parte que podemos ter dois tipos de configuração. Na primeira configuração a circunferência divide o conjunto das 4 cidades em dois conjuntos: um conjunto com 3 cidades e outro com una cidade. Na segunda configuração a circunferência divide o conjunto das cidades, em dois conjuntos, cada um deles com 2 cidades.

Nas figuras abaixo está ilustrado um exemplo de cada um destas configurações onde a circunferência contínua é a rodovia planejada.



Na primeira configuração temos que o centro da circunferência está na mesma distância das três cidades que ficam do mesmo lado da rodovia e assim o centro desta rodovia é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo formado pelas três cidades. Logo, o número de rodovias é igual ao número de triângulos que podemos formar com as 4 cidades, isto é, 4 possíveis rodovias.

Na segunda configuração, temos que o centro da circunferência formada pela rodovia esta sobre a mediatriz das duas cidades que ficam na parte interna da rodovia e também sobre a mediatriz das duas cidades que ficam na parte externa da rodovia. Assim, o número de rodovias é igual ao número de formas de dividir o conjunto de 4 elementos em dois conjuntos com 2 elementos cada um, isto é 3 formas.

Logo o número possível de projetos é $4 + 3 = 7$.

3. ***Fatoriais -*** Primeiramente observe que como o n úmero tem 3 algarismos, então o maior dos algarismos tem que ser menor que ou igual a 6, já que $7! > 1000$. Como o número tem que ter 3 algarismos e $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 12$ então um dos algarismos tem que ser 5 ou 6, mas $6! = 720$ implicaria que a soma teria um algarismo maior ou igual a 7, logo o maior dos algarismos é 5. Por outra parte, $5! = 120$ e $5! + 4! + 3! = 120 + 24 + 6 = 150$, assim a soma dos fatoriais está entre 100 e 150, portanto o algarismo das centenas é 1. Por último como $5! + 1! + 4! = 145$, então 145 é solução.

4. ***Para a escola de bicicleta -*** Seja t o tempo que ela gasta pedalando a $20km/h$. Pedalando a 10 km/h, ela faz o percurso no dobro do tempo que pedalando a 20km/h, isto é $2t$. No entanto, como ela demora 45 minutos a mais temos:

$$2t - t = 45 \implies t = 45min.$$

Logo, diariamente ela sai da escola às

$$4:30\,h - 45\,min = 3:45\,h$$

e o percurso até em casa é de

$$45min \times 20km/h = \frac{3}{4} \times 20 = 15km\,.$$

Para percorrer $15km$ em $5:00\,h - 3:45\,h = 1:15\,h = \frac{5}{4}h$, ela deve manter uma velocidade de

$$\frac{15km}{\frac{5}{4}h} = 12km/h.$$

5. ***O Riquinho -*** O dinheiro foi repartido em parcelas na forma

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n \leq 1000.$$

Como $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ é a soma S_n dos n primeiros números naturais a partir de $a_1 = 1$ temos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(1+n)n}{2} \leq 1000 \implies n^2 + n - 2000 \leq 0.$$

Temos que

$$n^2 + n - 2000 < 0 \quad \text{para valores de } n \text{ entre as raízes}\,.$$

Como a solução positiva de $n^2 + n - 2000 = 0$ é

$$n = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8000}}{2} \simeq 44,22\,,$$

então $n \leq 44$. Assim Bernardo recebeu

$$2+5+8+11+\cdots+44=\frac{(44+2)\cdot 15}{2}=23\cdot 15=345.$$

6. ***Retângulo com dimensões inteiras -*** Se $a \geq b$ são os comprimentos dos lados do retângulo, então pelo teorema de Pitágoras temos

$$a^2+b^2=1993\,.$$

Como $a^2 \geq b^2$, segue que

$$2a^2 \geq a^2+b^2=1993>a^2\,.$$

Logo,

$$\sqrt{1993}>a \geq \sqrt{996,5}\,.$$

Assim, $44 \geq a \geq 32$. Usando o fato que $a^2-(a-1)^2=2a-1$ podemos completar a seguinte tabela, somando aos elementos da segunda coluna na linha $a-1$ o número $2a-1$ para obter o elemento da segunda coluna na linha a.

a	$b^2=1993-a^2$
44	57
43	144
42	229
$\vdots$	$\vdots$

Assim, temos que $a=43$ e $b=12$ é solução.

7. ***Múltiplos de 3 e quadrados perfeitos -*** Chamemos a um número qualquer da lista, então sabemos que:

- a é múltiplo de 3
- $a+1$ é um quadrado: $a+1=k^2$, sendo k um número natural.

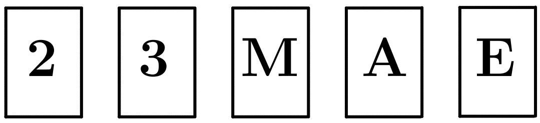
Assim $a=k^2-1$, e logo

$$a=(k-1)(k+1)$$

Como a é divisível por 3, então ou $k+1$ ou $k-1$ é divisível por 3. Logo, k não é divisível por 3, portanto, k tem que ser da forma $3n+1$ ou $3n+2$, ou seja para cada valor de n temos dois números que não são múltiplos de 3.

O número desta lista que está na posição 2006 é $2006 \times \frac{3}{2} - 1 = 3008$, e neste caso $a=3008^2-1$.

8. ***Cinco cartas -***



Ela não precisa virar a carta que tem o número **2**, porque sendo vogal ou consoante, ela cumpre a condição, de igual forma. Ela também não precisa virar a carta com a letra **M**. A carta que tem o número **3** tem que ser virada, para comprovar que na outra face tem uma consoante, e também as cartas com a letra **A** e a letra **E** têm que ser viradas para verificar que os números na outra face são pares. Assim, ela precisa virar somente 3 cartas.

Lista 4

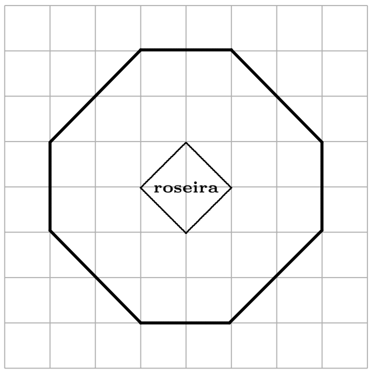
1. ***Lucro de uma companhia -*** Uma companhia tem um lucro de 6% nos primeiros $R\$\,1000,00$ reais de venda diária, e 5% em todas as vendas que excedem $R\$\,1000,00$ reais, nesse mesmo dia. Qual é o lucro dessa companhia num dia que as vendas alcançam $R\$\,6000,00$ reais?

   (a) $R\$250$ (b) $R\$300$ (c) $\$310$ (d) $R\$320$ (e) $R\$360$

2. ***Seqüência triangular -*** Qual é o 21º termo da seqüência

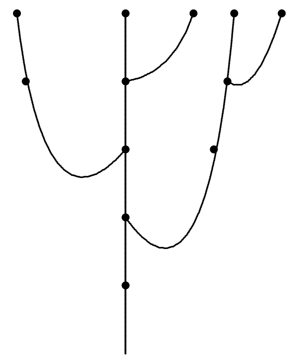
$$1\ ;\ 2+3\ ;\ 4+5+6\ ;\ 7+8+9+10\ ;\ 11+12+13+14+15\ ;\ \ldots ?$$

3. ***O jardim octogonal -*** A figura mostra a planta de um jardim de uma cidade, feita num papel quadriculado. O jardim tem a forma de um polígono de oito lados com uma roseira quadrada no centro, cercada de grama. A área total do jardim é de $700\,m^2$. Para colocar uma cerca em volta do jardim e da roseira, o prefeito dispõe de no máximo $R\$650,00$. Qual o maior preço que ele poderá pagar pelo metro de cerca?



4. ***Número de caracteres -*** Numa folha de papel cabem 100 caracteres na largura e 100 na altura. Nessa folha são escritos sucessivamente os números $1, 2, 3, \ldots$ com um espaço entre cada um. Quando no final de uma linha não há espaço para escrever um número este é escrito na linha seguinte. Qual é o ultimo número escrito na folha?

5. ***A árvore de Emília -*** A árvore de Emília cresce de acordo com a seguinte regra: após 2 semanas do aparecimento de um galho, esse mesmo galho produz um novo galho a cada semana, e o galho original continua a crescer. A árvore tem 5 galhos depois de 5 semanas, como mostra a figura. Quantos galhos, incluindo o galho principal a árvore terá no final de 8 semanas?



6. ***Um teste vocacional -*** Foi feito um teste vocacional em 1000 estudantes de uma escola. A tabela a seguir apresenta os resultados por área de estudo e sexo.

