Caros alunos e professores

Banco de Questões

Desde a sua primeira edição em 2005 o Banco de Questões (BQ) mostrou ser um material motivante para alunos e professores. O seu objetivo é divulgar nas escolas públicas problemas de olimpíadas nacionais e internacionais, por isso grande parte do BQ não é de questões originais. A nossa idéia é que o BQ seja um material informal, no modelo apostila, que entusiasme alunos e professores. Não há qualquer preocupação com uniformidade de conteúdos ou de níveis de dificuldade dos problemas. A nossa principal meta é: *problemas interessantes que despertem o prazer de raciocinar.*

2005

A publicação do BQ completou 5 anos em 2009, perfazendo 678 problemas e suas soluções, e 50 desafios. Esse material preparado nesses anos serve agora para compor o BQ-2010, que apresentamos dividido em 3 níveis. Os problemas foram agrupados em níveis apenas por uma questão de organização, encorajo todos os alunos a "passearem" pelos 3 níveis.

2006

Você pode ou não conseguir resolver os problemas, mas vale a pena tentar... não desista na primeira vez, nem na segunda, nem na terceira...! Persistência é essencial e bom humor é fundamental! É assim que se aprende Matemática.

2007

Nesses 5 anos o BQ tem servido para ótimos "*bate-papos*" com alunos e professores, que gentilmente me escrevem apontando erros de digitação ou nas respostas. Espero continuar recebendo essas valiosas críticas e sugestões.

2008

Um convite: se você tem soluções diferentes das apresentadas no BQ envie para *famf@impa.br* que nós as publicaremos em nosso *site.*

2009

Agradeço a Eduardo Brietzke (UFRGS) e Claus Doering (UFRGS) o trabalho dedicado e competente de revisão e, principalmente, de enriquecimento de todo o material do BQ-2010.

2010

Suely Druck

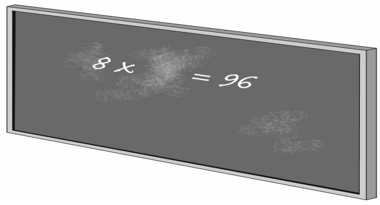
Suely Druck
Diretora Acadêmica da OBMEP

Texto já revisado pela nova ortografia.

Conteúdo

Nível 1

1. ***Qual é o número?*** – Quando Joana entrou em sua sala de aula, a professora estava apagando o quadro negro, mas ela ainda pôde ver algo escrito, conforme mostra a figura. Qual é o número que foi apagado?



   (a) 8 (b) 9 (c) 11 (d) 12 (e) 13

2. ***Muro em 15 dias*** – Um pedreiro é capaz de assentar 8 metros de muro por dia. Quantos metros de muro esse pedreiro consegue assentar em 15 dias?

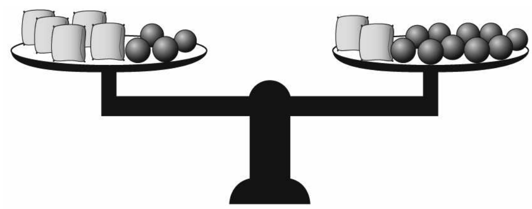
   (a) 104 (b) 110 (c) 120 (d) 128 (e) 112

3. ***Medindo pilhas de papel*** – Numa papelaria, são armazenados pacotes de papel em pilhas de 60 pacotes. Cada pacote tem 500 folhas de papel e cada folha de papel tem uma espessura de 0,1 mm. Ignorando a espessura do papel utilizado para embrulhar os pacotes, podemos afirmar que a altura de uma pilha de 60 pacotes é aproximadamente igual à altura de:

   (a) uma pessoa adulta;
   (b) um bebê de um ano;
   (c) uma mesa comum;
   (d) um prédio de 10 andares;
   (e) uma sala de aula.

4. ***Quanto pesa?*** – A balança da figura está em equilíbrio com bolas e saquinhos de areia em cada um de seus pratos. As bolas são todas iguais e os saquinhos também. O peso de um saquinho de areia é igual ao peso de quantas bolas?

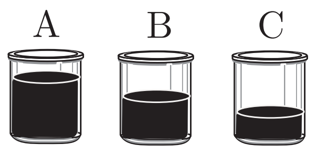
   (a) 1
   (b) 2
   (c) 3
   (d) 5
   (e) 6



5. ***Calcule a diferença*** – Considere dois números naturais, cada um deles com três algarismos diferentes. O maior só tem algarismos pares e o menor só tem algarismos ímpares. Se a diferença entre eles é a maior possível, qual é essa diferença?

   (a) 997 (b) 777 (c) 507 (d) 531 (e) 729

6. ***Qual é o volume?*** – Três frascos, todos com capacidade igual a um litro, contêm quantidades diferentes de um mesmo líquido, conforme ilustração. Qual das alternativas abaixo melhor expressa, aproximadamente, o volume do líquido contido nos frascos A, B e C, nessa ordem?



   (a) $\frac{3}{7}; \frac{4}{9}; \frac{2}{5}$ (b) $\frac{2}{3}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}$ (c) $\frac{2}{3}; \frac{4}{6}; \frac{2}{4}$ (d) $\frac{2}{3}; \frac{4}{7}; \frac{3}{4}$ (e) $\frac{3}{3}; \frac{4}{5}; \frac{2}{3}$

7. ***Descontos e descontos*** – Uma farmácia dá desconto de 30% sobre o preço de tabela de todos os medicamentos que vende. Ao adquirir um remédio cujo preço de tabela é R$ 120,00, quanto reais uma pessoa irá pagar?

   (a) 36 (b) 84 (c) 64 (d) Mais do que 116 (e) 94

8. ***O carro de Maria*** – Um litro de álcool custa R$ 0,75. O carro de Maria percorre 25 km com 3 litros de álcool. Quantos reais Maria gastará com o álcool necessário para percorrer 600 km?

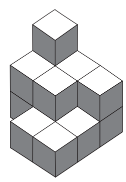
   (a) 54 (b) 72 (c) 50 (d) 52 (e) 45

9. ***Calculando distâncias*** – As quatro cidades A, B, C e D foram construídas à beira de uma rodovia reta, conforme a ilustração.

   A distância entre A e C é de 50 km e a distância entre B e D é de 45 km. Além disso, sabe-se que a distância entre a primeira e a última cidade é de 80 km. Qual é a distância, em quilômetros, entre as cidades B e C?

   (a) 15 (c) 20 (c) 25 (d) 5 (e) 10

10. ***Pesando caixas*** – Num armazém foram empilhadas algumas caixas que formaram o monte mostrado na figura. Se cada caixa pesa 25 kg, quantos quilogramas pesa o monte com todas as caixas?



    (a) 300 (b) 325 (c) 350 (d) 375 (e) 400

11. ***Consumo de água*** – Na tabela a seguir vemos o consumo mensal de água de uma família, durante os cinco primeiros meses de 2004.

Meses	Consumo (m^3)
Janeiro	12,5
Fevereiro	13,8
Março	13,7
Abril	11,4
Maio	12,1

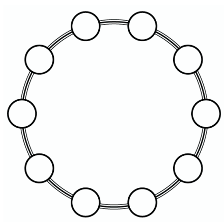
    Qual é o consumo mensal médio de janeiro a maio dessa família, em m^3?

    (a) 11,3 (c) 12,7 (e) 317,5
    (b) 11,7 (d) 63,5

12. ***Folheando um livro*** – Um livro de cem páginas tem suas páginas numeradas de 1 a 100. Quantas folhas desse livro possuem o algarismo 5 em sua numeração? (Atenção: uma folha tem duas páginas.)

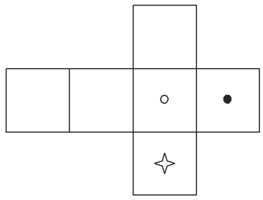
    (a) 13 (b) 14 (c) 15 (d) 16 (e) 17

13. ***Calculando a soma*** – Escreva os números de 0 a 9 nos círculos ao lado, de forma que eles cresçam no sentido anti-horário. Em seguida, subtraia uma unidade dos números ímpares e some uma unidade aos números pares. Escolhendo três círculos consecutivos, qual é a maior soma que se pode obter?

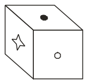
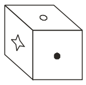
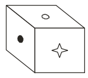
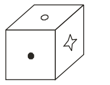
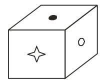


    (a) 19 (b) 21 (c) 23 (d) 24 (e) 25

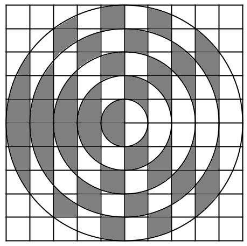
14. ***Desenhando o cubo*** – A figura ao lado foi desenhada em cartolina e dobrada de modo a formar um cubo.



Qual das alternativas mostra o cubo assim formado?

(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

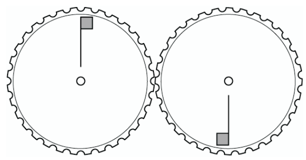
15. ***Círculos concêntricos*** – Na malha quadriculada a seguir, todas as circunferências têm o mesmo centro. Pode-se concluir que a área da região cinza destacada é igual a

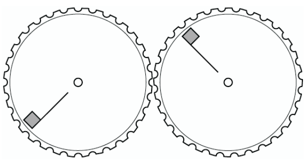
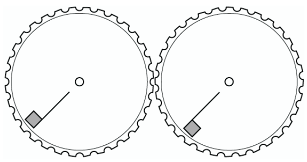
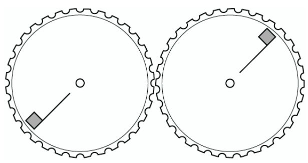


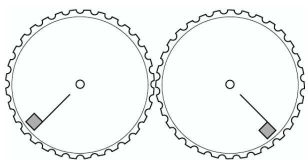
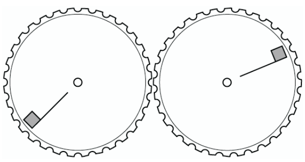
(a) dois quintos da área do círculo maior;
(b) três sétimos da área do círculo maior;
(c) metade da área do círculo maior;
(d) quatro sétimos da área do círculo maior;
(e) três quintos da área do círculo maior.

16. ***Brincando com engrenagens*** – José colou uma bandeirinha em cada um dos dois discos dentados que formam uma engrenagem, como mostra a figura.

Os dois discos são exatamente iguais, inclusive os dentes em cada um deles. José girou a engrenagem e é claro que as bandeirinhas mudaram de posição. Qual é a nova posição das duas bandeirinhas?



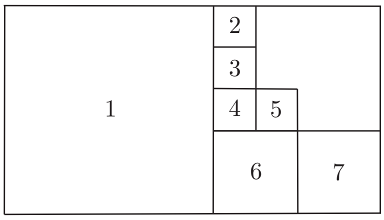
(a)  (b)  (c) 

(d)  (e) 

17. ***Troca de garrafas*** – A prefeitura de uma certa cidade fez uma campanha que permite trocar quatro garrafas de 1 litro vazias por uma garrafa de 1 litro cheia de leite. Quantos litros de leite pode obter uma pessoa que possua 43 garrafas vazias de 1 litro fazendo várias dessas trocas?

(a) 11 (b) 12 (c) 13 (d) 14 (e) 15

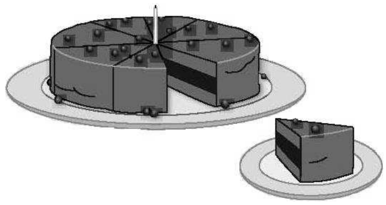
18. ***Retângulo e quadrados*** – A figura dada representa um gramado retangular em que foram marcados sete quadrados numerados de 1 a 7. Se a área do menor desses quadrados é 1 m^2, a área total do gramado, em m^2, é igual a



(a) 42 (b) 44 (c) 45 (d) 48 (e) 49

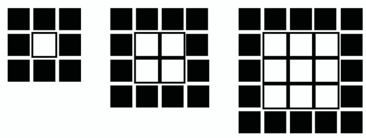
19. ***Quantas fatias de bolo?*** – Nove amigos compraram três bolos, cada um deles cortado em oito fatias. Todos comeram bolo e não sobrou nenhum pedaço. Sabendo que cada um só comeu fatias inteiras do bolo, podemos ter certeza de que:

(a) alguém comeu quatro fatias;
(b) um deles comeu somente uma fatia;
(c) todos comeram duas fatias, pelo menos;
(d) uns comeram duas fatias e os demais comeram três fatias;
(e) um deles comeu, no mínimo, três fatias.



20. ***Mosaicos quadrados*** – Uma sequência de mosaicos quadrados é construída com azulejos quadrados pretos e brancos, todos do mesmo tamanho, sendo o primeiro formado por um azulejo branco cercado por azulejos pretos, o segundo por quatro azulejos brancos cercados por azulejos pretos e assim, sucessivamente, como indica a figura. Se numa sequência de mosaicos formada de acordo com esta regra forem usados 80 azulejos pretos, quantos serão os azulejos brancos utilizados?

(a) 55 (d) 85
(b) 65 (e) 100
(c) 75



21. ***Quanto custa?*** – Ester vai a uma papelaria para comprar cadernos e canetas. Nessa papelaria, todos os cadernos custam R$ 6,00. Se ela comprar três cadernos, sobram R$ 4,00. Se, em vez disso, seu irmão lhe emprestar R$ 4,00 adicionais, ela conseguirá comprar dois cadernos e sete canetas, todas iguais.

(a) Quanto custa cada caneta?
(b) Se ela comprar dois cadernos e não pedir dinheiro emprestado, quantas canetas Ester poderá comprar?

22. ***Encontre o número*** – O número da casa de Júlia tem exatamente três algarismos, cuja soma é 24. Encontre todos os possíveis números da casa de Júlia, em cada uma das situações seguintes.

(a) Os três algarismos são iguais.
(b) Apenas dois algarismos são iguais.
(c) Os algarismos são todos diferentes.

23. ***Campeonato de futebol*** – No último campeonato de futebol do bairro em que moro participaram seis equipes, denominadas A, B, C, D, E e F. Cada equipe disputou, com cada uma das outras, exatamente uma partida.

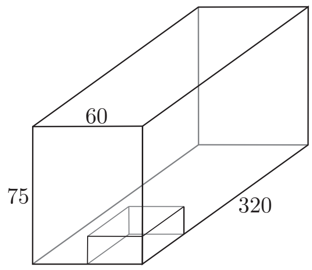
Na tabela de classificação do campeonato, ao lado, V indica o número de vitórias, E o número de empates, D o número de derrotas, GP o número de gols marcados e GC o número de gols sofridos de cada equipe.

	V	**E**	**D**	**GP**	**GC**
A	4	1	0	6	2
B	2	1	2	6	6
C	0	3	2	2	6
D	1	1	y	3	6
E	0	1	4	1	5
F	x	1	0	z	3

(a) Quantas partidas foram disputadas?

(b) A tabela está incompleta. Determine a quantidade de vitórias da equipe F, a quantidade de derrotas da equipe D e a quantidade de gols marcados pela equipe F, representados por x, y e z na tabela.

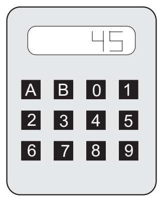
24. ***Dividindo o paralelepípedo*** – Um bloco de madeira na forma de um paralelepípedo retângulo tem 320 cm de comprimento, 60 cm de largura e 75 cm de altura. O bloco é cortado várias vezes, com cortes paralelos às suas faces, de modo a subdividi-lo em blocos menores, todos na forma de paralelepípedos retângulo de 80 cm de comprimento por 30 cm de largura por 15 cm de altura.



(a) Quantas peças foram obtidas?

(b) Um metro cúbico dessa madeira pesa aproximadamente 900 kg. Qual é o peso de cada uma dessas peças?

25. ***Uma calculadora*** – Uma calculadora possui duas teclas especiais:



- a tecla A, que duplica o número que aparece no visor; e
- a tecla B, que acrescenta uma unidade ao número que aparece no visor.

Por exemplo, se o número 45 estiver no visor e for apertada a tecla B, o visor mostrará o número 46. Se, em seguida, apertarmos a tecla A, o visor mostrará o número 92. Nesse exemplo, apertamos ao todo duas vezes as teclas A e B: uma vez a tecla B e depois uma vez a tecla A, para, a partir de 45, chegar ao 92. Suponha que no visor esteja o número 1. Indique uma maneira de obter o número:

(a) 10 apertando um total de quatro vezes as teclas A e B;

(b) 15 apertando um total de seis vezes as teclas A e B;

(c) 100 apertando um total de oito vezes as teclas A e B.

26. ***Ano bissexto*** – Um ano comum tem 365 dias e um ano bissexto, 366 dias. O ano bissexto, quando o mês de fevereiro tem 29 dias, ocorre a cada quatro anos.

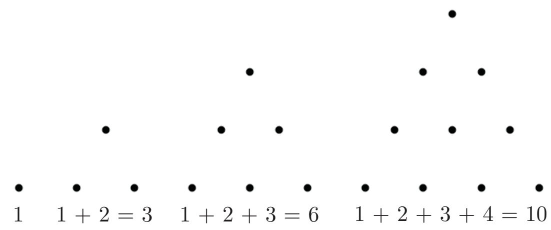
(a) Com frequência dizemos "Um ano comum tem 52 semanas". Será correta essa afirmação? E para um ano bissexto? Justifique suas respostas.