	Exatas	Humanas	Biológicas
Masculino	232	116	207
Feminino	112	153	180

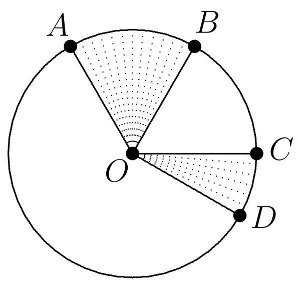
Se um aluno é escolhido ao acaso, determine a probabilidade de:

(a) Ser da área de exatas.

(b) Ser da área de humanas, sendo do sexo masculino.

(c) Ser do sexo feminino, dado que é da área biológica.

7. ***Dois setores circular -*** A área do círculo da figura ao lado mede $20\,cm^2$. Se $\widehat{AOB} = 60°$ e $\widehat{COD} = 30°$, quanto mede a área da região do círculo que está tracejada?



8. ***Compra de televisores -*** Maria encomendou certo número de televisores a $R\$\,1\,994,00$ cada um. Ela reparou que no total a pagar, não tem nem 0, nem 7, nem 8 e nem 9. Qual foi o menor número de televisores que ela encomendou?

Soluções da Lista 4

1. ***Lucro de uma companhia -*** (c) Nos primeiros $R\$\,1000$ reais a companhia tem lucro de $R\$\,60$ reais, e para os $R\$\,5000$ reais restantes tem lucro de $5000 \times 5\% = 250$ reais. Logo o lucro da empresa nesse dia é $R\$\,310$ reais.

2. ***Seqüência triangular -*** Observe que o $21^{\underline{o}}$ termo é a soma de 21 números consecutivos. Tomando a primeira parcela de cada termo, isto é, 1,2,4,7,11, $16, \ldots$, temos que

$$\begin{aligned} 2 &= 1+1 \\ 4 &= 2+1+1 \\ 7 &= 3+2+1+1 \\ 11 &= 4+3+2+1+1 \\ 16 &= 5+4+3+2+1+1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

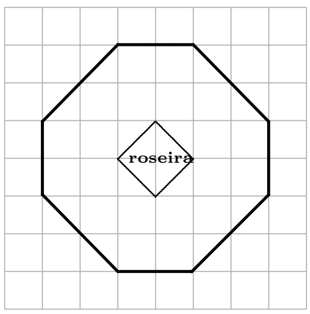
Assim, a primeira parcela do $21^{\underline{o}}$ termo é

$$20+19+\cdots+3+2+1+1 = \frac{20\times 21}{2}+1 = 211$$

e o $21^{\underline{o}}$ termo é

$$211+212+\cdots+230+231 = \frac{(211+231)\times 21}{2} = 221\times 21 = 4641.$$

3. ***O jardim octogonal -*** Observemos que a área do jardim pode ser medida contando o número de quadradinhos na folha. De fato, se contarmos o número de quadrados obtemos em total



$$24 \text{ quadradinhos } + 8 \text{ meios quadradinhos} = 28 \text{ quadradinhos}$$

Como a área total é $700\,m^2$, a área de cada quadradinho corresponde a

$$700 \div 28 = 25\,m^2.$$

Assim, o lado de cada quadradinho corresponde a $5\,m$. Pelo Teorema de Pitágoras, a diagonal d de cada quadradinho corresponde a $d = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}\,m$.

O contorno da roseira é formado por 4 diagonais e do jardim por 8 diagonais e 8 lados, logo temos:

$$\text{perímetro da roseira } = 4 \times d = 4 \times 5\sqrt{2} = 20\sqrt{2}\,m$$

$$\text{perímetro do jardim} = 8 \times 5 + 8 \times d = 40 + 40\sqrt{2}$$

Logo, o comprimento total de cerca que será necessário é

$$20\sqrt{2} + 40 + 40\sqrt{2} = 40 + 60\sqrt{2}\,m$$

Agora temos:

$$\frac{650}{40 + 60\sqrt{2}} = \frac{65}{4 + 6\sqrt{2}} \approx \frac{65}{4 + 6 \times 1,414} = \frac{65}{12,484} \approx 5,21.$$

Assim, o preço máximo que o prefeito poderá pagar é $R\$5,21$.

4. ***Número de caracteres -*** Na 1ª linha escrevemos os números de 1 a 9, cada um seguido de um espaço, ocupando 18 espaços, e sobram 82 espaços. Cada número de 2 algarismos mais um espaço ocupa 3 lugares na linha. Como

$82 = 27 \times 3 + 1$, completamos a $1^{\underline{a}}$ linha com 27 números de dois algarismos a partir do 10. Logo o último número da primeira linha é 36. Representando cada espaço por um traço, a $1^{\underline{a}}$ linha fica como

$$\underbrace{1-2-3-4-5-6-7-8-9-}_{18}\underbrace{10-\cdots-36-}_{82}$$

Como $100 = 33 \times 3 + 1$, em cada linha podemos colocar 33 números de 2 algarismos, cada um seguido de um espaço, e no final da linha ainda sobra um espaço:

$$2^{\underline{a}}\text{linha}: \underbrace{37-38-\cdots-69-}_{99}-$$

Na $3^{\underline{a}}$ linha, colocamos de 70 a 99, ocupando $30 \times 3 = 90$ espaços. Os 10 espaços restantes ocupamos com dois números de 3 algarismos:

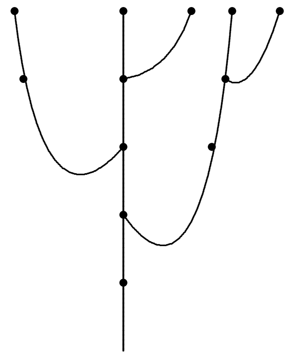
$$3^{\underline{a}}\text{linha}: \underbrace{70--\cdots-99-}_{90}\underbrace{100-101-}_{8}--$$

Agora, em cada linha podemos colocar $100 \div 4 = 25$ números de 3 algarismos com seus respectivos espaços. De 102 a 999 inclusive temos $999-102+1 = 198$ números. Como $198 = 25\times7+23$, ocupamos da $4^{\underline{a}}$ a $10^{\underline{a}}$ linha com os números de 3 algarismos e ainda sobram 23 espaços na $10^{\underline{a}}$ linha, que podemos ocupar com $23 \div 5 = 4$ números de 4 algarismos:

$$10^{\underline{a}}\text{linha}: \underbrace{--\cdots-999-}_{67}\underbrace{1000-1001-1002-}_{23}---$$

Em cada linha podemos colocar $100 \div 5 = 20$ números de 4 algarismos e seus respectivos espaços. Portanto, nas 90 linhas restantes podemos colocar $90 \times 20 = 1800$ números de 4 algarismos. Começando com 1003 chegaremos até o número 2802.

5. ***A árvore de Emília -*** Denotemos por f_n o número de galhos da árvore depois de n semanas. Como depois de duas semanas aparece um galho então $f_2 = 1$, Na seguinte semana este galho produz um novo galho, logo $f_3 = 2$. Pela regra, o número de galhos na $n+1$-ésima semana é igual ao número de galhos que existiam na n-ésima semana, mais os galhos novos. Mas, os galhos novos nascem dos galhos que têm pelo menos duas semanas, isto é, nasce um galho novo por cada galho que existia na semana $n-1$.



Assim, temos que $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$. Logo:

$$\begin{aligned} f_4 &= 2+1=3 \\ f_5 &= 3+2=5 \\ f_6 &= 5+3=8 \\ f_7 &= 8+5=13 \\ f_8 &= 13+8=21 \end{aligned}$$

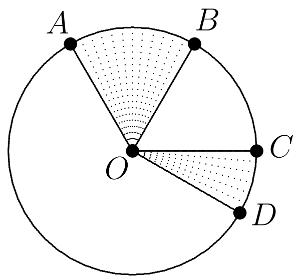
6. ***Um teste vocacional -***

(a) De exatas temos $232 + 112 = 344$ estudantes, logo a probabilidade de escolher ao acaso um aluno de exatas é $\frac{344}{1000} = 0,344$.

(b) Como o número de estudantes do sexo masculino é 555, temos que a probabilidade de ser da área de humanas é $\frac{116}{555} = 0,209$.

(c) O número de estudantes da área biológica é 387. Assim, a probabilidade de escolher um do sexo feminino é $\frac{180}{387} = 0,465$.

7. ***Dois setores circular -*** Como



$$60^\circ + 30^\circ = 90^\circ\,,$$

segue que área tracejada representa um quarto da área total del círculo. Como a área do circulo é $20\,cm^2$ então a área tracejada é $5\,cm^2$.

8. ***Compra de televisores -*** Se Maria comprou n televisores, então ela gastou $1994n$, que é um múltiplo de 1994 onde não aparecem os algarismos 0, 7, 8 e 9. Vamos tentar limitar o valor de n. Primeiro observe que

$$1994n = 2000n - 6n$$

e também que se

$$6n < 300$$

então o número $2000n - 6n$ tem 7 ou 8 ou 9 no algarismos das centenas (faça alguns exemplos, lembre-se que $2000n$ termina com 3 zeros e depois convença-se). Assim devemos ter

$$6n \geq 300, \quad \text{isto é} \quad n \geq 50\,.$$

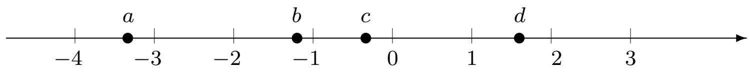
Observemos que 50 não pode ser porque o valor terminaria em 0, logo $n \geq 51$. Dado que $1994 \times 51 = 101694$ temos que n não pode ser 51 e portanto $n = 51 + m$ com m positivo. Agora como precisamos que o número não tenha 0, assim $1994m$ tem que eliminar o 0 de 101694, portanto $m \geq 4$, mas $m = 4$ não é solução porque 1994×55 termina em 0. Se testamos $n = 56$ temos que

$$1994 \times 56 = 111664$$

é o número procurado.

Lista 5

1. ***Distância entre números -*** Considere os números reais a, b, c e d representados em uma reta, conforme mostra a figura. Determine quais das afirmações são verdadeiras ou falsas.



(a) $\|a\| < 4$	(b) $\|b\| < 2$	(c) $\|c\| < 2$	(d) $\|a\| > \|b\|$
(e) $\|c\| < \|d\|$	(f) $\|a\| < \|d\|$	(g) $\|a - b\| < 4$	(h) $\|a - b\| \geq 3$
(i) $\|c - d\| < 1$	(j) $\|b - c\| < 2$	(l) $\|b - c\| > 3$	
(m) $\|c - a\| > 1$			

2. ***Cartões premiados -*** Uma loja distribui 9999 cartões entre os seus clientes. Cada um dos cartões possui um número de 4 algarismos, entre 0001 e 9999. Se a soma dos primeiros 2 algarismos for igual à soma dos 2 últimos, o cartão é premiado. Por exemplo, o cartão 0743 é premiado. Prove que a soma dos números de todos os cartões premiados é divisível por 101.

3. ***O preço da gasolina -*** Em 1972 encher o tanque de gasolina de um carro pequeno custava $R\$29,90$, e em 1992, custava $\$149,70$ para encher o mesmo tanque. Qual dos valores abaixo melhor aproxima o percentual de aumento no preço da gasolina nesse período de 20 anos?

   (a) 20% (b) 125% (d) 300% (d) 400% (e) 500%

4. ***O triângulo de latas -*** Um menino tentou alinhar 480 latas em forma de um triângulo com uma lata na $1^{\underline{a}}$ linha, 2 latas na $2^{\underline{a}}$ e assim por diante. No fim sobraram 15 latas. Quantas linhas tem esse triângulo?

5. ***Circunferência e triângulo retângulo -*** Inscreve-se uma circunferência num triângulo retângulo. O ponto de tangência divide a hipotenusa em dois segmentos de comprimentos 6cm e 7cm. Calcule a área do triângulo.

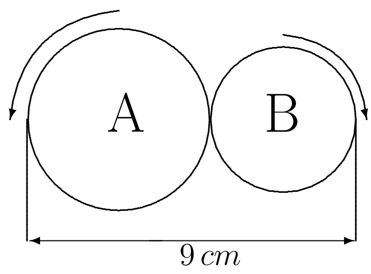
6. ***Soma de razão $\frac{1}{2}$ -*** Se $S_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$, qual é o menor número inteiro positivo n tal que $S_n > 0,99$?

7. ***Soma de raízes quadradas -***

   (a) Se $r = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, mostre que $\sqrt{6} = \dfrac{r^2 - 5}{2}$.

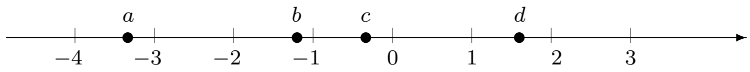
   (b) Se $s = \sqrt{215} + \sqrt{300}$, mostre que $s^2 > 1015$.

8. ***Duas rodas -*** A roda A gira com 1200 voltas por minuto, e a roda B com 1500 voltas por minuto. Calcule os raios das duas rodas.



Soluções da Lista 5

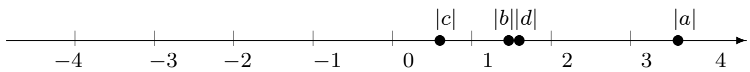
1. ***Distância entre números -***



Como os números a, b e c são negativos e c é positivo, temos que

$$|a| = -a \ , \ |b| = -b \ , \ |c| = -c \ , \ |d| = d$$

Assim, $|a|$, $|b|$ e $|c|$ são simétricos de $a\,,b$ e c em relação ao zero. No seguinte gráfico se mostram os pontos $|a|$, $|b|$, $|c|$ e $|d|$.



Note que não podemos afirmar qual entre os dois,$|b|$ e $|d|$, é o maior, as unicas comparações que podemos fazer são:

$$0 < |c| < 1 < |b| < 2 < |a| < 4 \ \text{ e } \ 0 < |c| < 1 < |d| < 2 < |a| < 4$$

Portanto, (a), (b), (c), (d) e (e) são verdadeiros e (f) é falso.

Lembre que $|x - y| =$ distância de x a y.

Como a e b estão entre -4 e -1, a distância entre eles é menor do que 3, isto é: $|a - b| < 3$, logo (g) é verdadeira e (h) é falso. Analogamente, temos:

- $1 < |c - d| < 3 \implies$ (i) é falso
- $0 < |b - c| < 2 \implies$ (j) é verdadeiro e (l) é falso
- $2 < |a - c| \implies$ (m) é verdadeiro.

2. ***Cartões premiados -*** Observe que se o cartão $abcd$ é premiado então o cartão $cdab$ também é premiado, por exemplo: 2341 e 4123 são ambos premiados. Assim sempre que $ab \neq cd$ temos dois cartões premiados cuja soma é

$$abcd + cdab = (ab \times 100 + cd) + (cd \times 100 + ab) = 101(ab + cd),$$

assim a soma desse dois cartões é divisível por 101.

No caso que o cartão ser da forma

$$abab = ab \times 100 + ab = 101 \times ab$$

o número do cartão é divisível por 101. Assim a soma de todos os cartões é divisível por 101 já que a soma pode ser feita agrupando cartões do tipo $abcd$ com $cdab$.

3. ***O preço da gasolina -*** O aumento do valor foi

$$149,70 - 29,90 = 119,80 \text{ reais},$$

que corresponde a:

$$\frac{119,80}{29,90} \times 100\% = 400,66\%.$$

A opção correta é (d).

4. ***O triângulo de latas -*** Suponhamos que o triângulo está composto por n linhas, logo foram usadas $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ latas, assim

$$480 - 15 = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \implies n^2 + n - 930 = 0.$$

Resolvendo a equação $n^2 + n - 930 = 0$, obtemos:

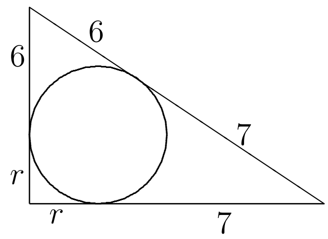
$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \times 930}}{2} = \frac{-1 \pm 61}{2}.$$

Assim, $n = 30$ que é única solução positiva desta equação. Logo o triângulo tem 30 linhas.

5. ***Circunferência e triângulo retângulo -*** Seja r o raio da circunferência inscrita. Usando o teorema de Pitágoras temos que

$(6+7)^2 = (r+6)^2 + (r+7)^2 = r^2 + 12r + 36 + r^2 + 14r + 49 = 2(r^2 + 13r) + 85,$

assim temos que $r^2 + 13r = \frac{169-85}{2} = 42.$



Por outro lado, a área do triângulo é

$$\frac{(r+6)(r+7)}{2} = \frac{r^2+13r+42}{2} = \frac{42+42}{2} = 42.$$

6. ***Soma de razão*** $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ **-** Como

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

segue que

$$\frac{1}{2}\,S_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}\,.$$

Logo,

$$\frac{1}{2}S_n = S_n - \frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Assim

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}\,.$$

Como queremos $S_n > 0,99$, isto é equivalente a encontrar o menor n tal que

$$1 - \frac{1}{2^n} > 0,99$$

e assim

$$2^n > 100\,.$$

Logo, devemos ter $n \geq 7$ porque $128 = 2^7 > 100 > 2^6 = 64$.