(b) Se um ano comum inicia numa terça-feira, então o ano seguinte iniciará em qual dia da semana?

(c) Responda a pergunta anterior para um ano bissexto.

27. ***Números triangulares*** – O famoso matemático grego Pitágoras denominou os números obtidos pela soma dos primeiros números inteiros positivos de *números triangulares*. Por exemplo, 1, 3, 6 e 10 são números triangulares.

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 3 &= 1+2 \\ 6 &= 1+2+3 \\ 10 &= 1+2+3+4 \end{aligned}$$



A figura ilustra a motivação para o nome dos números triangulares. A sequência de números triangulares continua com $1+2+3+4+5=15$, $1+2+3+4+5+6=21$ etc. Quantos são os números triangulares menores do que 100?

28. ***Livros separados*** – Uma bibliotecária recebe 130 livros de Matemática e 195 livros de Português. Ela quer arrumá-los em estantes, colocando igual quantidade de livros em cada estante, sem misturar livros de Matemática e de Português na mesma estante. Quantos livros ela deve colocar em cada estante para que o número de estantes utilizadas seja o menor possível?

29. ***Alunos com óculos*** – A sexta parte dos alunos de uma classe usam óculos. Dentre os que usam óculos, uma terça parte são meninas; além disso, quatro meninos usam óculos. Quantos são os alunos dessa classe?

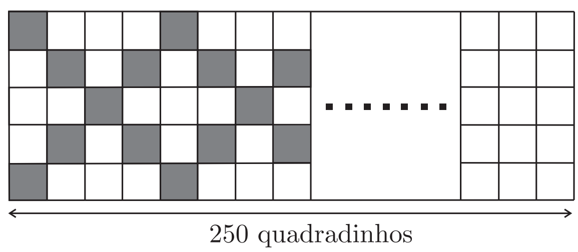
30. ***Quadrado mágico*** – Complete as casas em branco da tabela ao lado com frações, de tal modo que a soma dos três números de qualquer linha, qualquer coluna e das duas diagonais seja sempre a mesma.

		3/5
	1/2	
0,4	0,5	

31. ***Três algarismos*** – Sejam A, B e C algarismos diferentes de zero tais que $(AB)^2 = CAB$, isto é, o número de dois algarismos AB elevado ao quadrado dá o número de três algarismos CAB. Determine o valor de $A+B+C$.

32. ***Pintando quadradinhos*** – Uma faixa quadriculada tem 5 quadradinhos na largura e 250 quadradinhos no comprimento. Alguns quadradinhos serão pintados de cinza, começando da esquerda, conforme o modelo ilustrado na figura, e continuando com este padrão até chegar ao final da faixa, à direita.

Quantos quadradinhos não serão pintados?



33. ***A cisterna do João*** – João tem, em seu jardim, uma cisterna na qual ele armazena água de chuva e tira água para regar suas flores. À meia-noite do dia 31 de dezembro de 2005, a cisterna continha 156 litros de água. João tem o hábito de anotar em um quadro, todo dia, o número de litros de água que ele gasta para regar as flores e o de água recolhida da chuva.

Ao lado vemos parte do quadro referente aos primeiros 8 dias de janeiro de 2006. Quantos litros de água havia na cisterna do João à meia noite do dia 8 de janeiro de 2006?

Jan	flores(l)	chuva(l)
1	6	2,5
2	9	0
3	0	5
4	4	0
5	9	3
6	0	0
7	11	4,5
8	0	0

34. ***O múltiplo de* 13** – Da igualdade $9\,174\,532 \times 13 = 119\,268\,916$ pode-se concluir que um dos números a seguir é divisível por 13. Qual é esse número?

(a) 119 268 903 (c) 119 268 911 (e) 119 268 923

(b) 119 268 907 (d) 119 268 913

35. ***Um bilhão*** – Arnaldo afirmou que um bilhão é o mesmo que um milhão de milhões. O professor Piraldo o corrigiu e disse, corretamente, que um bilhão é o mesmo que mil milhões. Qual é a diferença entre o valor correto de um bilhão e a afirmação de Arnaldo?

(a) 1 000 (b) 999 000 (c) 1 000 000 (d) 999 000 000 (e) 999 000 000 000

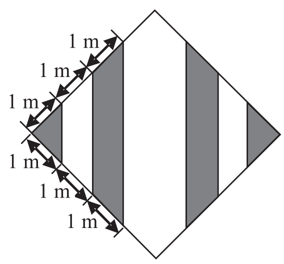
36. ***Energia de abelha*** – Com a energia fornecida por um litro de mel, uma abelha consegue voar 7 000 quilômetros. Quantas abelhas conseguiriam voar um quilômetro, cada uma, com a energia fornecida por 10 litros de mel?

(a) 7 000 (b) 70 000 (c) 700 000 (d) 7 000 000 (e) 70 000 000

37. ***Perda de safra*** – Um agricultor esperava receber cerca de R$ 100 000,00 pela venda de sua safra. Entretanto, a falta de chuva provocou uma perda da safra avaliada entre uma quinta parte e uma quarta parte do total previsto. Qual dos valores a seguir pode representar a perda do agricultor, em reais?

(a) 21 987,53 (b) 34 900,00 (c) 44 999,99 (d) 51 987,53 (e) 60 000,00

38. ***Placa decorativa*** – Uma placa decorativa consiste num quadrado branco de quatro metros de lado, pintado de forma simétrica com partes em cinza, conforme a figura. Qual é a fração da área da placa que foi pintada?



(a) $\dfrac{1}{2}$ (b) $\dfrac{1}{3}$ (c) $\dfrac{3}{8}$ (d) $\dfrac{6}{13}$ (e) $\dfrac{7}{11}$

39. ***O suco do Diamantino*** – Diamantino colocou três litros de água e um litro de refresco num recipiente. O refresco é composto de 20% de suco de laranja e 80% de

água. Depois de misturar tudo, que porcentagem do volume final representa o suco de laranja?

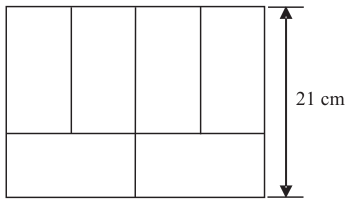
(a) 5% (b) 7% (c) 8% (d) 20% (e) 60%

40. ***Uma eleição*** – Três candidatos concorreram à eleição de representante de uma turma de escola: João, Rosa e Marcos. João obteve $2/7$ dos votos e Rosa $2/5$ dos votos. Quem ganhou a eleição?

41. ***Soma de potências*** – Qual é o valor de $2^6 + 2^6 + 2^6 + 2^6 - 4^4$?

(a) 0 (b) 2 (c) 4 (d) 4^2 (e) 4^4

42. ***Seis retângulos*** – Com seis retângulos idênticos formamos um retângulo maior, com um dos lados medindo 21 cm, como na figura. Qual é a área do retângulo maior, em cm^2?

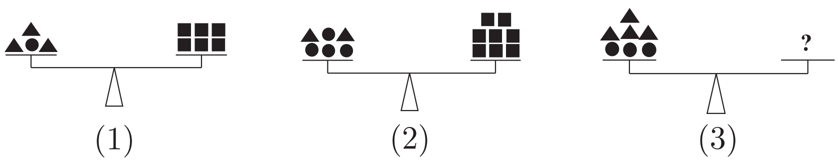


(a) 210 (b) 280 (c) 430 (d) 504 (e) 588

43. ***Duas populações*** – Há três anos, a população de Pirajussaraí era igual à população que Tucupira tem hoje. De lá para cá, a população de Pirajussaraí não mudou, mas a população de Tucupira cresceu 50%. Hoje, a soma das populações das duas cidades é de 9 000 habitantes. Qual era a soma dessas duas populações há três anos?

(a) 3 600 (b) 4 500 (c) 5 000 (d) 7 200 (e) 7 500

44. ***Três balanças*** – As balanças (1) e (2) da figura dada estão em equilíbrio. Sabe-se que todos os triângulos têm o mesmo peso, bem como todos os quadrados e também todos os círculos. Quantos quadrados devem ser colocados no prato direito da balança (3) para que ela também fique equilibrada?



(a) 7 (b) 8 (c) 9 (d) 10 (e) 12

45. ***Poucos domingos*** – Em um ano, no máximo quantos meses têm cinco domingos?

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6 (e) 7

46. ***Metade de potência*** – Qual é a metade do número $2^{12} + 3 \times 2^{10}$?

(a) $2^6 + 3 \times 2^5$ (b) $2^6 + 3 \times 2^{10}$ (c) $2^1 1 + 3 \times 2^5$ (d) $2^{11} \times 7$ (e) $2^9 \times 7$

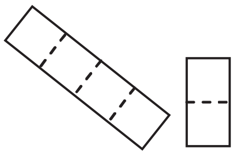
47. ***Minutos demais*** – Neste momento, são 18 horas e 27 minutos. Qual era o horário 2 880 717 minutos mais cedo?

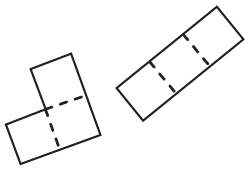
(a) 6h22min (b) 6h24min (c) 6h27min (d) 6h30min (e) 6h32min

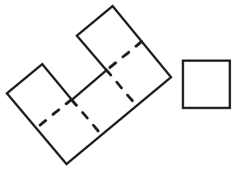
48. ***Dois ônibus*** – Os alunos de uma escola participaram de uma excursão, para a qual foram contratados dois ônibus. Quando os ônibus chegaram, 57 alunos entraram no primeiro ônibus e apenas 31 no segundo. Quantos alunos devem passar do primeiro para o segundo ônibus para que seja transportada a mesma quantidade de alunos nos dois ônibus?

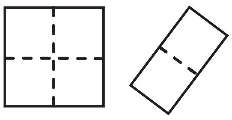
(a) 8 (b) 13 (c) 16 (d) 26 (e) 31

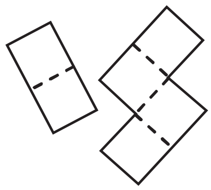
49. ***Cubo de papelão*** – Em qual das alternativas abaixo aparecem dois pedaços de papelão com os quais pode-se construir um cubo, dobrando pelas linhas tracejadas e colando pelas linhas contínuas?

(a)


(b)


(c)


(d)


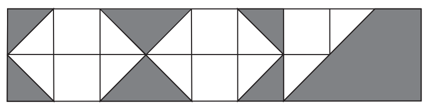
(e)


50. ***Algarismo das unidades*** – Qual é o algarismo das unidades do número

$$1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 97 \times 99?$$

(a) 1 (b) 3 (c) 5 (d) 7 (e) 9

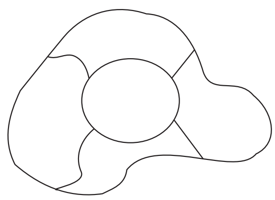
51. ***Região sombreada*** – A figura mostra um retângulo formado por 18 quadrados iguais com algumas partes sombreadas.



Qual é a fração da área do retângulo que está sombreada?

(a) $\frac{7}{18}$ (b) $\frac{4}{9}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{5}{9}$ (e) $\frac{1}{2}$

52. ***Colorindo um mapa*** – A figura mostra o mapa de um país (imaginário) constituído por cinco estados. Deseja-se colorir esse mapa com as cores verde, azul e amarelo, de modo que dois estados vizinhos não possuam a mesma cor. De quantas maneiras diferentes o mapa pode ser pintado?



(a) 12 (b) 6 (c) 10 (d) 24 (e) 120

53. ***Pintando um tabuleiro*** – As nove casas de um tabuleiro 3×3 devem ser pintadas de forma que em cada coluna, cada linha e cada uma das duas diagonais não haja duas casas de mesma cor. Qual é o menor número de cores necessárias para isso?

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6 (e) 7

54. ***Número X, Y*** – Considere um número escrito na forma decimal X,Y, onde X e Y são algarismos diferentes de 0. Determine esse número, sabendo que X,Y é igual a $\frac{3}{10}(X+Y)$.

55. ***Construção de casas*** – Em um mesmo lado de uma rua serão construídas seis casas vizinhas. As casas podem ser de alvenaria ou de madeira, mas como medida de segurança contra incêndio, duas casas de madeira não podem ser vizinhas. De quantas maneiras se pode planejar a construção dessas casas?

56. ***Comparação de grandezas*** – Qual é o maior dos números dados?

    (a) $1\,000 + 0{,}01$ (c) $1\,000/0{,}01$ (e) $1\,000 - 0{,}01$

    (b) $1\,000 \times 0{,}01$ (d) $0{,}01/1\,000$

57. ***Maior número de seis algarismos*** – Qual é o maior número de seis algarismos que se pode encontrar suprimindo-se nove algarismos do número 778 157 260 669 103, sem mudar a ordem de seus algarismos?

    (a) 778 152 (b) 781 569 (c) 879 103 (d) 986 103 (e) 987 776

58. ***Qual é o numerador?*** – Se $\frac{n}{24}$ é um número entre $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{4}$, quem é n?

    (a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 8 (e) 9

59. ***Correndo menos*** – Correndo a uma velocidade de 10 km/h, João completa um certo percurso em seis minutos. Com qual velocidade, em km/h, ele pode completar o mesmo percurso em oito minutos?

    (a) 7,5 (b) 7,75 (c) 8 (d) 8,25 (e) 8,5

60. ***Cinco vizinhas*** – As vizinhas Elza, Sueli, Patrícia, Heloísa e Cláudia chegam juntas do trabalho e começam a subir as escadas do prédio de cinco andares onde moram. Cada uma mora num andar diferente. Heloísa chega a seu andar depois de Elza, mas antes de Cláudia. Quando Sueli chega ao seu andar, Heloísa ainda tem dois andares para subir e o mesmo ocorre com Patrícia quando Elza chega ao seu andar. Sueli não mora no primeiro andar. Em qual andar mora cada uma delas?

61. ***Potências de 9*** – Qual é o valor da soma $9^{20} + 9^{20} + 9^{20}$?

    (a) 9^{20} (b) 3^{66} (c) 9^{23} (d) 3^{41} (e) 3^{23}

62. ***Dois números*** – Miguel escolheu um número de três algarismos e outro de dois. Qual é a soma desses números se sua diferença é 989?

    (a) 1 000 (b) 1 001 (c) 1 009 (d) 1 010 (e) 2 005

63. ***Menor natural*** – Qual é o menor número natural n para o qual $10^n - 1$ é um múltiplo de 37?

    (a) 6 (b) 5 (c) 4 (d) 3 (e) 2

64. ***Imunes à gripes*** – Num certo país com 14 milhões de habitantes, 0,15% da população contraiu uma certa gripe. Quantos habitantes não contraíram essa gripe?

(a) 13 979 000 (b) 1 397 900 (c) 139 790 (d) 13 979 (e) 139 790 000

65. ***O código secreto*** – O código secreto de um grupo de alunos é um número de três algarismos distintos diferentes de 0. Descubra o código utilizando as informações a seguir.

1	**2**	**3**	Nenhum algarismo correto.
4	**5**	**6**	Só um algarismo correto na posição certa.
6	**1**	**2**	Só um algarismo correto, mas na posição errada.
5	**4**	**7**	Só um algarismo correto, mas na posição errada.
8	**4**	**3**	Só um algarismo correto na posição certa.

(a) 137 (b) 876 (c) 768 (d) 678 (e) 576

66. ***Parênteses, colchetes e chaves*** – Qual é o valor de $2 - 2\Big\{2 - 2\big[2 - 2(4 - 2)\big]\Big\}$?

(a) 0 (b) 2 (c) -2 (d) 4 (e) -10

67. ***Ordenando frações*** – Qual é a ordem crescente correta das frações $\frac{4}{3}, \frac{4}{5}, \frac{4}{6}, \frac{3}{5}, \frac{6}{5}$ e $\frac{2}{5}$?

(a) $\frac{2}{5} < \frac{3}{5} < \frac{4}{6} < \frac{4}{5} < \frac{6}{5} < \frac{4}{3}$

(b) $\frac{4}{3} < \frac{4}{6} < \frac{2}{5} < \frac{3}{5} < \frac{4}{5} < \frac{6}{5}$

(c) $\frac{2}{5} < \frac{3}{5} < \frac{4}{5} < \frac{4}{6} < \frac{4}{3} < \frac{6}{5}$

(d) $\frac{2}{5} < \frac{3}{5} < \frac{4}{5} < \frac{4}{6} < \frac{6}{5} < \frac{4}{3}$

(e) $\frac{2}{5} < \frac{3}{5} < \frac{4}{5} < \frac{4}{3} < \frac{4}{6} < \frac{6}{5}$

68. ***Números de três algarismos*** – Quantos números de três algarismos maiores do que 200 podem ser escritos, usando-se apenas os algarismos 1, 3 e 5?

(a) 10 (b) 12 (c) 14 (d) 15 (e) 18

69. ***Velocidade de maratona*** – Uma maratona de 42 km começou às 11h30min e o vencedor terminou às 13h45min do mesmo dia. Qual foi a velocidade média do vencedor, em km/h?

(a) 18,6 (b) 25,3 (c) 29 (d) 32,5 (e) 38

70. ***Bilhetinhos com números*** – Cinco alunas escreveram cada uma um número num papel. Os números só podiam ser 1 ou 2 ou 4. Qual pode ser o produto dos cinco números escritos?

(a) 100 (b) 120 (c) 256 (d) 768 (e) 2 048

71. ***Produto de frações*** – Qual é o valor do produto $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)$?

(a) $\frac{119}{120}$ (b) $\frac{5}{7}$ (c) $2\,\frac{43}{60}$ (d) $\frac{1}{5}$ (e) $\frac{1}{120}$

72. ***Produto máximo*** – A soma de dois números naturais é 11. Qual é o maior produto possível que se pode obter com esses números?

(a) 30 (b) 22 (c) 66 (d) 24 (e) 28

73. ***Quem é o cubo?*** – Se m é um número natural tal que $3^m = 81$, quanto vale m^3?

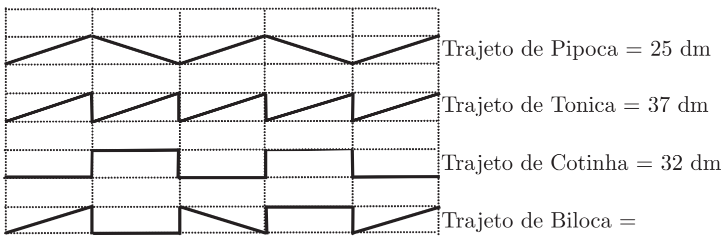
(a) 81^3 (b) 3^{81} (c) 64 (d) 24 (e) 48

74. ***Qual é o maior?*** – Se $a-1 = b+2 = c-3 = d+4$, qual é o maior dentre os números a, b, c e d?

(a) a (b) b (c) c (d) d (e) São todos iguais

75. ***Quatro formiguinhas*** – Quatro formigas atravessam o piso de uma sala coberto de lajotas retangulares, segundo os trajetos indicados na figura. Qual é o comprimento do trajeto percorrido por Biloca?

(a) 30 dm
(b) 43 dm
(c) 55 dm
(d) 24 dm
(e) 48 dm



76. ***Trocando figurinhas*** – Célia quer trocar com Guilherme figurinhas de um álbum sobre animais brasileiros. Célia quer trocar quatro figurinhas de borboleta, cinco de tubarão, três de cobra, seis de periquito e seis de macaco. Todas as figurinhas de Guilherme são de aranha. Eles sabem que

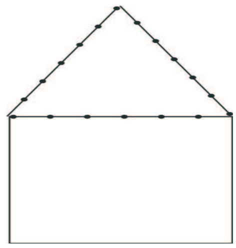
(a) uma figurinha de borboleta vale três figurinhas de tubarão;
(b) uma figurinha de cobra vale três figurinhas de periquito;
(c) uma figurinha de macaco vale quatro figurinhas de aranha;
(d) uma figurinha de periquito vale três figurinhas de aranha;
(e) uma figurinha de tubarão vale duas figurinhas de periquito.

Quantas figurinhas Célia poderá receber se ela trocar todas que quiser?

77. ***Soma de frações*** – Qual é o valor da soma $\frac{10+20+30+40}{10}+\frac{10}{10+20+30+40}$?

(a) 1 (b) 20 (c) 30 (d) 10,1 (e) 1,01

78. ***Geometria com palitos*** – A figura dada é formada por um triângulo e um retângulo, usando-se 60 palitos iguais. Para cada lado do triângulo são necessários seis palitos. Se cada palito mede 5 cm de comprimento, qual é a área (em cm^2) do retângulo da figura?



(a) 1 200 (c) 2 700 (e) 4 500

(b) 1 800 (d) 3 600

79. ***Um incêndio e o bombeiro*** – Uma casa pega fogo. Um bombeiro se mantém no degrau do meio de uma escada, jogando água sobre o incêndio. As chamas diminuem e ele sobe cinco degraus. O vento sopra e o bombeiro desce sete degraus. Um pouco depois, ele sobe oito degraus e fica lá até acabar o incêndio. Então, ele sobe os últimos sete degraus e entra na casa. Quantos degraus tem a escada do bombeiro?

(a) 25 (b) 26 (c) 27 (d) 28 (e) 29

80. ***Árvore genealógica*** – A figura mostra a árvore genealógica de uma família. Cada flecha vai do pai em direção ao seu filho. Quem é o irmão do pai do irmão do pai de Evaristo?

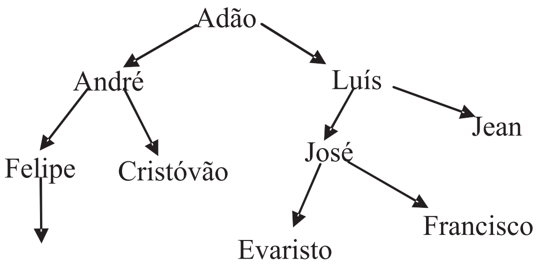
(a) Francisco

(b) José

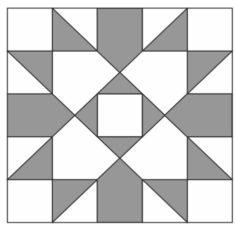
(c) André

(d) Felipe

(e) Simão



81. ***Colcha quadrada*** – Uma colcha quadrada em branco e cinza é feita com quadrados e triângulos retângulos isósceles. A parte em cinza representa qual percentagem da colcha?



(a) 36% (c) 45% (e) 60%

(b) 40% (d) 50%

82. ***Falsas igualdades*** – Considere as igualdades a seguir.

(i) $3 \times 10^6 + 5 \times 10^2 = 8 \times 10^8$ (iii) $5 \times 8 + 7 = 75$

(ii) $2^3 + 2^{-3} = 2^0$ (iv) $5 + 5 \div 5 = 2$

Qual delas está correta?

(a) (i) (b) (ii) (c) (iii) (d) (iv) (e) Nenhuma

83. ***Menor valor da soma*** – Se a, b e c são números inteiros positivos tais que $3a = 4b = 7c$, qual é o menor valor possível de $a + b + c$?

(a) 84 (b) 36 (c) 61 (d) 56 (e) 42

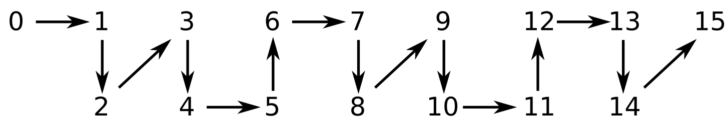
84. ***Procurando um quadrado perfeito*** – Um número é um *quadrado perfeito* se é igual a um número inteiro elevado ao quadrado. Por exemplo, $25 = 5^2$, $49 = 7^2$ e $125 = 25^2$ são quadrados perfeitos. Qual é o menor número pelo qual devemos multiplicar 120 para obter um quadrado perfeito?

    (a) 10 (b) 15 (c) 20 (d) 30 (e) 35

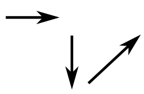
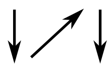
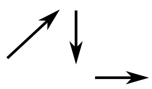
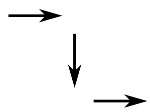
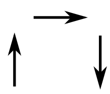
85. ***Visitas num museu*** – A máquina que registra o número de visitantes de um museu marca 1 879 564. Note que esse número tem todos os algarismos distintos. Qual é o menor número de visitantes que são necessários para que a máquina registre um outro número que também tenha todos os seus algarismos distintos?

    (a) 35 (b) 36 (c) 38 (d) 47 (e) 52

86. ***Ligando números por flechas*** – Os números de 0 a 2 000 foram ligados por flechas; a figura dada mostra o começo do processo.



Qual é a sucessão de flechas que liga o número 1 997 ao número 2 000?

(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

87. ***Múltiplos de 9*** – Encontre o menor múltiplo positivo de 9 que pode ser escrito apenas com os algarismos: (a) 0 e 1; (b) 1 e 2.

88. ***A florista*** – Uma florista colheu 49 kg de flores do campo. O quilograma das flores pode ser vendido imediatamente a R$ 1,25 ou, mais tarde, com as flores desidratadas, a R$ 3,25. O processo de desidratação faz as flores perderem 5/7 de seu peso. Qual é o tipo de venda mais lucrativo para a florista?

89. ***Divisores*** – Seja N o menor número que tem 378 divisores e é da forma $2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d$. Quanto vale cada um desses expoentes?

90. ***O produto dos algarismos*** – Denotemos por $P(n)$ o produto dos algarismos do número n. Por exemplo, $P(58) = 5 \times 8 = 40$ e $P(319) = 3 \times 1 \times 9 = 27$.

    (a) Dentre os números de 1 a 999, quais são os que têm produto dos algarismos igual a 12, isto é, quais são os inteiros n tais que $1 \leq n < 1\,000$ e $P(n) = 12$?

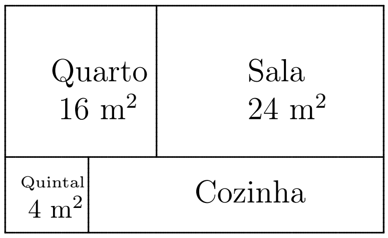
    (b) Quantos números inteiros existem entre 0 e 200 cujo produto dos algarismos seja igual a 0, isto é, quantos inteiros n existem tais que $1 \leq n < 200$ e $P(n) = 0$?

    (c) Quais são os números inteiros $1 \leq n < 200$ tais que $37 < P(n) < 45$?

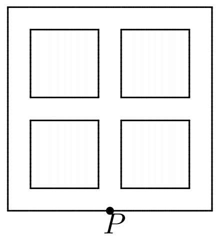
    (d) Dentre todos os inteiros de 1 a 250, qual é o número cujo produto dos algarismos é o maior possível?

91. ***Suco de laranja*** – Davi vai a um armazém que vende uma garrafa de suco de laranja por R$ 2,80 e uma caixa com seis dessas garrafas por R$ 15,00. Ele precisa comprar 22 garrafas para seu aniversário. Quanto ele gastará, no mínimo?

92. ***A casa da Rosa*** – A figura mostra a planta da casa da Rosa. O quarto e o quintal são quadrados. Qual é a área da cozinha?



93. ***O passeio do Matias*** – Matias passeia de bicicleta nas ruas em volta de quatro quarteirões perto de sua casa, dispostos como na figura. O seu passeio consiste em fazer o maior percurso possível, mas ele inventou uma regra para se divertir mais, a saber: ele pode passar várias vezes pelos cruzamentos das ruas, mas ele não pode passar mais do que uma vez pela mesma rua, devendo terminar seu passeio de bicicleta quando não puder mais respeitar essa condição. Os quatro quarteirões são quadrados, cada um com 100 metros de lado e a largura das ruas não é considerada relevante. Partindo do ponto indicado por P na figura, qual é o maior desses percursos de bicicleta que Matias pode fazer?

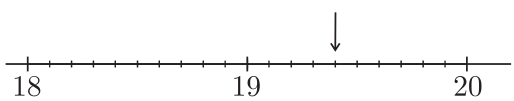


94. ***O adesivo dos carros oficiais*** – O prefeito de uma cidade decidiu colocar adesivo em cada carro oficial. O adesivo terá uma forma retangular, com seis quadrados dispostos em 2×3 e com três cores: um quadrado azul, dois quadrados amarelos e três quadrados verdes. Dentre quantos tipos diferentes de adesivo o prefeito poderá escolher?

95. ***Adição de números*** – Qual é o algarismo a em $a\,000 + a\,998 + a\,999 = 22\,997$?

96. ***Cubo perfeito e divisibilidade*** – Quais são os cubos perfeitos que dividem 9^4?

97. ***Localização de um ponto*** – Qual é o ponto indicado na figura?

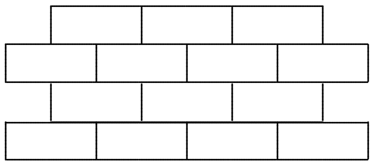


98. ***Cálculo de porcentagem*** – Se você acerta 58/84 das 84 questões de um teste, qual é o seu percentual de acertos?

99. ***Comparação de algarismos*** – Dizemos que um número é *ascendente* se cada um de seus algarismos for maior do que o algarismo que está à sua esquerda. Por exemplo, 2 568 é ascendente e 175 não é. Quantos números ascendentes existem entre 400 e 600?

100. ***Muro colorido*** – Um muro deve ser construído conforme a figura com 14 tijolos coloridos, disponíveis em amarelo, azul e vermelho, cujos preços estão dados na tabela. Se dois tijolos quaisquer que se toquem devem ser de cores diferentes, qual é o menor valor que se gastará na compra desses 14 tijolos?

tijolo	R$
amarelo	6
azul	7
vermelho	8



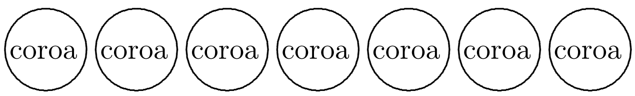
101. ***Divisores e fatoração*** – Decomponha 96 em dois fatores inteiros positivos cuja soma dos quadrados seja 208.

102. ***O retângulo do Luís*** – Luís desenhou um retângulo de 6×10 cm e quer dividi-lo em quatro partes. As áreas das 4 partes devem medir 8, 12, 16 e 24 cm^2. Desenhe como ele pode fazer essa divisão.

103. ***Comparação de números*** – Escreva em ordem crescente os números

$$\sqrt{121}, \qquad \sqrt[3]{729} \qquad \text{e} \qquad \sqrt[4]{38\,416}\,.$$

104. ***As moedas*** – Uma brincadeira começa com sete moedas alinhadas em cima de uma mesa, todas com a face coroa virada para cima. Para ganhar a brincadeira, é preciso virar algumas moedas, de tal modo que, no final, duas moedas vizinhas estejam sempre com faces diferentes viradas para cima. A regra da brincadeira é virar duas moedas vizinhas em cada jogada. Quantas jogadas são necessárias, no mínimo, para ganhar a brincadeira?

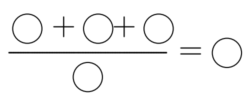


105. ***O preço do frango*** – O preço do quilograma de frango era R$ 1,00 em janeiro de 2000, quando começou a triplicar a cada 6 meses. Em quanto tempo o preço atingirá R$ 81,00?

(a) 1 ano (b) 2 anos (c) $2\,\frac{1}{2}$ anos (d) 13 anos (e) $13\,\frac{1}{2}$ anos

106. ***Excursões a Foz do Iguaçu*** – Em 2005, uma agência de turismo programou uma excursão para Foz do Iguaçu, distribuindo as pessoas em ônibus de 27 lugares, tendo sido necessário formar um ônibus incompleto, com 19 lugares ocupados. Em 2006, aumentou em 53 o número de participantes e a agência continuou a utilizar ônibus de 27 lugares. Quantos ônibus a mais foram necessários e quantas pessoas ficaram no ônibus incompleto em 2006?

107. ***As frações de Laura*** – Laura desenhou cinco círculos, dentro dos quais ela quer colocar números inteiros positivos, de tal modo que formem uma igualdade entre uma fração e seu valor inteiro.



De quantas maneiras pode Laura colocar os números 2, 3, 5, 6 e 11 dentro dos cinco círculos para que a igualdade seja verdadeira?

108. ***Cálculo da unidade*** – Qual é o algarismo da unidade do produto

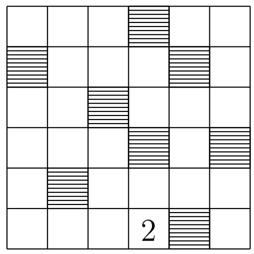
$$(5+1)(5^3+1)(5^6+1)(5^{12}+1)?$$

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 5 (e) 6

109. ***Números cruzados*** – Francisco escreveu 28 algarismos numa tabela 6×6 e pintou de preto as demais casas, como nas palavras cruzadas. Ele fez a lista de todos os números,

28	45	51	57	72	88
175	289	632	746	752	805
885	5 647	5 873	7 592	8 764	

em ordem crescente, que podem ser lidos horizontal ou verticalmente, excluindo os números de um só algarismo. Preencha a tabela escrevendo de volta os números de Francisco. Um algarismo já foi colocado.



110. ***Ovos e maçãs*** – Num certo armazém, uma dúzia de ovos e 10 maçãs tinham o mesmo preço. Depois de uma semana, o preço dos ovos caiu 10% e o da maçã subiu 2%. Quanto se gastará a mais na compra de uma dúzia de ovos e 10 maçãs?

(a) 2% (b) 4% (c) 10% (d) 12% (e) 12,2%

111. ***Dividindo números decimais*** – Sabendo que $144 \times 177 = 25\,488$, podemos concluir que $254{,}88 \div 0{,}177$ é igual a:

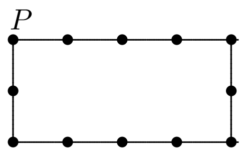
(a) 1 440; (b) 14,4; (c) 1,44; (d) 0,144; (e) 144.

112. ***Almoço dos amigos*** – Júlio e Denise almoçaram num restaurante que oferece três tipos de prato e três tipos de vitamina, cujos preços estão na tabela ao lado. Cada um escolheu um prato e uma vitamina. Júlio gastou 6 reais a mais do que Denise. Quanto Denise gastou?