Observação: Outro modo de calcular S_n, é notar que é a soma de uma progressão geométrica com $a_1 = 1/2$ e razão $q = 1/2$. Aplicando a fórmula, temos:

$$S_n = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

7. ***Soma de raízes quadradas -***

(a) Como

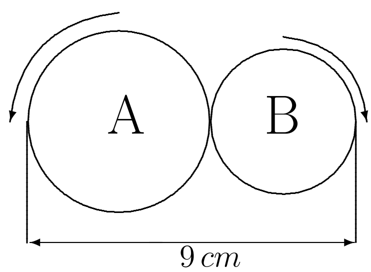
$$r^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + 2(\sqrt{2})(\sqrt{3}) + (\sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6},$$

portanto $r^2 - 5 = 2\sqrt{6} \Longrightarrow \sqrt{6} = \dfrac{r^2 - 5}{2}$.

(b) Pelo mesmo argumento temos que

$$\begin{aligned} s^2 &= (\sqrt{215} + \sqrt{300})^2 = 215 + 2\sqrt{215 \cdot 300} + 300 \\ &= 515 + 10\sqrt{43 \cdot 60} = 515 + 10\sqrt{2580} > \\ &> 515 + 10\sqrt{2500} = 515 + 500 = 1015 \end{aligned}$$

8. ***Duas rodas -*** Dos dados do problema podemos dizer que quando a roda A dá 12 voltas a roda B dá 15 voltas, ou equivalentemente, quando a roda A dá 4 voltas a roda B dá 5 voltas. Denotemos por R o raio da roda A e por r o raio da roda B.



O comprimento da roda A é $2\pi R$ e o da roda B é $2\pi r$. Logo, o comprimento de 4 voltas da roda A é $4 \times (2\pi R)$ e o comprimento de 5 voltas da roda B é

$5 \times (2\pi r)$. Como esses dois comprimentos são iguais então temos que $4R = 5r$. Por outro lado, da figura temos que $2(r + R) = 9$, assim

$$2r + 2\left(\frac{5}{4}r\right) = \left(2 + \frac{5}{2}\right) r = \frac{9}{2}r = 9,$$

portanto $r = 2$ e $R = \frac{5}{2}$.

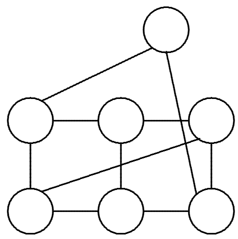
Lista 6

1. ***Dois divisores -*** O número $2^{48} - 1$ é divisível por dois números compreendidos entre 60 e 70. Quais são esses números?

   (a) 61 e 63 (b) 61 e 65 (c) 63 e 65 (d) 63 e 67 (e) 67 e 69

2. ***Rede de estações -*** Um serviço de vigilância vai ser instalado num parque na forma de uma rede de estações. As estações devem ser conectadas por linhas de telefone, de modo que qualquer uma das estações possa se comunicar com todas as outras, seja por uma conexão direta seja através de no máximo uma outra estação. Cada estação pode ser conectada diretamente por um cabo a no máximo 3 outras estações.

   O diagrama mostra um exemplo de uma rede desse tipo conectando 7 estações. Qual é o maior número de estações que podem ser conectadas dessa maneira?



3. ***Bolas brancas e pretas -*** Uma caixa tem exatamente 100 bolas pretas e 100 bolas brancas. Repetidamente, 3 bolas são retiradas da caixa e substituídas por outras bolas que estão em um saco da seguinte maneira:

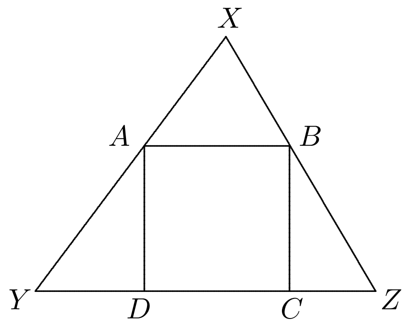
BOLINHAS REMOVIDAS		SUBSTITUÍDAS POR
3 pretas	$\Longrightarrow$	1 preta
2 pretas e 1 branca	$\Longrightarrow$	1 preta e 1 branca
1 preta e 2 brancas	$\Longrightarrow$	2 brancas
3 brancas	$\Longrightarrow$	1 preta e 1 branca

   Qual pode ser o conteúdo da caixa depois de seguidas aplicações desse procedimento?

   (a) 2 pretas (b) 2 brancas (c) 1 preta (d) 1preta e 1 branca (e) 1 branca.

4. ***O cubo -*** Alice tem uma folha de cartolina de $60\,cm$ por $25\,cm$. Ela quer cortar a folha para montar um cubo. Qual o cubo de maior volume que ela pode construir?

5. ***Um quadrado e um triângulo -*** Na figura, $ABCD$ é um quadrado cuja área é 7/32 da área do triângulo XYZ. Qual é a razão entre XA e XY?.



6. ***A urna -*** Uma urna tem 6 bolas numeradas de 1 a 6. Se duas bolas são extraídas, qual é a probabilidade da diferença entre os números dessas 2 bolas ser 1?

7. ***Soma das raízes de um equação -*** Determine a soma das raízes distintas da equação $x^2 + 3x + 2 = |x + 1|$.

8. ***Produto de três números -*** No diagrama abaixo cada círculo representa um algarismo. Preencha o diagrama colocando em cada círculo um dos algarismos de 0 a 9, utilizando cada algarismo uma única vez.

$$\boxed{\bigcirc \times \bigcirc\bigcirc \times \bigcirc\bigcirc\bigcirc = \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc}$$

Soluções da Lista 6

1. ***Dois divisores -*** Lembre que

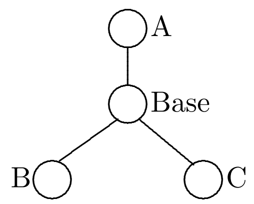
$$a^4 - 1 = (a-1)(a^3 + a^2 + a + 1)\,.$$

Logo, se $a = 2^{12}$, temos:

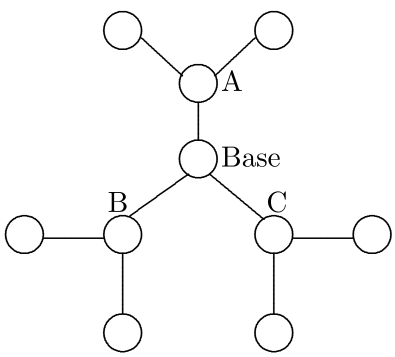
$$2^{48} - 1 = (2^{12})^4 - 1 = (2^{12} - 1)(2^{36} + 2^{24} + 2^{12} + 1)$$

e $2^{12} - 1 = (2^6 + 1)(2^6 - 1) = 65 \times 63$. A opção correta é (c).

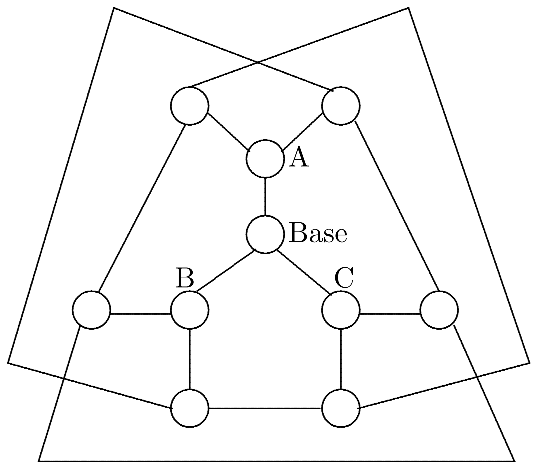
2. ***Rede de estações -*** O exemplo mostra que podemos conectar pelo menos 7 estações dentro das condições propostas. Começamos com uma estação particular, e vamos pensar nela como se fosse a base da rede. Ela pode ser conectada a 1, 2 ou 3 estações conforme mostra o diagrama.



Agora, as estações A, B e C têm ainda duas linhas não utilizadas, logo podem ser conectadas a duas outras estações como a seguir:



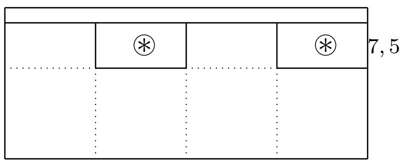
Agora, é impossível acrescentar mais estações porque qualquer outra a mais não poderia ser conectada à base satisfazendo as condições do problema. Isso mostra que não podemos ter mais do que 10 estações. Vamos agora verificar se podemos montar a rede com essas 10 estações. Observe no diagrama acima que apenas a Base é conectada a todas as outras estações (através de um cabo ou de uma conexão via uma estação). As estações que estão nos extremos ainda possuem duas linhas não utilizadas, e agora vamos usá-las para "fechar" a rede; veja o diagrama a seguir.



3. ***Bolas brancas e pretas -*** Inicialmente observe que depois de cada substituição o número de bolas brancas ou permance o mesmo ou decresce de 2. Logo o número de bolas brancas permanece par. Por outro lado, cada grupo de bolas removidas que contém pelo menos 1 bola branca é substituído por outro que também contém 1 bola branca, o número de bolas brancas nunca é zero. Agora observe que a opção (b) é a única incluindo pelo menos 2 bolas brancas, logo ela é a opção correta. Um modo de obter esse resultado é remover 3 bolas brancas 49 vezes até obter 149 pretas e 2 brancas, e depois, remover 1 preta e 2 brancas 149 vezes.

4. ***O cubo -*** Seja a a aresta do cubo que queremos construir. Como a área lateral do cubo é $6a^2$, devemos ter $6a^2 \leq 25 \times 60$, isto é $a^2 \leq 250$ e assim $a < 16$. Com $a = 15$ temos $4 = 60 \div 15$ quadrados de lado $15\,cm$ e sobra um retângulo de $60\,cm$ por $10\,cm$.

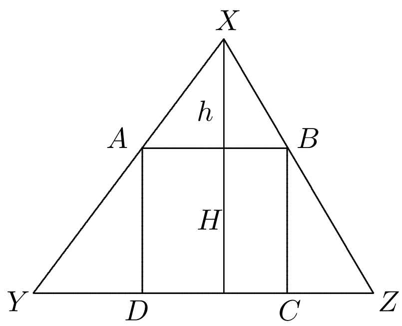
   Podemos cortar um retângulo de 60 cm por $2,5$ cm e os pedaços marcados com $\circledast$ de dimensões 15cm por $7,5$cm. Assim na figura a linha pontilhada indica dobradura e a linha continua indica corte e com os pedaços de cartolina marcados com $\circledast$ formamos a tampa.



5. ***Um quadrado e um triângulo -*** Sejam l o comprimento do lado do quadrado, h a altura do triângulo $\triangle XAB$, H a altura do triângulo $\triangle XYZ$ e b o comprimento do lado YZ.

   A área do quadrado é l^2 e a área do tri ângulo $\triangle XYZ$ é $\frac{bH}{2}$. Como os triângulos XYZ e ABC são semelhantes, temos

$$\frac{b}{l} = \frac{H}{h} = \frac{XY}{XA}.$$



   Portanto $b = \frac{Hl}{h} = \frac{(h+l)l}{h}$.

   Assim a área do triângulo $\triangle XYZ$ é: $\dfrac{bH}{2} = \dfrac{(h+l)^2 l}{2h}$ e a razão $\frac{XA}{XY}$ é

$$\frac{XA}{XY} = \frac{h}{H} = \frac{h}{h+l} = \frac{1}{1+\frac{l}{h}}.$$

Logo, basta calcular $\frac{l}{h}$.

Como a razão entre as área do triângulo $\triangle XYZ$ e a área do quadrado é $\frac{32}{7}$, então

$$\frac{\frac{(h+l)^2 l}{2h}}{l^2} = \frac{32}{7} \Longrightarrow (h+l)^2 = \frac{64}{7}hl \Longrightarrow l^2 - \frac{50}{7}hl + h^2 = 0.$$

Dividindo por h^2 obtemos a equação quadrática $(\frac{l}{h})^2 - \frac{50}{7}(\frac{l}{h}) + 1 = 0$, que tem como soluções

$$\frac{l}{h} = \frac{\frac{50}{7} \pm \sqrt{(\frac{50}{7})^2 - 4}}{2} = \frac{25 \pm \sqrt{25^2 - 7^2}}{7} = \frac{25 \pm 24}{7}.$$

Assim $\frac{l}{h}$ tem dois possíveis valores $\frac{1}{7}$ e 7, e em cada um destes casos $\frac{XA}{XY}$ é $\frac{7}{8}$ e $\frac{1}{8}$, respectivamente.

6. ***A urna* -** Observemos que se extraímos a primeira bola com um número entre 2 e 5, então dentre as 5 bolas que ficam na urna temos duas possíveis bolas que cumprem a condição do problema, logo neste caso a probabilidade que a segunda bola cumpra a condição é $\frac{2}{5}$ e a probabilidade que a primeira bola tenha um número entre 2 e 5 é $\frac{4}{6}$. Por outro lado, se a primeira bola extraída é 1 ou 6, só temos uma bola na urna que cumpre a condição, logo neste caso a probabilidade para a escolha da segunda bola é $\frac{1}{5}$ e a probabilidade da primeira bola ser 1 ou 6 é $\frac{2}{6}$. Portanto, a probabilidade das bolas serem consecutivas é

$$\frac{4}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{3}.$$

7. ***Soma das raízes de um equação* -** Temos que considerar dois casos.

<u>Caso 1</u>: $x \geq -1$.

Nesse caso, $x^2 + 3x + 2 = x + 1$, e logo $x^2 + 2x + 1 = 0$ que só possui a solução $x = -1$.

Caso 2: $x < -1$.

Nesse caso, $x^2 + 3x + 2 = -x - 1$, logo $x^2 + 4x + 3 = 0$ que tem, no intervalo, apenas a solução $x = -3$.

Assim as únicas soluções distintas da equação são -1 e -3, cuja soma é -4.

8. ***Produto de três números -*** Sejam $a, b, c, ...$ os números em cada círculo como indicado abaixo.

$$\boxed{a \times b\, c \times d\, e\, f = g\, h\, i\, j}$$

Temos que a, c e f não podem ser zero, pois $0 \times x = 0$.

Mas, o produto dos três números é um número de 4 algarismos, assim, $abd < 10$ e portanto os números que aparecem em dito produto são $1, 2, 3$ ou $1, 2, 4$. Observemos que a segunda é impossível porque o mínimo produto que podemos obter neste caso é

$$1 \times 23 \times 456 = 10488\,,$$

assim $abd = 6$ e o produto é maior do que 6000. Por outra parte a não pode ser 2 ou 3 porque nesse caso o mínimo valor que tem o produto é

$$2 \times 14 \times 356 = 9968$$

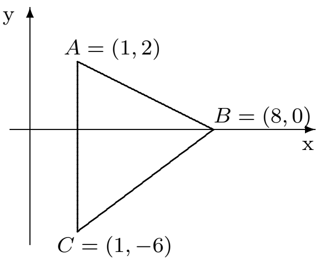
e os outro produtos ficam maiores do que 10000. Portanto $a = 1$.

Continuando essa análise, obtemos a solução:

$$\boxed{1 \times 26 \times 345 = 8970}$$

Lista 7

1. ***Área do triângulo*** **-** Determine a área do triângulo ABC mostrado na figura.



2. ***Duas tabelas*** **-** As duas tabelas abaixo foram formadas de acordo com uma mesma regra, mas na segunda indicamos apenas três números. Qual o número que deve ser colocado na casa com ★?

5	8	11	14	17
12	15	18	21	24
19	22	25	28	31
26	29	32	35	38
33	36	39	42	45

		39		
				87
56				
			★	

3. ***A seqüência abc*** **-** A lei de formação da seqüência $10, a, 30, b, c, \ldots$ é: cada termo, começando com o 30, é o dobro da soma dos dois termos imediatamente anteriores. Qual o valor de c?

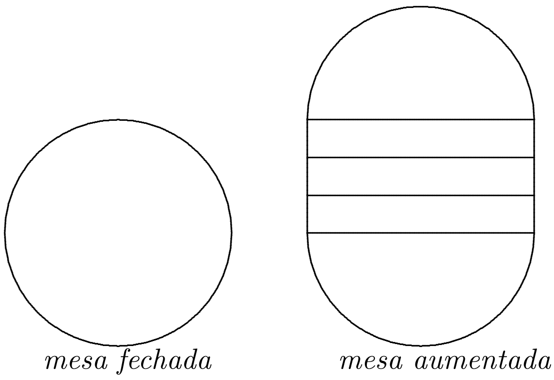
4. ***Perímetro e diagonal*** **-** O perímetro de um retângulo $ABCD$ á $20\,m$. O menor comprimento, em metros, que a diagonal AC pode ter é:

(a) 0 (b) $\sqrt{50}$ (c) 10 (d) $\sqrt{200}$ (e) $20\sqrt{5}$

5. ***As idades numa classe*** **-** Numa classe na escola, todos os alunos têm a mesma idade, exceto sete que têm 1 ano a menos e dois que têm 2 anos a mais.

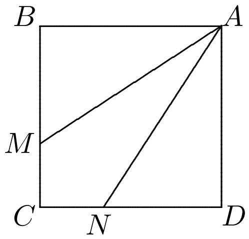
A soma das idades de todos os alunos dessa classe é 330. Quantos alunos tem essa classe?

6. ***A mesa redonda*** **-** Uma mesa redonda tem $1,40\,m$ de diâmetro. Para uma festa, a mesa é aumentada colocando-se três tábuas de $40\,cm$ de largura cada uma, como mostra a figura. Se cada pessoa à mesa deve dispor de um espaço de $60\,cm$, quantos convidados poderão se sentar na mesa?