	R$
prato simples	7
prato com carne	11
prato com peixe	14
vitamina de leite	6
vitamina de frutas	7
vitamina especial	9

113. ***Somas de três em três*** – Encontre quatro números inteiros positivos que, somados de três em três, dão somas 6, 7, 8 e 9.

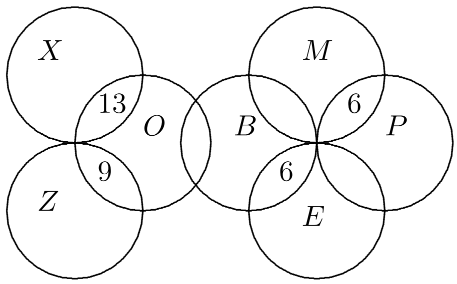
114. ***O passeio do Jorge*** – Jorge passeia por um caminho em forma de retângulo, onde estão dispostas 12 árvores, brincando de tocar cada árvore durante seu passeio. Primeiro ele toca a árvore do canto, assinalada com P na figura, e percorre 32 metros num mesmo sentido do percurso; aí ele volta 18 metros e depois retorna ao sentido inicial



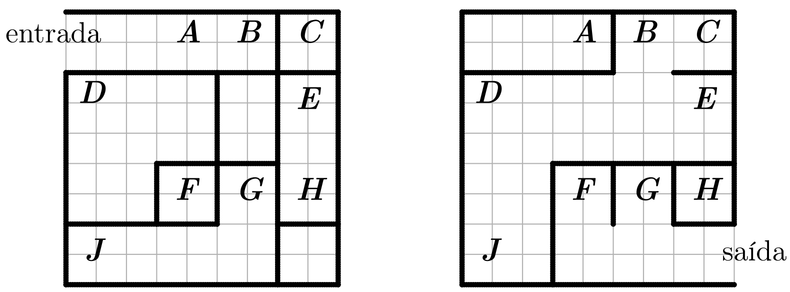
por mais 22 metros. Entre duas árvores consecutivas, a distância é de 5 m. Em quantas árvores ele tocou?

115. ***A descoberta do algarismo*** – Os quadrados dos números naturais de 1 a 99 foram escritos um após o outro, formando o número 14916253649.... Qual é o algarismo que ocupa a 100ª posição? (As posições são contadas da esquerda para a direita, portanto, a 1ª posição é a do 1, a 2ª é a do 4, e assim por diante.)

116. ***OBMEP*** – Cada um dos sete discos X, Z, O, B, M, E e P da figura tem um peso diferente, que varia de 1 a 7 g. Em algumas interseções de dois discos, indicamos a soma dos pesos desses dois discos. Qual é a soma dos pesos dos cinco discos O, B, M, E e P?



117. ***Prédio misterioso*** – As figuras mostram as plantas de dois andares de um prédio que guarda segredos muito valiosos. Há nove elevadores que atendem esses dois andares, representados por letras. Qual o caminho mais curto entre a entrada indicada de um andar e a saída indicada do outro?



118. ***Soma de frações*** – Qual é o valor de $\dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{100} + \dfrac{1}{1\,000} - \dfrac{1}{10\,000}$?

119. ***Biblioteca*** – A biblioteca de uma escola comprou 140 novos livros, ficando com $\dfrac{27}{25}$ do número de livros que tinha antes da compra. O número de livros antes dessa compra era:

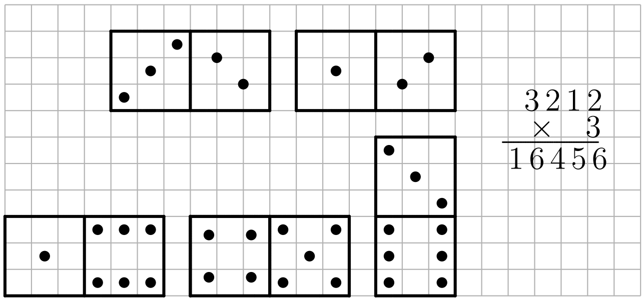
(a) 1 750; (b) 2 500; (c) 2 780; (d) 2 140; (e) 1 140.

120. ***Comparação de frações*** – Existem quantas frações menores do que 1, nas quais o numerador e o denominador são números inteiros positivos de um só algarismo?

121. ***Divisão com resto*** – Quais são os números que deixam resto 5 ao dividir 2 007?

122. ***Panelas*** – Uma panela pesa 645 g e uma outra 237 g. José divide 1 kg de carne entre as duas panelas, de modo que as duas, com seus conteúdos, ficam com o mesmo peso. Quanto de carne ele colocou em cada panela?

123. ***Dominós*** – Juliana representou uma multiplicação com 5 dominós. Seu irmão Bruno trocou dois dominós de posição e agora a multiplicação ficou errada. Troque de volta a posição de dois dominós para que a multiplicação fique novamente correta.



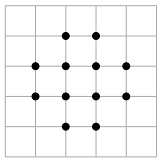
124. ***Código secreto*** – Antônio precisa descobrir um código de 3 algarismos diferentes A, B e C. Ele sabe que B é maior que A, que A é menor do que C e também que valem as igualdades seguintes.

$$\boxed{B}\boxed{B} + \boxed{A}\boxed{A} + \boxed{C}\boxed{C} = \boxed{2}\boxed{4}\boxed{2}$$

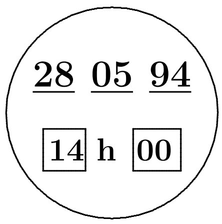
$$\boxed{B} \times \boxed{A} \times \boxed{C} = \boxed{3}\boxed{6}\boxed{0}$$

Qual é o código que Antônio procura?

125. ***Os doze pontos*** – Doze pontos estão marcados numa folha de papel quadriculado, conforme mostra a figura. Qual é o número máximo de quadrados que podem ser formados unindo quatro desses pontos?



126. ***Relógio*** – O grande relógio de parede da escola marca a data (dia, mês e ano) e as horas (horas e minutos), como na figura. Em que dia, mês e ano voltarão a aparecer juntos no relógio esses mesmos 10 algarismos pela primeira vez?



127. ***Lápis*** – Setenta e quatro lápis foram embalados em 13 caixas. Se a capacidade máxima de cada caixa é de seis lápis, qual é o número mínimo de lápis que pode haver em uma caixa?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 6

128. ***Contagem*** – Se o algarismo 1 aparece 171 vezes na numeração das páginas de um livro, quantas páginas tem o livro?

129. ***Viagem a Recife*** – Quando fui receber a medalha de ouro que conquistei na OBMEP, apareceram as seguintes informações nas telas da cabine de passageiros do meu voo para Recife:

Velocidade média:	864 km/h
Distância do local de partida:	1 222 km
Tempo de chegada a Recife:	1h20min

Se o avião manteve a mesma velocidade, então qual é a distância, aproximadamente, em quilômetros, entre Recife e a cidade em que começou meu voo?

(a) 2 300 (b) 2 400 (c) 2 500 (d) 2 600 (e) 2 700

130. ***Praça*** – Maria e João dão uma volta completa na praça, juntos, contando as casas que ficam em volta da praça. Eles começaram a contar as casas em pontos diferentes. A quinta casa da Maria é a décima segunda do João e a quinta casa do João é a trigésima da Maria. Quantas casas há em volta da praça?

131. ***Sequência de figuras*** – As figuras $\triangle$, $\clubsuit$, $\diamondsuit$, $\spadesuit$, $\heartsuit$ e $\square$ são repetidas indefinidamente na sequência

$$\triangle, \clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \heartsuit, \square, \triangle, \clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \heartsuit, \square, \ldots$$

(a) Que figura aparecerá na 1 000ª posição da sequência?

(b) Em qual posição aparece o milésimo $\diamondsuit$?

132. ***A brincadeira com o quadrado*** – Um quadrado de 1 m de lado foi cortado, com cortes paralelos aos seus lados, em quadradinhos de 1 mm de lado. Colocando-se lado a lado os quadradinhos, sem superposição, formou-se um retângulo de 1 mm de largura. Qual é o comprimento desse retângulo?

133. ***O código da Arca do Tesouro*** – Simão precisa descobrir um número escondido na tabela fornecida, que é o código da Arca do Tesouro.
Para descobrir o código, ele precisa formar todos os grupos de três algarismos que estejam em casas sucessivas, na horizontal ou na vertical, e cuja soma seja 14. Retirados da tabela todos os possíveis números desses grupos, o código é a soma dos números que restam na tabela. Qual é esse código?

5	9	4	9	4	1
6	3	7	3	4	8
8	2	4	2	5	5
7	4	5	7	5	2
2	7	6	1	2	8
5	2	3	6	7	1

134. ***Operações com decimais*** – Efetue a divisão $\dfrac{(0{,}2)^3+1}{0{,}2+1}$.

135. ***Fatores inteiros*** – Decompor 96 em dois fatores inteiros cuja soma dos quadrados seja 208.

136. ***Divisibilidade*** – No número $6a78b$, a denota o algarismo da unidade de milhar e b denota o algarismo da unidade. Se $6a78b$ for divisível por 45, então o valor de $a+b$ é:

(a) 5; (b) 6; (c) 7; (d) 8; (e) 9.

137. ***Número simples*** – Digamos que um número inteiro positivo seja *simples* se ele tiver apenas os algarismos 1 ou 2 (ou ambos). Quantos números menores do que 1 milhão são simples?

138. ***Venda de TV*** – O gerente de uma loja foi verificar qual tinha sido o preço de venda de uma televisão da marca VejoTudo em 2006. Ele encontrou uma fatura meio apagada, em que se podia ler "lote de 72 TVs da VejoTudo vendido por R$ _ 6.79_ , 00", mas o algarismo da dezena de milhar e o da unidade do preço pago pelo lote estavam ilegíveis. Qual foi o preço de venda de cada uma dessas televisões em 2006?

139. ***Chocolate*** – Henrique comprou barras de chocolate por R$ 1,35 cada uma. Ele pagou com uma nota de R$ 10,00 e recebeu um troco inferior a R$ 1,00. Quantas barras ele comprou?

140. ***O quadradinho*** – Qual é o valor de $\square$ em $\dfrac{6\,400\,000}{400} = 1{,}6 \times \square$?

141. ***Dois números*** – O produto de dois números de dois algarismos cada é 1 728. Se o máximo divisor comum (MDC) deles é 12, quais são esses números?

142. ***As idades dos irmãos*** – No dia de seu aniversário de 7 anos, em 13 de março de 2007, uma terça-feira, Carlos disse a seu irmão: "A contar de hoje, faltam 2 000 dias para você completar 15 anos." Em que dia da semana vai cair o aniversário do irmão de Carlos? Quantos anos terá Carlos nesse dia?

143. ***A mistura de concreto*** – Uma certa mistura de concreto é feita de cimento, areia e terra, na razão de 1 : 3 : 5 por quilo. Quantos quilos dessa mistura podem ser feitos com 5 quilos de cimento?

(a) $13\,\dfrac{1}{3}$ (b) 15 (c) 25 (d) 40 (e) 45

144. ***Ponto na escala*** – A que número corresponde o ponto P indicado na escala dada?

145. ***O pomar do Francisco*** – O pomar do Francisco tem macieiras, pereiras, laranjeiras, limoeiros e tangerineiras, dispostas em cinco filas paralelas, cada uma com uma única variedade de árvores, da seguinte maneira:

(a) as laranjeiras estão do lado dos limoeiros;

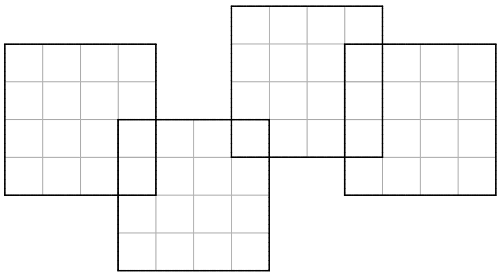
(b) as pereiras não estão do lado das laranjeiras nem dos limoeiros;

(c) as macieiras estão do lado das pereiras, mas não das laranjeiras, nem dos limoeiros.

Em que fila estão as tangerineiras?

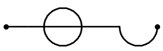
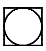
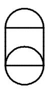
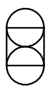
(a) 1ª (b) 2ª (c) 3ª (d) 4ª (e) 5ª

146. ***Quatro quadrados*** – Quatro quadrados iguais estão superpostos formando a figura dada. Se cada um dos quatro quadrados tem uma área de 3 cm^2, qual é a área dessa figura?

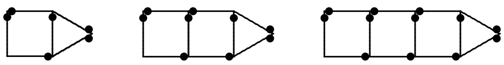


147. ***O fio de arame*** – Ernesto formou a figura abaixo com um fio de arame, em que cada segmento de reta tem o comprimento do diâmetro dos semicírculos.

Qual das figuras abaixo ele pode formar com esse mesmo fio de arame, cortando-o ou não, mas sem dobrá-lo ou desdobrá-lo?

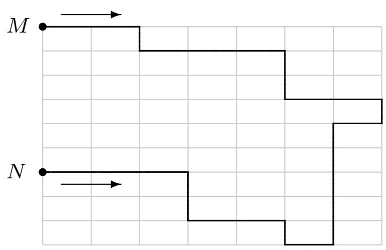
(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

148. ***Sequência de fósforos*** – Quantos fósforos são necessários para formar o oitavo termo da sequência cujos três primeiros termos estão dados?



(a) 21 (b) 24 (c) 27 (d) 30 (e) 34

149. ***O trajeto das formiguinhas*** – As formiguinhas Maricota e Nandinha passeiam numa varanda cujo chão é formado por lajotas retangulares de 4 cm de largura por 6 cm de comprimento, conforme indicado na figura. Maricota parte do ponto M, Nandinha parte do N e, ambas, andam apenas pelos lados das lajotas, percorrendo o trajeto no sentido indicado na figura.



(a) As duas formiguinhas se encontram depois de andarem uma mesma distância. Qual foi essa distância?

(b) Em que ponto elas se encontraram?

150. ***A soma é 100*** – A soma de três números é 100, dois são primos e um é a soma dos outros dois.

(a) Qual é o maior dos três números?

(b) Dê um exemplo de tais três números.

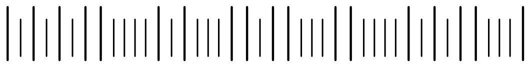
(c) Quantas soluções existem para esse problema?

151. ***Código de barras*** – Um serviço postal usa barras curtas e barras longas para representar seu Código de Endereçamento Postal (CEP) composto por oito algarismos, em que a barra curta corresponde ao 0 (zero) e a longa ao 1. A primeira e a última barras não fazem parte do código e a conversão do código é dada como segue.

$$\begin{array}{ll} 11000 = 0 & 01100 = 5 \\ 00011 = 1 & 10100 = 6 \\ 01010 = 2 & 00001 = 7 \\ 00101 = 3 & 10001 = 8 \\ 00110 = 4 & 10010 = 9 \end{array}$$

(a) Escreva o CEP 36470130 na forma de código de barras.

(b) Identifique o CEP que representa o código de barras seguinte.



152. ***Atletas da escola*** – Numa escola, um quarto dos alunos joga somente vôlei, um terço joga somente futebol, 300 praticam os dois esportes e 1/12 nenhum desses dois esportes.

(a) Quantos alunos tem a escola?

(b) Quantos alunos jogam somente futebol?

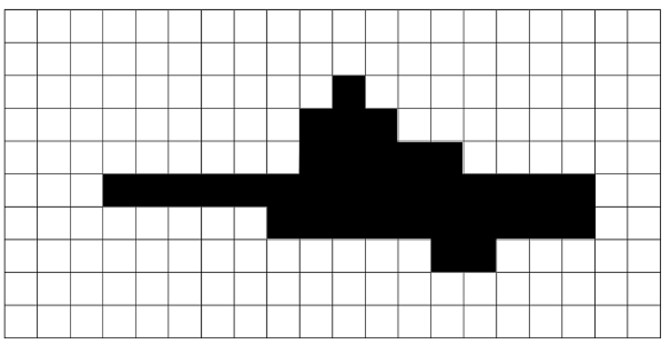
(c) Quantos alunos jogam futebol?

(d) Quantos alunos praticam pelo menos um dos dois esportes?

153. ***Dízima periódica*** – Obtenha o algarismo da 1 997ª casa decimal de cada uma das frações seguintes. (a) $\dfrac{1}{22}$ (b) $\dfrac{1}{27}$

154. ***Ana na corrida*** – Para ganhar uma corrida, Ana precisa completar os últimos cinco quilômetros em menos de 20 minutos. Qual deve ser sua velocidade mínima, em km/h?

155. ***Quadradinhos e o buraco*** – Quantos quadradinhos foram retirados do tabuleiro de 10×20 quadradinhos da figura? Se o lado de cada quadradinho mede 1 cm, qual é a área e qual é o perímetro do "buraco"?



156. ***Quadrados perfeitos no retângulo*** – Complete as seis casas da tabela dada, colocando um algarismo em cada uma, de modo que os dois números de três algarismos formados na horizontal e os três números de dois algarismos formados na vertical sejam quadrados perfeitos.

(a) Quais são os números?