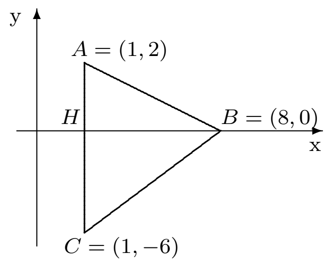
7. ***Brincadeira com 7 números*** **-** Sete números inteiros positivos estão escritos em ordem crescente numa mesma linha. Coloque entre esses números cinco sinais de "+" e um só de " =" para obter uma igualdade.

8. ***Um terreno compartilhado*** **-** Três amigas compraram um terreno quadrado e querem reparti-lo como indicado na figura, por que em A se encontra uma fonte de água. Elas querem também que as áreas das três partes sejam iguais. Onde devem estar os pontos M (sobre BC) e N (sobre CD)?



Soluções da Lista 7

1. ***Área do triângulo -*** Para determinar a á rea basta conhecer o comprimento de uma base e sua respectiva altura. Se AC é uma base, então a altura corta AC no ponto $H = (1, 0)$. Assim, a base $AC = 8$ e a altura BH relativa a essa base é 7. Logo, a área do triângulo é $\frac{7\times 8}{2} = 28$.



2. ***Duas tabelas -***

5	8	11	14	17
12	15	18	21	24
19	22	25	28	31
26	29	32	35	38
33	36	39	42	45

		39		
				87
56				
			★	

Observemos que na primeira tabela cada linha é uma progressão aritmética de razão 3 e cada coluna é uma progressão aritmética de razão 7. Suponhamos que na segunda tabela cada linha é uma progressão aritmética de razão a e cada coluna é uma progressão aritmética de razão b. Assim temos que:

$39-2a$	$39-a$	39	$39+a$	$39+2a$
$39-2a+b$				$39+2a+b$
$39-2a+2b$				87
56				
			★	

Logo: $\begin{cases} 39+2a+2b &= 87 \\ 39-2a+3b &= 56. \end{cases}$ Somando essas duas equações obtemos $78 + 5b = 143$, donde $b = 13$ e $a = \frac{48-2b}{2} = 11$. Portanto, o número na posição da ★ é: $39 + a + 4b = 39 + 11 + 4 \times 13 = 102$.

3. ***A seqüência abc -*** Sabemos que $30 = 2(10 + a)$, logo $a = 5$. Assim

$$b = 2(30 + a) = 2(30 + 5) = 70$$

e

$$c = 2(b + 30) = 2(70 + 30) = 200\,.$$

4. ***Perímetro e diagonal -*** Denotemos por a e b os comprimentos dos lados do retângulo, assim $2a+2b = 20$, logo $a+b = 10$. Por outro lado quadrado do comprimento da diagonal pode ser calculado usando o teorema de Pitágoras, assim $d^2 = a^2 + b^2$. Como

$$\begin{aligned} 2d^2 &= 2a^2 + 2b^2 = (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 2ab + b^2) \\ &= (a + b)^2 + (a - b)^2 \\ &= 100 + (a - b)^2 \end{aligned}$$

temos que o comprimento da diagonal é mínimo quando $a = b$, e neste caso $2d^2 = 100$ e $d = \sqrt{50}$. A opção correta é (b).

5. ***As idades numa classe -*** Denotemos por a a idade comum dos alunos e n o número de alunos, assim temos 7 alunos com $a - 1$ anos, 2 com $a + 2$ anos e o resto, isto é, $n - 9$ com a anos. Assim a soma das idades é

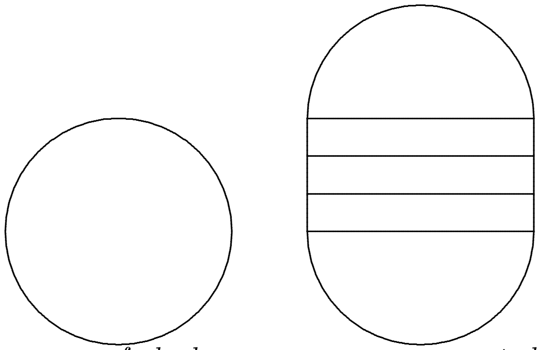
$$7(a - 1) + 2(a + 2) + (n - 9)a = na - 3 = 330,$$

logo

$$na = 333 = 9 \times 37\,.$$

Como a classe tem mais do que 9 alunos, então $a = 9$ e $n = 37$, portanto a classe tem 37 alunos.

6. ***A mesa redonda -***



mesa fechada *mesa aumentada*

O perímetro de mesa aumentada é

$$140 \times \pi + 40 \times 6 \simeq 140 \times 3,14 + 240 = 679,60\,cm.$$

Se cada convidado precisa de $60\,cm$ para colocar-se ao redor da mesa e

$$\frac{679,60}{60} \simeq 11,3.$$

Então, podem se acomodar 11 convidados.

7. ***Brincadeira com 7 números -***

Solução 1 - Os 7 números podem ser escritos como

$$\underbrace{n-3\,,n-2\,,n-1}_{3n-6}\,,n\,,\underbrace{n+1\,,n+2\,,n+3}_{3n+6}\;.$$

Observando que $3n - 6 + 12 = 3n + 6$, concluímos que $n = 12$. Logo, os números são

$$9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$$

Solução 2 - Seja $n + 1, n + 2, \ldots, n + 7$ os sete números consecutivos e suponhamos que

$$(n+1) + \cdots + (n+k) = (n+k+1) + \cdots + (n+7).$$

Como os números à esquerda são menores, então tem mais somandos à esquerda, assim $k \geq 4$. Supondo $k = 4$, a igualdade anterior é

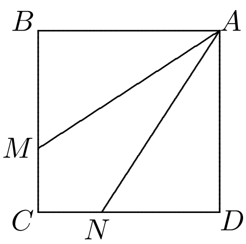
$$4n + 1 + 2 + 3 + 4 = 3n + 5 + 6 + 7,$$

logo $n = 8$. No caso $k = 5$ temos que

$$5n + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 2n + 6 + 7,$$

que não gera solução inteira. De igual forma $k = 6$ não gera solução inteira positiva. Portanto a única solução é

$$9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15.$$



8. ***Um terreno compartilhado -*** Como as áreas de $\triangle ABM$ e $\triangle ADN$ são iguais e $AB = AD$ temos então

$$\frac{BM \times AB}{2} = \frac{ND \times AD}{2} \implies BM = DN\,.$$

Assim, a figura $AMCN$ é simétrica com respeito à diagonal AC. Portanto, a área do $\triangle ACN$ é a metade da área do $\triangle ADN$. Agora, como esses triângulos têm a mesma altura então $DN = 2NC$ e pela simetria temos que $BM = 2MC$. Concluímos que BM é $2/3$ do lado do quadrado, o mesmo ocorrendo com DN.

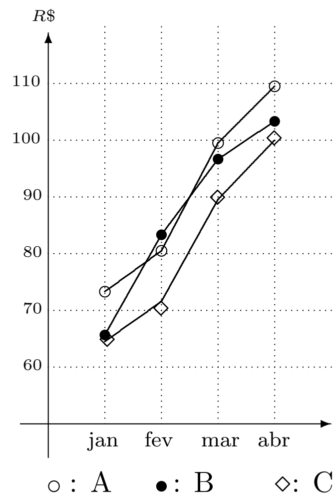
Lista 8

1. ***As duas partículas -*** Duas partículas, A e B, percorrem uma circunferência de $120\,m$ de comprimento. A partícula A gasta 3 segundos menos que B, por estar animada com uma velocidade maior de 2 metros por segundo. Qual é a velocidade de cada partícula?

2. ***Queda livre -*** Um corpo em queda livre demora 11 segundos para tocar o solo. No primeiro segundo ele percorre $4,5\,m$ e, em cada segundo que segue, a distância percorrida aumenta de $9,8\,m$. Qual a altura da queda e quantos metros ele percorreu no último segundo?

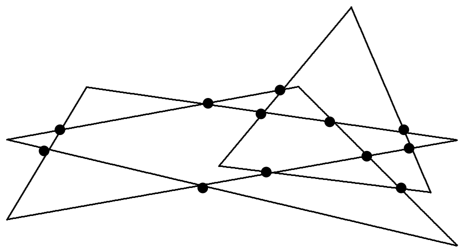
3. ***Um caminho retangular -*** Janete passeia por um caminho de forma retangular $ABCD$ com largura $AB = 1992\,m$. Ela gasta 24 minutos para percorrer a largura AB. Depois, com a mesma velocidade, ela percorre o comprimento BC e a diagonal CA em 2 horas e 46 minutos. Qual é o comprimento BC?