(b) Quantas soluções existem?

157. ***Aula de divisão*** – Na aula sobre divisão, a professora pediu que seus alunos colocassem números no lugar das estrelas. Quais são esses números?

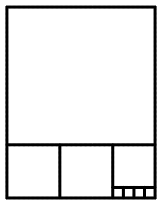
(a) $\begin{array}{r|l} 38 & \bigstar \\ \cline{2-2} \underbrace{4} & \star \end{array}$ (b) $\begin{array}{r|l} 75 & 12 \\ \cline{2-2} \underbrace{\bigstar} & \star \end{array}$ (c) $\begin{array}{r|l} \star & 3 \\ \cline{2-2} \underbrace{\bigstar} & 7 \end{array}$ (d) $\begin{array}{r|l} 42 & \star \\ \cline{2-2} \underbrace{\bigstar} & 5 \end{array}$

158. ***Linhas de ônibus*** – No ponto de ônibus perto de sua casa, Quinzinho pode pegar os ônibus de duas linhas para ir à escola. Os ônibus de uma linha passam de 15 em 15 minutos e os da outra de 25 em 25 minutos, sendo que às 7h30m da manhã os ônibus das duas linhas passam juntos.

(a) A que horas passarão juntos novamente?

(b) Entre as 7h30min da manhã e a meia noite, quais são os horários em que os ônibus passam juntos nesse ponto perto da casa de Quinzinho?

159. ***Quadrados dentro de um retângulo*** – O retângulo da figura está dividido em oito quadrados. O lado do menor quadrado mede 1 cm.



(a) Quanto mede os lados dos outros quadrados?

(b) Qual é o perímetro desse retângulo?

160. ***Festa na escola*** – A professora Ana foi comprar pão de queijo para homenagear os alunos premiados na OBMEP, sendo que

- cada 100 gramas de pão de queijo custam R$ 3,20 e correspondem a 10 pães de queijo; e
- cada pessoa come, em média, 5 pães de queijo.

Além da professora, estarão presentes à festa 16 alunos, um monitor e 5 pais de alunos. A precisão da balança da padaria é de 100 gramas.

(a) Quantos gramas de pão de queijo ela deve comprar para que cada pessoa possa comer, pelo menos, cinco pães?

(b) Nesse caso, quanto a professora gastará?

(c) Se cada pessoa comer cinco pães de queijo, sobrará algum pão de queijo?

161. ***Ai que fome*** – Maria está olhando a tabela seguinte.

Salgados	**Bebidas**	**Doces**
Empada: R$ 3,90	Refrigerante: R$ 1,90	Sorvete: R$ 1,00
Sanduíche: R$ 2,20	Suco: R$ 1,20	Bombom: R$ 0,50
Pastel: R$ 2,00	Refresco: R$ 1,00	Cocada: R$ 0,40

Maria possui 5 moedas de 50 centavos, 7 moedas de 25 centavos, 4 moedas de 10 centavos e 5 moedas de 5 centavos.

(a) Quantos reais Maria possui?

(b) Se Maria precisa guardar 90 centavos para a passagem de ônibus, quais os possíveis lanches que incluam um salgado, uma bebida e um doce ela poderá pedir?

162. ***Advinhe*** – Tenho alguns números naturais cujo único divisor comum é 1. Se eu somar 50 a cada um deles, encontro números de dois algarismos. Se eu subtrair 32 de cada um deles, também encontro números naturais de dois algarismos. Quais são os números que eu tenho?

163. ***Produto de consecutivos*** – Dentre os números 712, 1 262 e 1 680, qual é o único que pode ser escrito como um produto de quatro números naturais consecutivos?

164. ***Palíndromos*** – O ano de 2002 é um *palíndromo* porque não se altera quando for lido da direita para a esquerda.

373 e 1 221
foram anos palíndromos.

(a) Qual será o próximo ano palíndromo depois de 2002?

(b) O último ano palíndromo, 1991, foi ímpar. Quando será o próximo ano palíndromo ímpar?

(c) O último ano palíndromo primo ocorreu há mais de 1 000 anos, em 929. Quando ocorrerá o próximo ano palíndromo primo?

165. ***O maior MDC*** – Quais são os seis números de dois algarismos cujo máximo divisor comum é o maior possível?

166. ***Quantidade de água na Terra*** – A Terra tem, aproximadamente, um volume de 1 360 000 000 km^3 de água, que se distribui entre os oceanos, os mares, as geleiras, as regiões subterrâneas (os aquíferos), os lagos, os rios e a atmosfera. Somente a água encontrada nesses três últimos itens oferece um acesso fácil ao consumo humano. Com estes dados, complete a tabela a seguir.

Especificações	Volume de água (km^3)	Percentual	Forma decimal do percentual
Água salgada		97%	
Água doce	40 000 000		
Gelo		1,8%	
Água subterrânea			0,00960
Lagos e rios	250 000		
Vapor de água			0,00001

167. ***Balas*** – De quantas formas podemos repartir 14 balas idênticas entre três crianças de modo que cada criança receba, no mínimo, três balas?

168. ***Minutos*** – Uma prova de Matemática começa às 12h35min e tem uma duração de $4\,\dfrac{5}{6}$ horas. A que horas termina a prova?

169. ***Menor número*** – Qual é o menor número de cinco algarismos divisível por 4 que se pode formar com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 9?

170. ***Contas do papagaio*** – Antônio tem um papagaio que faz contas fantásticas com números inteiros. Quando Antônio sopra certos números em seu ouvido, o papagaio multiplica esse número por 5, depois soma 14, daí divide o resultado por 6 e, finalmente, subtrai 1, gritando o resultado em seguida. Entretanto, o papagaio não sabe nada sobre decimais, de modo que, às vezes, fica sem poder gritar resposta alguma.

    (a) Se Antônio soprar o número 8, qual número o papagaio gritará?

    (b) Se o papagaio gritou 3, qual foi o número que Antônio soprou em seu ouvido?

    (c) Porque o papagaio nunca grita o número 7?

    (d) Quais são os números que, soprados por Antônio, provocam uma resposta do papagaio?

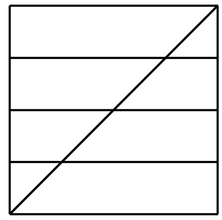
171. ***Soma maior do que 34*** – Quantos números de quatro algarismos existem cuja soma dos algarismos seja maior do que 34?

172. ***Nenhum 1*** – Roberto quer escrever o número 111 111 como um produto de dois números, nenhum dos quais terminado em 1. Isso é possível? Por quê?

173. ***Números equilibrados*** – Um número é dito *equilibrado* se um de seus algarismos é a média aritmética dos outros. Por exemplo, 132, 246 e 777 são equilibrados. Quantos números equilibrados de três algarismos existem?

174. ***Números primos*** – Quais são os números cujos triplos somados com 1 dão um número primo entre 70 e 110?

175. ***Quadro moderno*** – Para fazer um quadro bem moderno para sua escola, Roberto divide uma tela quadrada em oito partes com quatro faixas de mesma largura e uma diagonal, como na figura. Ele pinta o quadro de azul e verde, de modo que duas partes vizinhas sempre tenham cores diferentes. No final, ele repara que usou mais verde do que azul. Que fração do quadro foi pintada de azul?

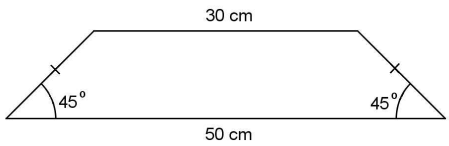


176. ***Encontro de amigos*** – Embora eu tenha certeza de que meu relógio está 5 minutos adiantado, na realidade ele está 10 minutos atrasado. Por outro lado, o relógio do meu amigo está realmente 5 minutos adiantado, embora ele pense que seu relógio esteja certo. Nós marcamos um encontro para as 10 horas e planejamos chegar pontualmente. Quem chegará em primeiro lugar? Depois de quanto tempo chegará o outro?

177. ***Trabalho comunitário*** – Uma classe tem 22 alunos e 18 alunas. Durante as férias, 60% dos alunos dessa classe foram prestar trabalho comunitário. No mínimo, quantas alunas participaram desse trabalho?

(a) 1 (b) 2 (c) 4 (d) 6 (e) 8

178. ***Área de trapézios*** – Unindo quatro trapézios idênticos, que têm lados não paralelos iguais e bases medindo 50 e 30 cm, como o da figura dada, podemos formar um quadrado de 2 500 cm^2 de área, que tem um "buraco" quadrado no meio. Qual é a área, em cm^2, de cada um dos quatro trapézios?



(a) 200 (b) 250 (c) 300 (d) 350 (e) 400

179. ***Adivinhação*** – Pensei em dois números de dois algarismos, que não possuem algarismos em comum, sendo um o dobro do outro. Além disso, os algarismos do menor número são a soma e a diferença dos algarismos do maior número. Quais são os dois números?

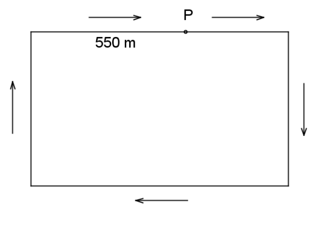
180. ***Dezoito números consecutivos*** – Escreva dezoito números consecutivos de três algarismos e verifique que pelo menos um deles é divisível pela soma de seus algarismos. Isso é sempre verdade. Ou seja, se você escrever dezoito números consecutivos de três algarismos, então pelo menos um deles será divisível pela soma de seus algarismos. Mostre esse fato.

181. ***Completar uma tabela*** – Descubra a regra utilizada para as casas já preenchidas e complete a tabela. Qual é o valor de **A**?

0	1	2	3	4
1	2	5	10	
2				
3				
4				**A**

182. ***Procurando múltiplos de 9*** – Consideremos um conjunto formado por dez números naturais diferentes. Se calcularmos todas as diferenças entre esses números, pelo menos uma dessas diferenças será um múltiplo de 9?

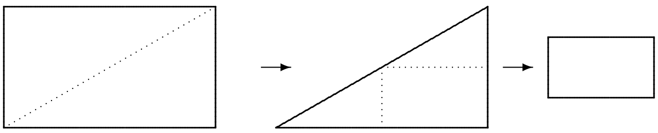
183. ***Correndo numa praça*** – Um atleta costuma correr 15,5 km ao redor de uma grande praça retangular de 900×600 m. Ele inicia a corrida sempre do ponto P, situado a 550 m de um dos vértices, correndo no sentido horário, como mostra a figura. Em que ponto da praça ele para?



184. ***Ovos para um bolo*** – Uma doceira foi ao mercado comprar ovos para fazer 43 bolos, todos com a mesma receita, que requer menos do que nove ovos. O vendedor repara

que se tentar embrulhar os ovos que a doceira comprou em grupos de dois, ou de três, quatro, cinco, ou seis ovos, sempre sobra um ovo. Quantos ovos ela usa em cada bolo? Qual é o menor número de ovos que a doceira vai gastar para fazer os 43 bolos?

185. ***Cortando uma cartolina*** – Uma folha retangular de cartolina foi cortada ao longo de sua diagonal. Num dos pedaços obtidos, foram feitos dois cortes paralelos aos dois lados menores, pelos pontos médios desses lados. Ao final, sobrou um retângulo de 129 cm de perímetro. O desenho dado indica a sequência de cortes.



Qual era o perímetro da folha antes do corte?

186. ***A soma errada*** – A soma ao lado está incorreta. Para corrigi-la, basta substituir um certo algarismo em todos os lugares que ele aparece na conta por um outro algarismo. Qual é o algarismo errado e qual é seu substituto correto?

$$\begin{array}{r} 742586 \\ +829430 \\ \hline 1212016 \end{array}$$

187. ***Número de cinco algarismos*** – Os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 foram usados, cada um uma única vez, para escrever um certo número $a\,b\,c\,d\,e$ de cinco algarismos tal que $a\,b\,c$ é divisível por 4, $b\,c\,d$ é divisível por 5 e $c\,d\,e$ é divisível por 3. Encontre esse número.

188. ***Tabela misteriosa*** – Complete a tabela 6×6 de tal modo que, em cada linha e cada coluna, apareçam apenas múltiplos de um dos números

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12.

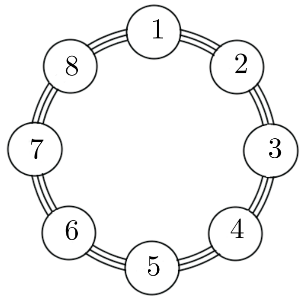
Além disso, é permitido repetir apenas um número na tabela.

32			40		
				49	
		22			
	15				
		24			
				42	

189. ***Habitantes e esporte*** – Numa certa cidade com quase trinta mil habitantes, exatamente dois nonos dos habitantes são homens que praticam esporte somente nos finais de semana e dois quinze avos são mulheres que praticam esporte somente nos finais de semana. O número de habitantes que não pratica esporte é o quíntuplo dos que praticam esporte regularmente. Com esses dados, complete a tabela dada.

Não praticam esporte		Praticam esporte somente nos fins de semana		Praticam esporte regularmente		População
fem.	masc.	fem.	masc.	fem.	masc.	total
8 563	7 582				1 252	

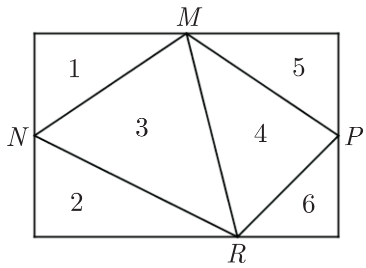
190. ***Botões luminosos*** – No mecanismo luminoso da figura, cada um dos oito botões pode acender nas cores verde ou azul. O mecanismo funciona do seguinte modo: ao ser ligado, todos os botões acendem a luz azul, e se apertamos um botão, esse botão e seus dois vizinhos trocam de cor. Se ligarmos o mecanismo e apertarmos sucessivamente os botões 1, 3 e 5, qual será o número de luzes verdes que estarão acesas no final?



(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6 (e) 7

191. ***Qual é o número?*** – Um número de seis algarismos começa por 1. Se deslocamos esse algarismo 1 da primeira para a última posição à direita, obtemos um novo número de seis algarismos, que é o triplo do número de partida. Qual é esse número?

192. ***Jardim variado*** – Um jardim retangular de 120 por 80 m foi dividido em seis regiões, conforme indicado na figura, em que N, M e P são pontos médios dos lados e R divide o comprimento do lado na razão 1/3. Em cada região será plantado um dos seguintes tipos de flor: rosa, margarida, cravo, bem-me-quer, violeta e bromélia, cujos preços, por m^2, estão indicados na tabela. Quais são as possíveis escolhas das flores em cada região, de modo a se gastar o mínimo possível?



Tipo	Preço por m^2
rosa	3,50
margarida	1,20
cravo	2,20
bem-me-quer	0,80
violeta	1,70
bromélia	3,00

193. ***O algarismo 3*** – Luis escreveu a sequência dos números naturais, ou seja,

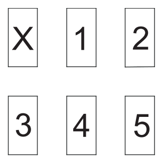
$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots .$$

Quando ele escreveu o algarismo 3 pela 25ª vez?

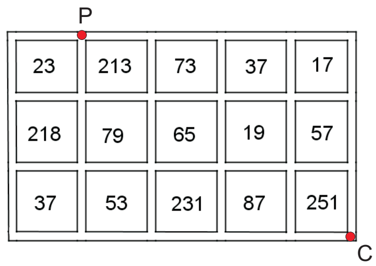
194. ***Soma de potências*** – Será o número $3^{444} + 4^{333}$ divisível por 5?

195. ***Telefonemas*** – João mora em Salvador e seus pais em Recife. Para matar a saudade, ele telefona para seus pais a cada três dias. O primeiro telefonema foi feito num domingo, o segundo telefonema na quarta feira seguinte, o terceiro telefonema no sábado, e assim por diante. Em qual dia da semana João telefonou para seus pais pela centésima vez?

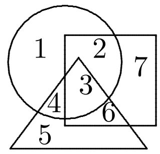
196. ***O maior produto*** – Com os algarismos de 1 a 5 e um sinal $\times$ de multiplicação, Clara forma o produto de dois números, com o sinal $\times$ entre eles. Como Clara deve colocar os cartões para obter o maior produto possível?



197. ***O caminho da Joaninha*** – Dona Joaninha quer atravessar um pátio ladrilhado com azulejos quadrados numerados, como mostra a figura dada. Ela vai partir do ponto P e quer chegar ao ponto C, andando somente ao longo dos lados dos azulejos. Dona Joaninha não quer ter números primos imediatamente à sua direita ao longo de todo o percurso. Qual é o menor percurso que ela pode fazer?



198. ***O lugar dos amigos*** – Sete amigos traçaram um triângulo, um quadrado e um círculo. Cada um marcou seu lugar com um número e pronunciou uma frase.



Ana:	*"Eu não falo coisa alguma."*
Bento:	*"Eu estou dentro de uma única figura."*
Celina:	*"Eu estou dentro das três figuras."*
Diana:	*"Eu estou dentro do triângulo mas não do quadrado."*
Elisa:	*"Eu estou dentro do triângulo e do círculo."*
Fábio:	*"Eu não estou dentro de um polígono."*
Guilherme:	*"Eu estou dentro do círculo."*

Encontre o lugar de cada um.