4. ***O preço do feijão -*** A tabela e o gráfico, dados a seguir, mostram a evolução do preço médio de três tipos de feijão, A, B e C, na bolsa de alimentos durante os primeiros quatro meses de certo ano:
Desses 3 tipos, os que apresentam, respectivamente, o maior e o menor crescimento percentual no preço nesse período são:
(a) A e B (b) A e C
(c) B e C (d) C e A
(e) C e B

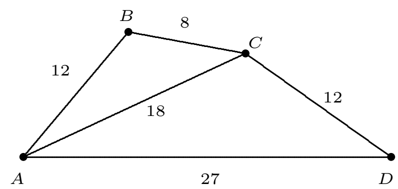


	jan	fev	mar	abr
A	$65,67$	$83,33$	$96,67$	$103,33$
B	$73,30$	$80,50$	$99,55$	$109,50$
C	$64,50$	$71,57$	$89,55$	$100,00$

5. ***Intersecção de triângulos* -** Os 3 triângulos da figura se cortam em 12 pontos diferentes. Qual é o número máximo de pontos de intersecção de 3 triângulos?



6. ***Comparar triângulos* -** Na figura, estão indicados os comprimentos dos segmentos. Demonstre que AC divide o ângulo $\widehat{DAB}$ ao meio.



7. ***Queima de velas* -** Dois tipos de vela têm o mesmo comprimento mas são feitas de material diferente; uma queima completamente em 3 horas e a outra em 4 horas, ambas queimam com velocidade uniforme. A que horas as velas devem ser acesas de modo que às 16 horas o comprimento de uma seja o dobro do da outra?

(a) 1 : 24 (b) 1 : 28 (c) 1 : 36 (d) 1 : 40 (e) 1 : 48

8. ***Uma distração -*** Em vez de multiplicar certo número por 6, Julia se distraiu e dividiu o número por 6. O erro cometido por Julia foi de aproximadamente

(a) 100% (b) 97% (c) 83% (d) 17% (e) 3%

Soluções da Lista 8

1. ***As duas partículas -*** Seja v a velocidade da partícula B e $v+2$ a velocidade de A. Assim, o tempo que demora B em dar uma volta é $\frac{120}{v}$ e o tempo que demora A é $\frac{120}{v+2}$ que é três segundos a menos do que B, portanto,

$$\frac{120}{v} - 3 = \frac{120}{v+2} \implies v^2 + 2v - 80 = 0.$$

A raiz positiva dessa equação é

$$v = \frac{-2 + \sqrt{4 + 320}}{2} = -1 + \sqrt{81} = 8.$$

Portanto, a velocidade de B é $8\,m/s$ e a velocidade de A é $10\,m/s$.

2. ***Queda livre -*** Como a distância percorrida aumenta em $9,8\,m$ com respeito ao segundo anterior, no $n+1$-ésimo segundo ele percorre $4,5 + 9,8n$ metros. Assim no $11^{\underline{o}}$ segundo o corpo percorre $4,5 + 9,8 \cdot 10 = 102,5$ metros.

A distância total percorrida pelo corpo até o $11^{\underline{o}}$ segundo é

$$4,5 + (4,5 + 9,8) + (4,5 + 9,8 \times 2) + \cdots + (4,5 + 9,8 \times 10) =$$

$$= 4,5 \times 11 + 9,8(1 + 2 + \cdots + 10) = 49,5 + 9,8 \times 55 = 588,5\,m.$$

3. ***Um caminho retangular -*** Se v representa a velocidade com que Janete caminha, então $v = \frac{1992}{24} = 83\,m/min$.

Janete percorre $BC + AC$ com a mesma velocidade $v = 83\,m/min$ e gasta $2\,h$ e $46\,min = 166\,min$, então $BC + AC = 83 \times 166 = 13\,778$.

Pelo teorema de Pitágoras temos que a diagonal do quadrado satisfaz:

$$(AC)^2 = (1922)^2 + (BC)^2\,.$$

Daí temos:

$$(AC)^2 - (BC)^2 = (AC - BC)(AC + BC) = (1992)^2.$$

Substituindo o valor da soma $BC + AC$ temos: $AC - BC = \frac{(1992)^2}{83 \times 166} = 288.$

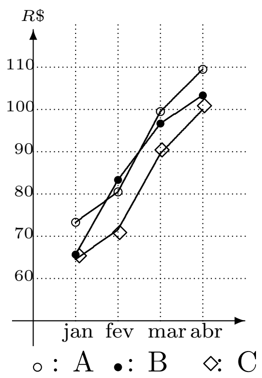
Logo: $\begin{cases} AC + BC &= 13\,778 \\ AC - BC &= 288 \end{cases} \Longrightarrow 2BC = 13\,778 - 288 = 13\,490.$

Portanto $BC = \frac{13\,490}{2} = 6\,745.$

4. ***O preço do feijão -*** Se b é o preço final e a o preço inicial, temos que a variação é $b - a$, e o aumento percentual será

$$\frac{b-a}{a}.$$

Assim os aumentos foram:



$$A \;:\; \frac{103,33 - 65,67}{65,67} = \frac{37,66}{65,67} = 0,57 = 57\%;$$

$$B \;:\; \frac{109,50 - 73,30}{73,30} = \frac{36,20}{73,30} = 0,49 = 49\%;$$

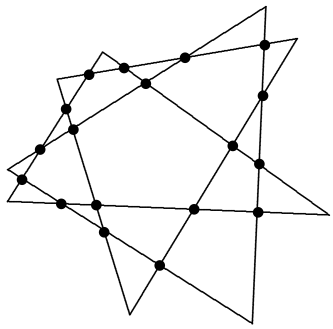
$$C \;:\; \frac{100,00 - 64,50}{64,50} = \frac{35,50}{64,50} = 0,55 = 55\%.$$

Portanto, o maior aumento foi de A e o menor foi de B.

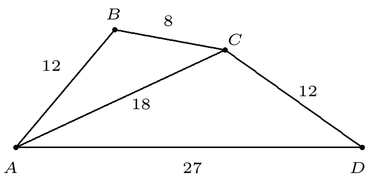
Observe que os valores intermediários (meses de fevereiro e março) não alteram a variação do preço de janeiro a abril. A opção correta é (a).

5. ***Intersecção de triângulos -*** Observemos que cada reta pode cortar no máximo dois lados de um triângulo, assim cada lado de um triângulo cortará no máximo dois lados do outro triângulo e, portanto, o número máximo de cortes

entre dois triângulos é 6. Assim, se temos 3 triângulos, o número máximo de cortes é dado pelo número de formas de pegar dois de ditos triângulos e multiplicar por 6. Assim, a resposta é 18, como mostra a figura seguinte:



6. ***Comparar triângulos -*** De acordo com os dados do problema temos:



$$\frac{AB}{AC} = \frac{BC}{CD} = \frac{AC}{AD} = \frac{2}{3}\,.$$

Segue que os triângulo $\triangle ABC$ e $\triangle ACD$ têm seus lados proporcionais, portanto são semelhantes. Em particular temos que $\widehat{BAC} = \widehat{CAD}$.

7. ***Queima de velas -*** Seja l o comprimento das velas. Assim, uma queima a velocidade constante $\frac{l}{3}$ e a outra a velocidade $\frac{l}{4}$. Depois de um tempo t o que sobra da primeira vela é

$$l - \frac{l}{3}t$$

e da segunda

$$l - \frac{l}{4}t\,.$$

Queremos saber quanto tempo transcorre até o momento em que o comprimento de uma vela é o dobro do comprimento da outra, o que equivale a resolver a equação

$$l - \frac{l}{4}t = 2\left(l - \frac{l}{3}t\right).$$

Segue que

$$\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)t = 1 \text{ donde } t = \frac{12}{5} \text{ horas} = 2\,\frac{2}{5} \text{ horas} = \text{ 2 horas e 24 minutos.}$$

Portanto, depois de 2 horas e 24 minutos o comprimento de uma vela é o dobro do comprimento da outra. Como queremos que isso aconteça às 16 : 00, então as velas devem ser acesas às 13 horas e 36 minutos. A opção correta é (c).

8. ***Uma distração -***

Solução 1: Seja x o número. Julia tinha que obter $6x$ e com sua distração, obteve $\frac{x}{6}$. Logo, seu erro foi de $6x - \frac{x}{6} = \frac{35\,x}{6}$. Portanto, em termos percentuais o erro foi de

$$\frac{\frac{35\,x}{6}}{6\,x} = \frac{35}{36} \approx 0,9722 = 97,22\%.$$

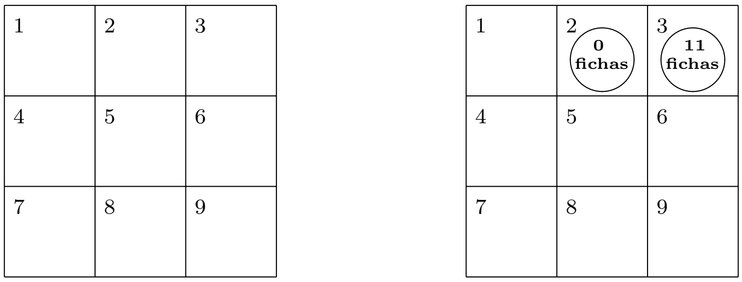
A opção correta é (b).

Solução 2: Se N é o valor que a Julia tinha que obter, então ela com seu erro encontrou $\frac{N}{36}$, assim o erro absoluto cometido foi de $N - \frac{N}{36} = \frac{35}{36}N$. Portanto, o erro relativo foi de

$$\frac{35}{36} \times 100\% = 97,22\%.$$

Desafios

1. ***O jogo das fichas -*** Para iniciar um jogo com seus amigos, Manoel coloca 8 fichas em cada uma das nove casas do tabuleiro mostrado na figura. Para ganhar o jogo, ele precisa mover as fichas de modo que em cada linha, cada coluna e cada diagonal haja o mesmo n úmero de fichas. Na 1^a jogada ele coloca 11 fichas na casa 3 e nenhuma na casa 2. Agora, quantas fichas ele deve colocar em cada uma das outras casas para ganhar o jogo, mantendo as fichas da 1^a jogada?



2. Nas igualdades abaixo, cada letra representa um algarismo:

$$AB + BC = CD \quad \text{e} \quad AB - BC = BA.$$

quanto vale $A + B + C + D$?

3. Rosa, Margarida e Dália são três constelações em forma de buquês de flores. Sabemos que:

   (a) O número de estrelas de Dália, que é a menor das três, é o quadrado de um quadrado;

   (b) O número de estrelas de Rosa é também o quadrado de um quadrado;

(c) Margarida tem 28 561 estrelas;

(d) Dália e Rosa têm juntas o mesmo número de estrelas do que Margarida.

Quantas estrelas possuem Dália e Rosa cada uma?

4. Veja a seguir a página do calendário de abril de 2005:

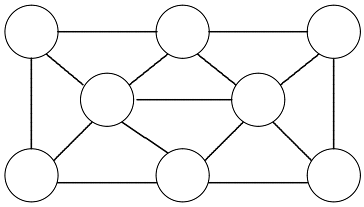
D	S	T	Q	Q	S	S
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30

Qual mês de 2005 ou de 2006 terá uma página igual?

5. ***A faixa e o quadrado -*** Uma faixa retangular de cartolina tem $5cm$ por $1cm$. Corte a faixa com 4 cortes retilíneos de modo a poder montar um quadrado com as peças obtidas (n vale superposição das peças).

6. ***Um número e o sêxtuplo -*** Um número de 3 algarismos e seu sêxtuplo são formados pelos mesmos algarismos. A soma dos algarismos desse número é 17 e a de seu sêxtuplo é 21. Qual é esse número? Existe mais do que um?

7. ***Oito dentro de um retângulo -*** Coloque dentro dos círculos do retângulo abaixo os números de 1 a 8 de modo que a diferença entre dois números ligados por um segmento seja sempre maior do que 1.



8. ***Uma estratégia com um número muito grande -*** Carlos escreveu em seguida todos os números de 1 a 60:

$$1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,1\,0\,1\,1\,1\,2\,1\,3\,1\,4\cdots5\,7\,5\,8\,5\,9\,6\,0\,.$$

Depois ele riscou 100 algarismos de modo que o número formado com os algarismos que não foram riscados fôsse o maior possível, sem mudar a ordem inicial de como os algarismos foram escritos. Qual é esse número?

9. ***Um número surpreendente -*** Um número surpreendente é um número divisível por 9, de nove algarismos diferentes, nenhum deles igual a 0 tal que:

   (a) o número formado pelos 2 primeiros algarismos é divisível por 2;

   (b) o número formado pelos 3 primeiros algarismos é divisível por 3;

   (c) o número formado pelos 4 primeiros algarismos é divisível por 4;

   (d) o número formado pelos 5 primeiros algarismos é divisível por 5;

   (e) o número formado pelos 6 primeiros algarismos é divisível por 6;

   (f) o número formado pelos 7 primeiros algarismos é divisível por 7;

   (g) o número formado pelos 8 primeiros algarismos é divisível por 8;

   Qual é esse número?

10. ***Qual é o erro?*** **-** Uma das afirmações abaixo é falsa:

  (a) André é mais velho do que Bruno;

  (b) Cláudia é mais nova do que Bruno

  (c) A soma das idades de Bruno e Cláudia é o dobro da idade de André;

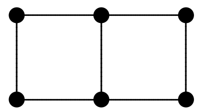
  (d) Claúdia é mais velha do que André.

  Quem é o mais velho? E o mais novo?

11. ***Soma*** **-** Nessa exercício, as letras representam algarismos. Determine cada uma das parcelas da soma abaixo.

$$\begin{array}{r} a\ b\ c\ d\ e\ f \\ a\ b\ c\ d\ e\ f \\ +\quad g\ h\ i\ j \\ \hline d\ e\ f\ h\ j\ f \end{array}$$

12. ***Bolinhas*** **-** Rogério coloca seis bolinhas sobre a mesa de modo a formar dois quadrados, como na figura. Ele percebe que havia esquecido de colocar mais uma bolinha. Complete a figura formada pelas bolinhas com essa bolinha a mais, de modo a formar 3 quadrados.



13. ***Um número não divisível por 5 -*** Determine quais números naturais n entre 2001 e 2007, tornam o número $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ não divisível por 5.

14. ***Quatro frações e um inteiro -*** Quantos números naturais a, b, c e d, todos distintos, existem tais que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$ seja um inteiro?

15. ***O Rei Arthur e o Dragão das Três Cabeças e Três Caudas -*** O Rei Arthur teve que lutar com o Dragão das Três Cabeças e Três Caudas. Sua tarefa ficou facilitada quando conseguiu arranjar uma espada mágica que podia, de um só golpe, fazer uma e somente uma das seguintes coisas:

    - cortar uma cabeça;
    - cortar duas cabeças;
    - cortar uma cauda;
    - cortar duas caudas.

    Além disso, a Fada Morgana lhe revelou o segredo do dragão:

    - se uma cabeça é cortada uma nova cresce;
    - se duas cabeças são cortadas nada acontece;
    - no lugar de uma cauda nascem duas caudas novas;
    - se duas caudas são cortadas uma nova cabeça crece e
    - o dragão morre se perder as três cabeças e as três caudas.

    Quantos golpes o Rei Artur vai precisar para matar o dragão?

16. Num tabuleiro 5x5, um cavaleiro do jogo de xadrez está na casa marcada com A. Depois ele se move marcando as casa por onde passa:

A →B →C →D →E→F → G →H.

A				G
		H		
	B		F	
		D		
C				E

Partindo da casa H, o cavaleiro se move pelo tabulaeiro até ter passado por todas as 25 casas. Descreva o trajeto que ele fez.

17. Oito dados são agrupados formando um cubo. Quantas faces ficam visíveis?

Respostas dos desafios

1.

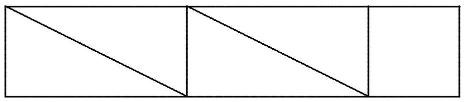
1 13	2 0	3 11
4 6	5 8	6 10
7 5	8 16	9 3

2. 23

3. D=4225=25x169 e R=144x169=24336

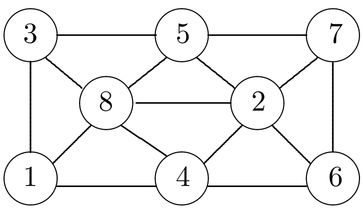
4. Setembro de 2006

5.



6. 746 (solução única?)

7.



8. 9 999 785 960.

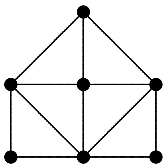
9. 381654729

10. Cláudia e Bruno.

11. 3 soluções:

$$\begin{array}{r} 2\,3\,1\,4\,6\,8 \\ 2\,3\,1\,4\,6\,8 \\ +\quad 5\,9\,7\,2 \\ \hline 4\,6\,8\,9\,0\,8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\,6\,4\,5\,3\,8 \\ 2\,6\,4\,5\,3\,8 \\ +\quad 9\,1\,0\,2 \\ \hline 5\,3\,8\,1\,7\,8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\,7\,3\,5\,4\,8 \\ 2\,7\,3\,5\,4\,8 \\ +\quad 1\,6\,0\,2 \\ \hline 5\,4\,8\,6\,9\,8 \end{array}$$

12.



13. 2004

14. 1

15. 5

16.

A	X	M	R	G
N	S	H	Y	L
I	B	W	F	Q
T	O	D	K	V
C	J	U	P	E

17. 20