199. ***Quadrado perfeito?*** – Cada um dos cinco números abaixo tem cem algarismos e é formado pela repetição de um ou dois algarismos, como segue.

$$\begin{aligned} N_1 &= 333333\ldots3 \\ N_2 &= 666666\ldots6 \\ N_3 &= 151515\ldots15 \\ N_4 &= 212121\ldots21 \\ N_5 &= 272727\ldots27 \end{aligned}$$

Algum desses números é um quadrado perfeito?

200. ***Preenchendo quadradinhos*** – Complete os quadradinhos com os números 1, 2, 3, 5 e 6.

$$(\square + \square - \square) \times \square \div \square = 4$$

201. ***Os três números*** – Sofia brinca de escrever todos os números de quatro algarismos diferentes que se pode escrever com os algarismos 1, 2, 4 e 7. Ela soma três desses números – todos diferentes – e obtém 13 983. Quais são esses três números?

202. ***Preencher uma tabela*** – Jandira deve terminar de preencher uma tabela 4×4 que já tem duas casas preenchidas com os números 1 e 2, conforme indicado na figura. Duas casas são consideradas vizinhas se têm um vértice ou um lado em comum. As regras que ela precisa respeitar são:

1	**2**		

- uma casa só pode ser preenchida se alguma de suas casas vizinhas já contiver algum número;
- ao preencher uma casa, deve-se colocar a soma de todos os números que já constam em suas casas vizinhas.

Qual é o maior número que é possível escrever na tabela?

203. ***Olimpíada de Pequim*** – Na Olimpíada de Pequim sentaram-se a uma mesa quadrada, conforme indicado a seguir, as mulheres Maria e Tânia e os homens Juan e David. Todos são atletas e cada um deles pratica um esporte diferente: natação, vôlei, ginástica e atletismo.

(a) Quem pratica a natação estava à esquerda de Maria.
(b) Quem pratica ginástica estava em frente a Juan.
(c) Tânia e David sentaram-se lado a lado.
(d) Uma mulher sentou-se ao lado de quem pratica volei.

Qual dos atletas pratica atletismo?

204. ***Culturas diferentes*** – Jorge, que mora em Recife, se corresponde com seu amigo inglês Ralph, que mora na Inglaterra. Os dois se compreendem muito bem nas duas línguas, mas têm um problema com as datas pois, no Brasil, a data 08/10 significa 08 de outubro e, na Inglaterra, 10 de agosto. Por causa disso, os dois combinaram não se escrever nos dias em que a data for ambígua. Eles preferem datas como 25/03, que só pode significar 25 de março.

(a) Em quais das datas a seguir Jorge e Ralph não podem se escrever?

(i) 3 de dezembro (ii) 18 de agosto (iii) 5 de maio

(b) Quando ocorrem os maiores períodos em que os dois amigos não podem se escrever?

205. ***Uma liquidação*** – Na liquidação da loja SUPER-SUPER todos os produtos estão 50% mais baratos e, aos sábados, existe ainda um desconto adicional de 20%. Carla comprou uma calça antes da liquidação, e agora ela se lamenta: *No sábado eu teria economizado R$ 50,40 na calça.* Qual era o preço da calça antes da liquidação?

206. ***Número com muitos zeros*** – Se a representa o número $0,\underbrace{000\ldots000}_{2009\text{ zeros}}1$, então qual das expressões a seguir representa o maior número?

(a) $3+a$ (b) $3-a$ (c) $3a$ (d) $3/a$ (e) $a/3$

207. ***Corrida das tartarugas*** – Cinco tartarugas apostaram uma corrida em linha reta e na chegada a situação foi a seguinte: Sininha estava 10 m atrás de Olguinha e 25 m à frente de Rosinha, que estava 5 m atrás de Elzinha, que estava 25 m atrás de Pulinha. Qual foi a ordem de chegada?

208. ***Que memória...*** – Esquecinaldo tem péssima memória para guardar números, mas ótima para lembrar sequências de operações. Por isso, para lembrar do seu código bancário de cinco algarismos, ele consegue se lembrar que o código não tem algarismos repetidos, nenhum dos algarismos é zero, os dois primeiros algarismos formam uma potência de 5, os dois últimos formam uma potência de 2, o do meio é um múltiplo de 3 e a soma de todos os algarismos é um número ímpar. Agora ele não precisa mais decorar o número, porque ele sabe que seu código é o maior número que satisfaz essas condições. Qual é esse código?

209. ***Uma fração irredutível*** – Encontre uma fração irredutível tal que o produto de seu numerador pelo denominador seja $2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \cdots \times 10$. Quantas dessas frações irredutíveis existem?

210. ***Transformar em decimal*** – Escreva o resultado das seguintes expressões na forma decimal.

(a) $7 \times \frac{2}{3} + 16 \times \frac{5}{12}$ (b) $5 - \left(2 \div \frac{5}{3}\right)$ (c) $1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{3}{1+4}}$

211. ***Uma sequência especial*** – Escrevendo sucessivamente os números naturais, obtemos a sequência

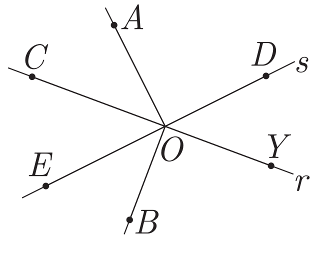
$$1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,10\,11\,12\,13\,14\,15\,16\,17\,18\,19\,20\,21\,22\ \ldots$$

Qual é o algarismo que está na 2 009ª posição dessa sequência?

212. ***Cortar um retângulo*** – Como podemos cortar um retângulo de 13 por 7 cm em treze retângulos diferentes sem deixar sobras?

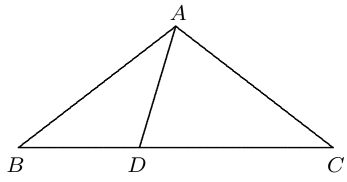
213. ***Medida de ângulo*** – Na figura dada, $A\widehat{O}D$ e $B\widehat{O}Y$ são ângulos retos e a medida de $D\widehat{O}Y$ está entre 40° e 50°. Além disso, os pontos C e Y estão sobre a reta r, enquanto D e E estão sobre a reta s. O possível valor para a medida de $A\widehat{O}C$ está entre

(a) 30° e 40°;
(b) 40° e 50°;
(c) 50° e 60°;
(d) 40° e 60° ou
(e) não pode ser determinado.



214. ***Perímetros e áreas*** – Um quadrado tem $\sqrt{3} + 3$ cm de lado e as dimensões de um retângulo, em centímetros, são $\sqrt{2}$ e $\sqrt{72} + 3\sqrt{6}$. Qual dos dois tem maior área? E maior perímetro?

215. ***Cálculo de ângulo*** – Encontre a medida do ângulo $B\widehat{A}D$, sabendo que $D\widehat{A}C = 39°$, $AB = AC$ e $AD = BD$.



216. ***O caminho da formiga*** – Uma formiga sai de um ponto A, anda 7 cm para a esquerda, 5 cm para cima, 3 cm para a direita, 2 cm para baixo, 9 cm para a direita, 2 cm para baixo, 1 cm para a esquerda e 1 cm para baixo, chegando no ponto B. Qual é a distância, em cm, entre A e B?

(a) 0 (b) 1 (c) 4 (d) 5 (e) 7

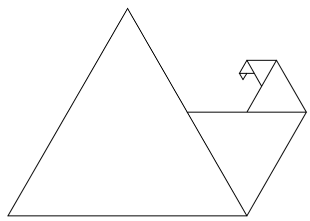
217. ***Menino mentiroso*** – Joãozinho sempre mente nas terças-feiras, quintas-feiras e sábados e, no restante dos dias da semana, sempre fala a verdade. Um dia, Pedrinho encontra Joãozinho e ocorre o diálogo seguinte.

- Pedrinho pergunta: Que dia é hoje?
- Joãozinho responde: Sábado.
- Pedrinho pergunta: E que dia será amanhã?
- Joãozinho responde: Quarta-feira.

Em que dia da semana Pedrinho encontrou Joãozinho?

218. ***Encontre quatro números*** – Observe que os números 1, 2, 3 e 6 têm uma propriedade notável: a soma de três quaisquer deles é divisível pelo quarto número. Encontre quatro números distintos de três algarismos com essa mesma propriedade notável.

219. ***Colando seis triângulos*** – Construa uma figura com seis triângulos equiláteros adjacentes, o primeiro com lado de comprimento 1 cm e os triângulos seguintes com lado igual à metade do lado do triângulo anterior, como indicado na figura dada. Qual é o perímetro dessa figura?



220. ***Os livros da Elisa*** – Elisa tem 24 livros de ciências e outros de matemática e literatura. Se Elisa tivesse um livro a mais de matemática, então um nono de seus livros seria de matemática e um quarto de literatura. Se Elisa tem menos do que 100 livros, quantos livros de matemática ela possui?

221. ***Substituindo pela soma*** – Começando com número natural, Márcio substitui esse número pela soma de seus algarismos, obtendo um novo número, com o qual ele repete o processo, até chegar, finalmente, num número de apenas um algarismo. Por exemplo, Márcio substitui 1 784 102 por 23 e, em seguida, por 8. Ele também aplica esse processo a listas de N números naturais, substituindo cada número da lista pela soma de seus algarismos, obtendo, assim, uma nova lista de N números, com a qual ele repete o processo, até chegar numa lista final de N números, cada um de apenas um algarismo.

(a) Começando com $3^{2\,009}$, qual é o número final de apenas um algarismo?

(b) Começando com $17^{2\,009}$, qual é o número final de apenas um algarismo?

(c) Começando com a lista dos primeiros 20 092 009 números naturais, a lista final tem mais algarismos 4 ou 5? Quantos 9 tem a lista final?

222. ***Uma brincadeira em sala de aula*** – A professora Raquel inventou a seguinte brincadeira: escrevendo um número inteiro positivo no quadro, acrescente três unidades ao número se ele for ímpar e divida o número por dois se ele for par. Essa operação pode ser feita diversas vezes. A professora está interessada em obter, ao final, o número 1 e perguntou para a classe: Como obter o número 1 após três operações? E após quatro operações? E após cinco operações?

223. ***Calcule a idade*** – Laura e sua avó Ana acabaram de descobrir que, no ano passado, suas idades eram divisíveis por 8 e que, no próximo ano, serão divisíveis por 7. Vovó Ana ainda não é centenária. Qual é a idade de Laura?

224. ***Divisões e restos*** – O dobro de um número dividido por 5 deixa resto 1. Qual é o resto da divisão desse número por 5?

225. ***Preenchendo o círculo*** – Cada um dos sinais $\square$, $\boxplus$, $\boxtimes$, $\boxminus$ e $\boxdot$ representa um número de um algarismo. Descubra quais são esses números e complete o número que falta no círculo em branco.

$$47 \xrightarrow{\times \square} 423 \xrightarrow{\times \boxplus/\boxdot} 282 \xrightarrow{\times \boxminus} \bigcirc \xrightarrow{+\ \boxdot\boxtimes} 1\,448$$

Nível 2

1. ***População*** – Em 1998, a população do Canadá era de 30,3 milhões. Qual das opções abaixo representa a população do Canadá em 1998?

   (a) 30 300 000 (b) 303 000 000 (c) 30 300 (d) 303 300 (e) 30 300 000 000

2. ***Réguas em 15 minutos*** – Uma certa máquina é capaz de produzir oito réguas por minuto. Quantas réguas essa máquina consegue produzir em 15 minutos?

   (a) 104 (b) 110 (c) 112 (d) 128 (e) 120

3. ***Alturas iguais*** – Luíza, Maria, Antônio e Júlio são irmãos. Dois deles têm a mesma altura. Sabe-se que

   - Luíza é maior que Antônio;
   - Antônio é maior do que Júlio;
   - Maria é menor que Luíza;
   - Júlio é menor do que Maria.

   Quais deles têm a mesma altura?

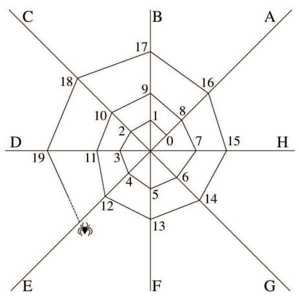
   (a) Maria e Júlio (c) Antônio e Luíza (e) Antônio e Maria
   (b) Júlio e Luíza (d) Antônio e Júlio

4. ***Unidade*** – O algarismo da unidade do número $1 \times 3 \times 5 \times 79 \times 97 \times 113$ é

   (a) 1 (b) 3 (c) 5 (d) 7 (e) 9

5. ***Em que fio?*** – A, B, C, D, E, F, G e H são os fios de apoio que uma aranha usa para construir sua teia, conforme mostra a figura. A aranha continua seu trabalho. Sobre qual fio de apoio estará o número 118?

   (a) B
   (b) D
   (c) E
   (d) G
   (e) H



Para resolver as duas próximas questões, utilize as informações da tabela dada, que mostra o desempenho das seleções do grupo A da Copa do Mundo de 2002. Nessas partidas de futebol, a equipe vencedora ganha três pontos e a perdedora não ganha nem perde pontos; em caso de empate, as duas ganham um ponto.

Seleção	**J**	**V**	**E**	**D**	**GP**	**GC**	**P**
Dinamarca	3	2	1	0	5	2	7
Senegal	3	1	2	0	5	4	**?**
Uruguai	3	0	2	1	4	**?**	2
França	3	0	1	2	0	3	1

Legenda: **J** – jogos, **V** – vitórias, **E** – empates, **D** – derrotas, **GP** – gols marcados, **GC** – gols sofridos, **P** – pontos.

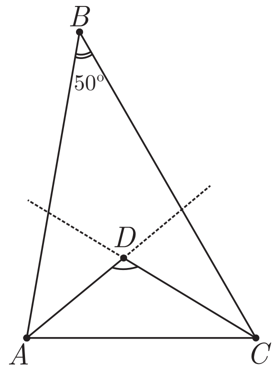
6. ***Pontos ganhos*** – Quantos pontos obteve a seleção do Senegal?

   (a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6 (e) 7

7. ***Gols sofridos*** – Quantos gols sofreu a seleção do Uruguai?

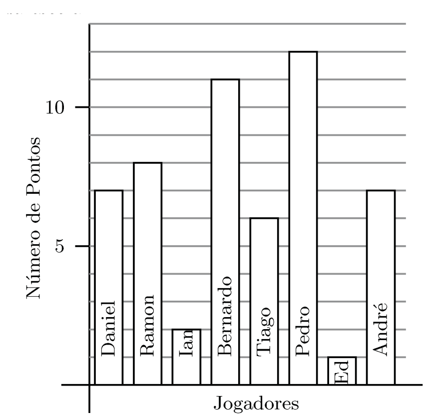
   (a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

8. ***Qual é o ângulo?*** – Na figura, temos $\widehat{B} = 50°$, sendo AD e CD as bissetrizes dos ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$, respectivamente. Qual é a medida do ângulo $A\widehat{D}C$?



   (a) 90°
   (b) 100°
   (c) 115°
   (d) 122,5°
   (e) 125°

9. ***Basquete*** – O gráfico mostra o número de pontos que cada jogador da seleção de basquete da escola marcou no último jogo. O número total de pontos marcados pela equipe foi



   (a) 54
   (b) 8
   (c) 12
   (d) 58
   (e) 46

10. ***Telefone*** – Geni é cliente de uma companhia telefônica que oferece o seguinte plano:

    - tarifa mensal fixa de R$ 18,00;
    - gratuidade em 10 horas de ligações por mês;
    - R$ 0,03 por minuto que exceder as 10 horas gratuitas.

    Em janeiro, Geni usou seu telefone por 15 horas e 17 minutos e, em fevereiro, por 9 horas e 55 minutos. Qual foi a despesa de Geni com telefone nesses dois meses, em reais?

    (a) 45,51 (b) 131,10 (c) 455,10 (d) 13,11 (e) 4,55

11. ***Área*** – Na figura dada, temos dois quadrados. O lado do maior mede $a + b$ e o do menor a. Qual é a área da região cinza destacada?

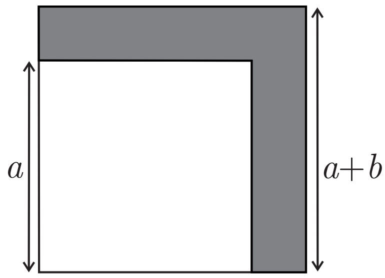
(a) b

(b) $a+b$

(c) a^2+2ab

(d) b^2

(e) $2ab+b^2$



12. ***Comprando sorvete*** – Veja as promoções de dois supermercados:

Supermercado A	**Supermercado B**
6 latas de 3 litros do sorvete QUENTE	Sorvete QUENTE – lata de 3 litros
R\$ 24,00	4 latas – só R\$ 14,00

Joana quer comprar 12 latas de sorvete para a festa de seu aniversário. Em qual supermercado ela deve comprar e por quê?

(a) No A, pois economizará R\$ 7,00 em relação ao B.

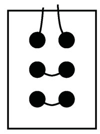
(b) No A, pois economizará R\$ 6,00 em relação ao B.

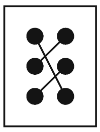
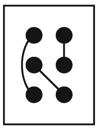
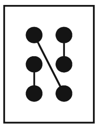
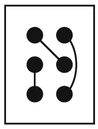
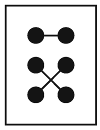
(c) No B, pois economizará R\$ 8,00 em relação ao A.

(d) No B, pois economizará R\$ 6,00 em relação ao A.

(e) Tanto faz, porque o preço é o mesmo nos dois supermercados.

13. ***Cartolina e barbante*** – Passa-se um barbante através dos seis furos de uma cartolina. A frente da cartolina, com o barbante, é mostrada na figura. Qual das figuras a seguir **não** pode ser o verso dessa cartolina?



(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

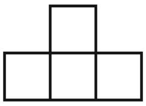
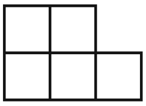
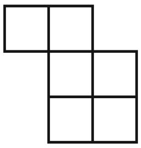
14. ***Amigos e frações*** – Adriano, Bruno, César e Daniel são quatro bons amigos. Daniel não tinha dinheiro, mas os outros tinham. Adriano deu a Daniel um quinto do seu dinheiro, Bruno deu um quarto do seu dinheiro e César deu um terço do seu dinheiro. Cada um deu a Daniel a mesma quantia. A quantia que Daniel possui agora representa que fração da quantia total que seus três amigos juntos possuíam inicialmente?

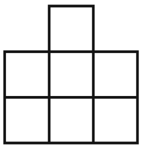
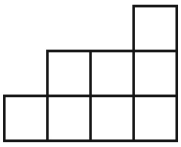
(a) $\dfrac{1}{10}$ (b) $\dfrac{1}{4}$ (c) $\dfrac{1}{3}$ (d) $\dfrac{2}{5}$ (e) $\dfrac{1}{2}$

15. ***Escolhendo sorvetes*** – Paulo quer comprar um sorvete com quatro bolas em uma sorveteria que dispõe de três sabores: açaí, baunilha e cajá. De quantos modos diferentes ele pode fazer essa compra?

(a) 6 (b) 9 (c) 12 (d) 15 (e) 18

16. ***Peças de um quadrado*** – Pedro montou um quadrado com quatro das cinco peças abaixo. Qual é a peça que ele não usou?

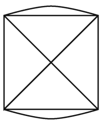
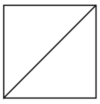
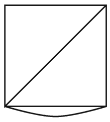
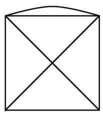
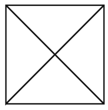
(a)  (b)  (c) 

(d)  (e) 

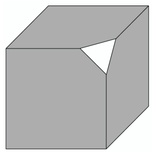
17. ***Paradas de ônibus*** – Uma linha de ônibus possui 12 paradas numa rua em linha reta. A distância entre duas paradas consecutivas é sempre a mesma. Sabe-se que a distância entre a terceira e a sexta paradas é de 3 300 metros. Qual é a distância, em quilômetros, entre a primeira e a última parada?

(a) 8,4 (b) 12,1 (c) 9,9 (d) 13,2 (e) 9,075

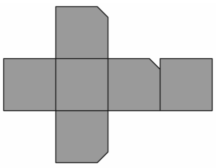
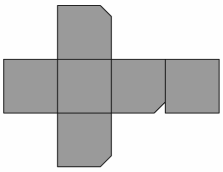
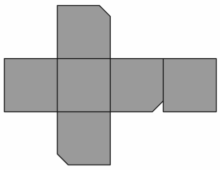
18. ***Desenho*** – Qual dos seguintes desenhos **não pode ser feito** sem tirar o lápis do papel e passando apenas uma vez ao longo de cada linha?

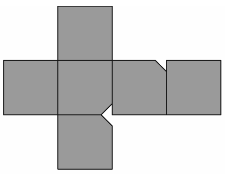
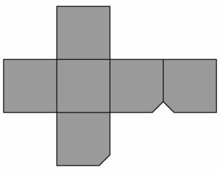
(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

19. ***Qual é o cubo?*** – Cortamos um canto de um cubo, conforme mostra a figura.



Qual das representações a seguir corresponde ao que restou do cubo?

(a)  (b)  (c) 

(d)  (e) 

20. ***Quadrado mágico*** – Dizemos que o quadrado abaixo é um *quadrado mágico* porque a soma dos números de cada linha, de cada coluna e de cada diagonal é sempre a mesma. No caso do quadrado mágico da figura, essa soma é 15.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Complete os cinco números que faltam no quadrado abaixo para que ele seja um quadrado mágico.

−12		− 4
	0	
4		

21. ***Torneio*** – Sete equipes, divididas em dois grupos, participaram do torneio de futebol do meu bairro. O Grupo 1 foi formado pelas equipes Avaqui, Botágua e Corinense. O Grupo 2 foi formado pelas equipes Dinossauros, Esquisitos, Flurinthians e Guaraná.

    Na primeira rodada do torneio, cada equipe enfrentou cada uma das equipes do seu grupo exatamente uma vez. Na segunda rodada do torneio, cada equipe enfrentou cada uma das equipes do outro grupo exatamente uma vez.

    (a) Quantas partidas foram disputadas na primeira rodada no Grupo 1?

    (b) Quantas partidas foram disputadas na primeira rodada no Grupo 2?

    (c) Quantas partidas foram disputadas na segunda rodada?

22. ***Truque numérico*** – Você já viu um *truque numérico*? Aqui vão os passos de um truque numérico:

    (i) Escolha um número qualquer.

    (ii) Multiplique-o por 6.

    (iii) Do resultado subtraia 21.

    (iv) Divida esse novo resultado por 3.

    (v) Desse último resultado subtraia o dobro do número que você escolheu.

    (a) Experimente essa sequência de cinco passos três vezes, iniciando cada vez com um número diferente. Qual foi o resultado de seu experimento?

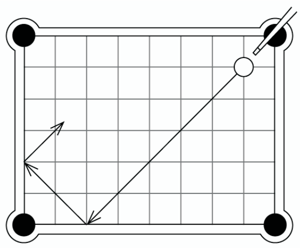
    (b) A seguir, usando a letra x para representar o número que você escolheu no primeiro passo, mostre por que os resultados do item (a) não são apenas uma coincidência, mas sim um fato matemático.

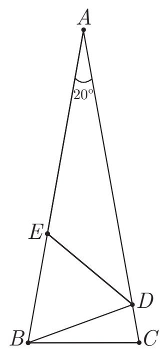
23. ***Jogando sinuca*** – Na figura abaixo vemos uma mesa de sinuca quadriculada e parte da trajetória de uma bola, tacada a partir de um canto da mesa, de modo que, sempre que a bola bater em uma das beiradas da mesa, ela segue seu movimento formando ângulos de 45° com a beirada.

    (a) Em qual das quatro caçapas a bola cairá?

    (b) Quantas vezes a bola baterá nas beiradas da mesa antes de cair na caçapa?

    (c) A bola seguirá pela diagonal de quantos desses quadrados durante sua trajetória?





24. ***Triângulo isósceles*** – Na figura, o triângulo $\triangle ABC$ é isósceles, com $B\widehat{A}C = 20°$.

    Sabendo que $BC = BD = BE$, determine a medida do ângulo $B\widehat{D}E$.

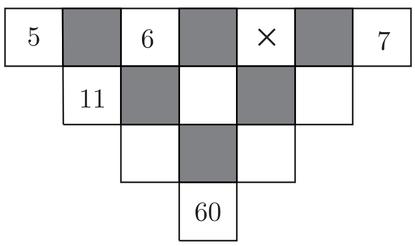
25. ***Pesando moedas*** – São dadas quatro moedas aparentemente iguais, das quais três são verdadeiras e uma é falsa. As três verdadeiras têm o mesmo peso e a falsa tem um peso diferente das verdadeiras, mas não se sabe se a moeda falsa é mais leve ou mais pesada do que as verdadeiras.

    Mostre que é possível determinar a moeda falsa empregando somente duas pesagens em uma balança de dois pratos.

    Observação: Numa balança de dois pratos só podemos comparar os pesos colocados nos dois pratos: a balança só pode ficar equilibrada ou, então, pender para o lado mais pesado.

26. ***Números binomiais*** – Os quadrados em branco da figura devem ser preenchidos com números de tal modo que cada número, a partir da segunda linha, seja igual à soma dos dois números vizinhos da linha imediatamente superior. Por exemplo, o número da primeira casa da segunda linha é 11, porque $11 = 5 + 6$. Qual é o número que vai aparecer no quadrado indicado com $\times$?

    (a) 4
    (b) 6
    (c) 9
    (d) 15
    (e) 10

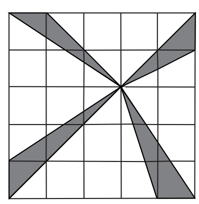


27. ***Costuras da bola*** – Uma bola de futebol é feita com 32 peças de couro. Dessas peças 12 são pentágonos regulares idênticos e as outras 20 são hexágonos, também regulares e idênticos. Os lados dos pentágonos são iguais aos lados dos hexágonos. Para unir dois lados de duas dessas peças é necessária uma costura. Quantas são as costuras necessárias para fazer uma bola?

    (a) 60 (b) 64 (c) 90 (d) 120 (e) 180

28. ***Razão de áreas*** – A figura ao lado mostra uma grade formada por quadrados de 1 cm de lado. Qual é a razão entre a área sombreada e a não sombreada?

    (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{5}$ (c) $\frac{1}{6}$ (d) $\frac{2}{5}$ (e) $\frac{2}{7}$



29. ***Só sorvete*** – Em um quente dia de verão, 64 crianças comeram, cada uma, um sorvete pela manhã e outro à tarde. Os sorvetes eram de quatro sabores, abacaxi, banana, chocolate e doce de leite. A tabela dada mostra quantas crianças consumiram um desses sabores pela manhã e outro à tarde. Por exemplo, o único número 7 que aparece na tabela indica que sete crianças tomaram sorvete de banana pela manhã e de chocolate à tarde.

		TARDE			
		Abacaxi	Banana	Chocolate	Doce de leite
MANHÃ	Abacaxi	1	8	0	3
	Banana	6	2	7	5
	Chocolate	3	3	0	5
	Doce de Leite	2	9	9	1

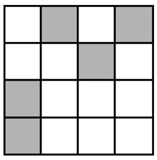
Quantas crianças tomaram sorvetes de sabores diferentes nesse dia?

(a) 58 (b) 59 (c) 60 (d) 61 (e) 62

30. ***Brincando com tabuleiro*** – Camila e Lara têm, cada uma, um tabuleiro 4×4. Começando com ambos tabuleiros em branco, elas fazem uma brincadeira com o desdobramento seguinte.

- Camila, escondida de Lara, pinta de preto algumas casas de seu tabuleiro.
- Ainda em seu tabuleiro, Camila escreve em cada casa o número de casas vizinhas que estão pintadas de preto (duas casas distintas são vizinhas se possuem um lado ou um vértice em comum).
- Camila copia os números escritos em seu tabuleiro no tabuleiro de Lara.
- Lara deve adivinhar, a partir dos números escritos em seu tabuleiro, quantas são as casas pretas do tabuleiro de Camila.

Por exemplo, se Camila pintar seu tabuleiro como o da figura à esquerda, então ela coloca os números no tabuleiro de Lara como na figura à direita.



1	1	3	1
2	3	2	2
1	3	1	1
1	2	0	0

Quantas foram as casas que Camila pintou se o tabuleiro de Lara tiver os números do tabuleiro a seguir?

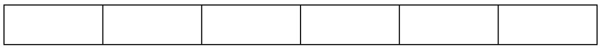
1	2	1	1
0	2	1	2
2	3	3	1
1	0	2	1

(a) 3 (d) 6

(b) 4 (e) 7

(c) 5

31. ***Cartões numerados*** – Larissa e Jorge estão jogando com cartões numerados de 1 a 6 que devem ser colocados nas casas do tabuleiro a seguir de tal modo que formem um número de seis algarismos.



Jorge coloca o primeiro cartão e, a seguir, as jogadas são alternadas entre os dois. O objetivo de Larissa é obter o maior número possível e o de Jorge é obter o menor número possível. Larissa tem os cartões com os algarismos 1, 3 e 5 e Jorge tem os cartões com os algarismos 2, 4 e 6. Se os dois jogadores forem espertos, qual é o número que aparecerá ao final do jogo?

(a) 254 361 (b) 253 416 (c) 251 634 (d) 256 134 (e) 251 346

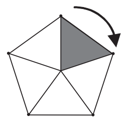
32. ***Faltam balas*** – Uma professora tem 237 balas para dar a seus 31 alunos. Qual é o número mínimo de balas a mais que ela precisa conseguir para que todos seus alunos recebam a mesma quantidade de balas, sem sobrar nenhuma?

(a) 11 (b) 20 (c) 21 (d) 31 (e) 41

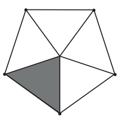
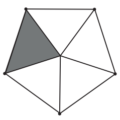
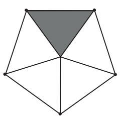
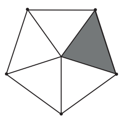
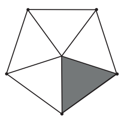
33. ***Artesãos de braceletes*** – Um artesão começa a trabalhar às 08h e produz seis braceletes a cada 20 minutos; já seu auxiliar começa a trabalhar uma hora depois e produz oito braceletes do mesmo tipo a cada meia hora. O artesão para de trabalhar às 12h, mas avisa ao seu auxiliar que deverá continuar trabalhando até produzir o mesmo número de braceletes que ele. A que horas o auxiliar irá parar de trabalhar?

(a) 12h (b) 12h30min (c) 13h (d) 13h30min (e) 14h30min

34. ***Girando um pentágono*** – Qual figura será obtida se girarmos no sentido horário o pentágono regular por um ângulo de 252° em torno do seu centro?



Observação: o sentido horário é o sentido em que giram os ponteiros de um relógio; no caso do pentágono, isso está indicado pela seta no desenho.

(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

35. ***Área em função da diagonal*** – O perímetro de um retângulo mede 100 cm e a diagonal mede x cm. Qual é a área desse retângulo em função de x?

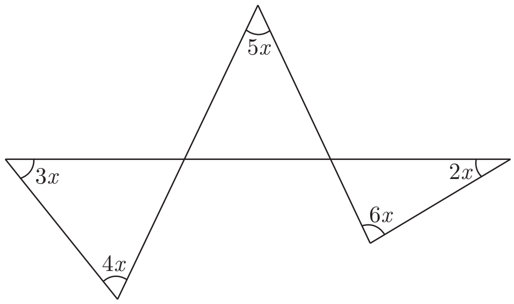
(a) $625 - x^2$ (b) $625 - \dfrac{x^2}{2}$ (c) $1\,250 - \dfrac{x^2}{2}$ (d) $225 - \dfrac{x^2}{2}$ (e) $2\,500 - \dfrac{x^2}{2}$

36. ***Valor de uma quadrática*** – Se $x + y = 8$ e $xy = 15$, qual é o valor de $x^2 + 6xy + y^2$?

(a) 64 (b) 109 (c) 120 (d) 124 (e) 154

37. ***Ângulos em função de x*** – Na figura estão indicadas, em graus, as medidas de alguns ângulos em função de x. Quanto vale x?

(a) 6°
(b) 12°
(c) 18°
(d) 20°
(e) 24°



38. ***Operação diferente*** – Se m e n são inteiros maiores do que zero e se $m < n$, definimos $m\nabla n$ como a soma dos inteiros entre m e n, incluindo m e n. Por exemplo, $5\nabla 8 = 5 + 6 + 7 + 8 = 26$. Qual é o valor de $\dfrac{22\nabla 26}{4\nabla 6}$?

(a) 4 (b) 6 (c) 8 (d) 10 (e) 12

39. ***Taxi caro*** – O preço de uma corrida de táxi é de R\$ 2,50 fixos (a “bandeirada”) mais R\$ 0,10 por 100 metros rodados. Tenho apenas R\$ 10,00 no bolso. Logo, tenho dinheiro para uma corrida de, no máximo, quantos quilômetros?

(a) 2,5 (b) 5,0 (c) 7,5 (d) 10,0 (e) 12,5

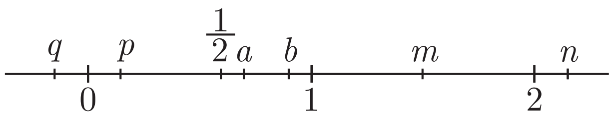
40. ***Múltiplos de 3 ou 4*** – Quantos números entre 1 e 601 são múltiplos de 3 ou múltiplos de 4?

(a) 100 (b) 150 (c) 250 (d) 300 (e) 430

41. ***Lados de um paralelepípedo*** – Se x e y são números inteiros positivos tais que $xyz = 240$, $xy + z = 46$ e $x + yz = 64$, qual é o valor de $x + y + z$?

(a) 19 (b) 20 (c) 21 (d) 24 (e) 36

42. ***Pontos da reta*** – Na reta dada estão representados os seis números a, b, m, n, p e q, além dos números 0, $\dfrac{1}{2}$, 1 e 2.



Então os números que melhor representam $a + b$, $a - b$ e ab são, respectivamente:

(a) m, p e q; (b) m, q e p; (c) n, q e p; (d) n, p e q; (e) q, m e p.

43. ***Velocidades*** – Numa corrida de carros, um piloto percorreu três trechos: um de 240 km, um de 300 km e um de 400 km. O piloto sabe que as velocidades médias nesses trechos foram 40 km/h, 75 km/h e 80 km/h, mas não se lembra qual dessas velocidades corresponde a cada um desses trechos. Podemos garantir que o tempo total em horas gasto pelo piloto para percorrer os três trechos foi:

(a) menor do que ou igual a 13 horas;

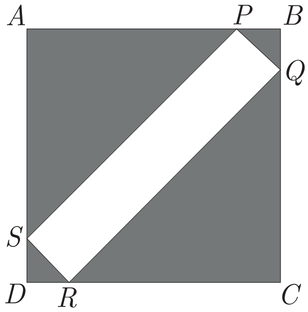
(b) maior do que ou igual a 13 horas e menor do que ou igual a 16 horas;

(c) maior do que ou igual a 16 horas e menor do que ou igual a 17 horas;

(d) maior do que ou igual a 15 horas e menor do que ou igual a 18 horas;

(e) maior do que ou igual a 18 horas.

44. ***Comprimento de diagonal*** – Do quadrado $ABCD$ foram cortados os triângulos isósceles sombreados, como na figura, restando o retângulo $PQRS$. Sabendo que a área total do que foi cortado mede 200 cm^2, qual é o comprimento de PR, em cm?



(a) $\sqrt{200}$ (b) 200 (c) $\sqrt{800}$ (d) 25 (e) 88

45. ***Divisão de números grandes*** – Determine o valor de $123\,456\,123\,456 \div 10\,000\,001$.

46. ***Refrigerante no cinema*** – Toda vez que Joãozinho vai ao cinema, ele toma dois refrigerantes. Ele gastou toda sua mesada de R\$ 50,00 indo ao cinema seis vezes e tomando um total de 20 refrigerantes, incluindo os que ele tomou quando foi ao cinema. Se Joãozinho tivesse tomado só um refrigerante cada vez que foi ao cinema, com essa economia ele poderia ter ido ao cinema mais uma vez, tomando um refrigerante também nessa ocasião. Em relação ao preço do ingresso do cinema e o preço do refrigerante, podemos afirmar que

(a) o preço do ingresso é o triplo do preço do refrigerante;

(b) o preço do ingresso é o quádruplo do preço do refrigerante;

(c) o preço do ingresso é o quíntuplo do preço do refrigerante;

(d) o ingresso é R\$ 6,00 mais caro do que o refrigerante;

(e) o ingresso é R\$ 5,00 mais caro do que o refrigerante.

47. ***Divisão de potências*** – Qual é o quociente de 50^{50} por 25^{25}?

(a) 25^{25} (b) 10^{25} (c) 100^{25} (d) 2^{25} (e) 2×25^{25}

48. ***Palitos de dois tamanhos*** – Você possui apenas palitos com 6 e 7 cm de comprimento. Qual é o número mínimo desses palitos que são necessários para cobrir um segmento de reta com 2 metros?

(a) 29 (b) 30 (c) 31 (d) 32 (e) 33

49. ***Maior raiz*** – Qual é a maior raiz da equação $(x-37)^2 - 169 = 0$?

(a) 39 (b) 43 (c) 47 (d) 50 (e) 53

50. ***Máquina com visor*** – Uma certa máquina tem um visor, onde aparece um número inteiro x, e duas teclas, A e B. Quando se aperta a tecla A, o número x do visor é substituído por $2x+1$. Quando se aperta a tecla B, o número x do visor é substituído por $3x-1$. Qual é o maior número de dois algarismos que pode ser obtido apertando

alguma sequência das teclas A e B a partir do número 5 no visor?

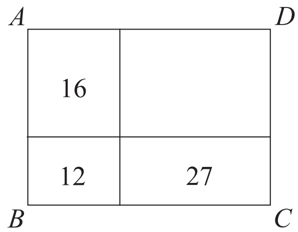
(a) 85 (b) 87 (c) 92 (d) 95 (e) 96

51. ***Quadrado mágico parcial*** – Num quadrado mágico, a soma dos três números de cada linha, coluna ou diagonal é sempre a mesma. Dado o quadrado mágico ao lado, parcialmente preenchido, qual deve ser o valor de x?

1	14	x
26		13

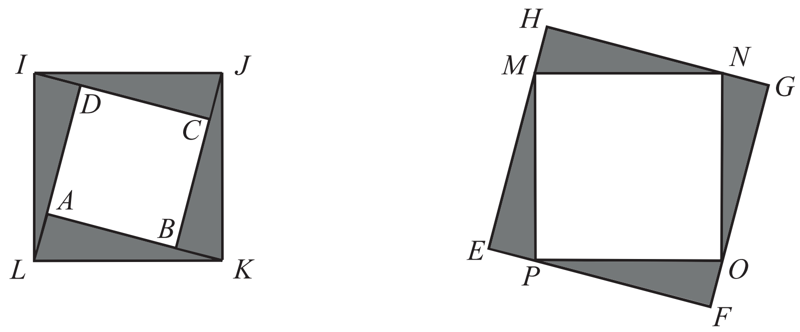
(a) 20 (b) 22 (c) 23 (d) 25 (e) 27

52. ***Área do retângulo*** – Um retângulo $ABCD$ está dividido em quatro retângulos menores. As áreas de três deles estão indicadas na figura dada. Qual é a área do retângulo $ABCD$?



(a) 80 (b) 84 (c) 86 (d) 88 (e) 91

53. ***Lado do quadrado*** – Quatro peças iguais, em forma de triângulo retângulo, foram dispostas de dois modos diferentes, como mostram as figuras dadas. Os quadrados $ABCD$ e $EFGH$ têm lados respectivamente iguais a 3 cm e 9 cm. Determine a medida do lado do quadrado $IJKL$.



54. ***Maior número*** – Qual é o maior dentre os números dados?

(a) $2 \times 0 \times 2\,006$ (c) $2 + 0 \times 2\,006$ (e) $2\,006 \times 0 + 0 \times 6$

(b) $2 \times 0 + 6$ (d) $2 \times (0 + 6)$

55. ***Operação*** $\odot$ – O símbolo $\odot$ representa uma operação especial com números; alguns exemplos são $2 \odot 4 = 10$, $3 \odot 8 = 27$, $4 \odot 27 = 112$ e $5 \odot 1 = 10$. Quanto vale $4 \odot (8 \odot 7)$?

(a) 19 (b) 39 (c) 120 (d) 240 (e) 260

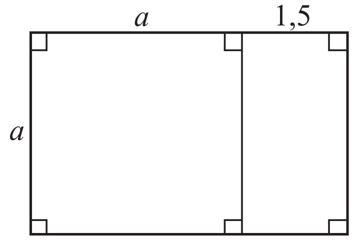
56. ***Terceiro lado*** – Se dois lados de um triângulo medem 5 e 7 cm, então o terceiro lado não pode medir quantos centímetros?

(a) 11 (b) 10 (c) 6 (d) 3 (e) 1

57. ***Asterisco*** – Se $\dfrac{*}{24} - \dfrac{3}{8} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{6}$, quanto vale $*$?

(a) 20 (b) 21 (c) 23 (d) 25 (e) 29

58. ***Expressões algébricas*** – O que representam, geometricamente, na figura dada, as expressões

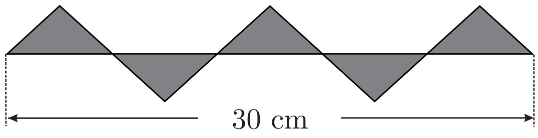


$$a^2 + 1{,}5\,a$$

e

$$4\,a + 3\,.$$

59. ***Faixa decorativa*** – A figura dada é composta de triângulos retângulos isósceles, todos congruentes. Qual é a área, em cm^2, da parte sombreada?

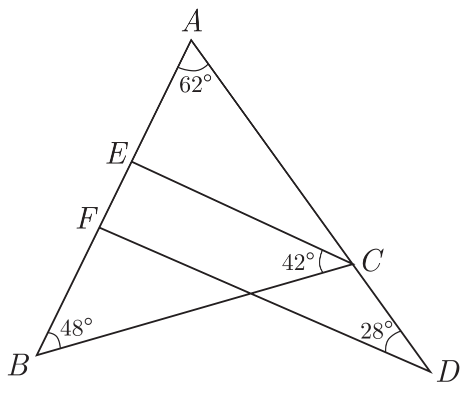


(a) 20 (d) 45
(b) 25 (e) 50
(c) 35

60. ***Bicicleta e chocolate*** – Se eu der duas barras de chocolate para Tião, ele me empresta sua bicicleta por 3 horas. Se eu lhe der 12 bombons, ele me empresta a bicicleta por 2 horas. Amanhã, eu lhe darei uma barra de chocolate e 3 bombons. Por quantas horas ele me emprestará a bicicleta?

(a) 1/2 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

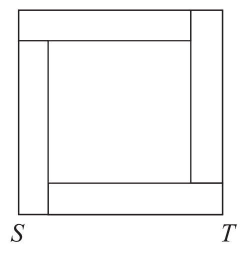
61. ***Retas paralelas?*** – Na figura dada, as retas EC e FD serão paralelas?



62. ***Menor número*** – Se $x > 5$, então qual dos números dados é o menor?

(a) $5/x$ (b) $5/(x+1)$ (c) $5/(x-1)$ (d) $x/5$ (e) $(x+1)/5$

63. ***Área de quadrado*** – O quadrado $STUV$ é formado de um quadrado limitado por 4 retângulos iguais. O perímetro de cada retângulo é 40 cm. Qual é a área, em cm^2, do quadrado $STUV$?



(a) 400 (c) 160 (e) 80
(b) 200 (d) 100

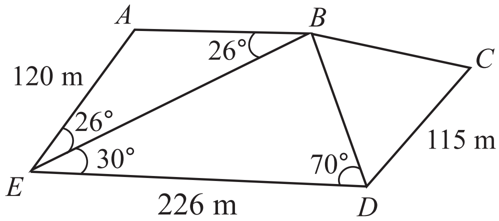
64. ***Operando frações***

(a) Calcule as diferenças $1-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}$ e $\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}$.

(b) Deduza de (a) o valor da soma $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{30}$.

(c) Calcule a soma $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{42}+\cdots+\dfrac{1}{999\,000}$.

65. ***Ângulos e perímetro*** – Calcule os ângulos que não estão indicados e o perímetro da figura, sabendo que $BD = BC$ e $D\widehat{B}C = B\widehat{C}D$.



66. ***Desigualdade racional*** – Quais são os valores de x que satisfazem a desigualdade $\dfrac{1}{x-2} < 4$?

(a) $x > \dfrac{9}{4}$

(b) $2 < x$ e $x < \dfrac{9}{4}$

(c) $x < 2$ ou $x > \dfrac{9}{4}$

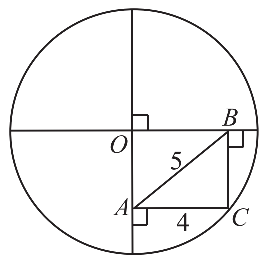
(d) $x < -2$

(e) $x < 2$

67. ***Desigualdade dupla*** – Quantos números inteiros e positivos satisfazem a dupla inequação $2\,000 < \sqrt{n(n-1)} < 2\,005$?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

68. ***Diâmetro do círculo*** – Na figura, O é o centro do círculo e $AB = 5$ cm. Qual é o diâmetro desse círculo?



69. ***Falta um ângulo*** – Na figura dada, $TU = SV$. Quanto vale o ângulo $S\widehat{V}U$, em graus?

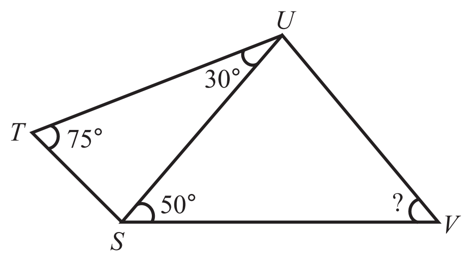
(a) 30

(b) 50

(c) 55

(d) 65

(e) 70



70. ***Café, bolo e gato*** – Dez minutos antes de colocar o bolo no forno, coloquei meu gato para fora da casa. O bolo deve cozinhar por 35 minutos, portanto coloquei o despertador para tocar 35 minutos após colocar o bolo no forno. De imediato fiz um café para mim, o que me tomou 6 minutos. Três minutos antes de acabar de beber o café, meu gato entrou em casa. Isso foi 5 minutos antes do despertador tocar. O telefone tocou no meio do tempo entre eu acabar de fazer o café e o gato entrar em casa. Falei ao telefone por 5 minutos e desliguei. Eram, então, 3h59min da tarde.

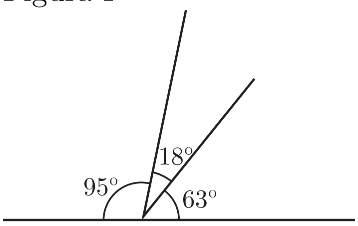
(a) A que horas coloquei meu gato para fora?

(b) O despertador tocou quantos minutos depois de colocar o gato para fora?

(c) Por quanto tempo o gato já estava fora de casa quando o telefone tocou?

71. ***Muitos ângulos*** − Quais figuras estão corretas?

Figura I



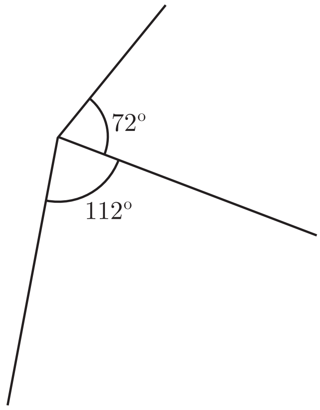
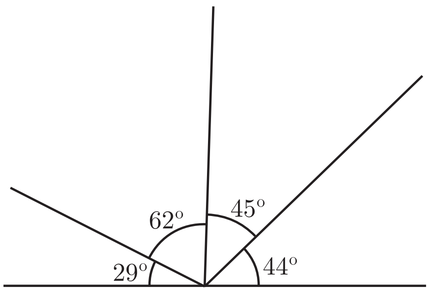


Figura II

Figura III



72. ***Sinal de produto e de quociente*** − a, b, c e d são quatro números não nulos tais que os quocientes

$$\frac{a}{5}, \quad \frac{-b}{7a}, \quad \frac{11}{abc} \quad \text{e} \quad \frac{-18}{\text{abcd}}$$

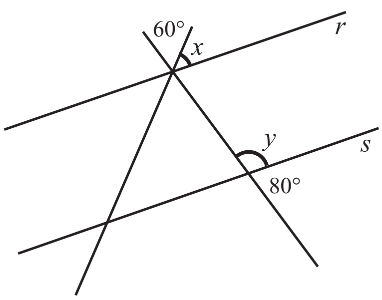
são todos positivos. Determine os sinais de a, b, c e d.

73. ***Sinais e radicais*** − Quais dos números dados são negativos?

(a) $10 - 3\sqrt{11}$ (c) $18 - 5\sqrt{13}$ (e) $10\sqrt{26} - 51$

(b) $3\sqrt{11} - 10$ (d) $51 - 10\sqrt{26}$

74. ***Ângulos entre retas*** − Sabe-se que as retas r e s são paralelas. Encontre os ângulos x e y.



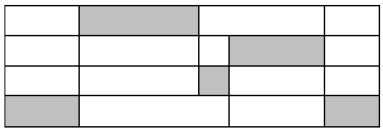
75. ***Variação de temperatura*** – A tabela dada mostra as temperaturas máximas e mínimas em centígrados durante cinco dias seguidos em certa cidade. Em qual dia ocorreu a maior variação de temperatura?

Dia	Máx.(°C)	Mín.(°C)
2ª feira	7	−12
3ª feira	0	−11
4ª feira	−2	−15
5ª feira	9	−8
6ª feira	13	−7

76. ***Ordenando frações*** – Qual dos números fica entre 2/5 e 3/4?

(a) 1/6 (b) 4/3 (c) 5/2 (d) 4/7 (e) 1/4

77. ***Fração de área*** – A figura mostra um retângulo maior dividido em 18 retângulos menores, todos com a mesma largura. Qual é a fração do retângulo maior que representa a parte em cinza?



78. ***Uma a mais!*** – Dentre as nove frações

$$\frac{5}{4},\quad \frac{17}{6},\quad \frac{-5}{4},\quad \frac{10}{7},\quad \frac{2}{3},\quad \frac{14}{8},\quad \frac{-1}{3},\quad \frac{5}{3}\quad \text{e}\quad \frac{-3}{2}$$

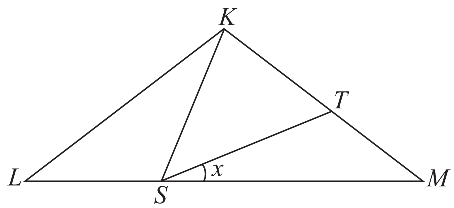
temos oito com as propriedades seguintes.

- 2 frações cuja soma é $\frac{2}{5}$
- 2 frações cuja diferença é $\frac{2}{5}$
- 2 frações cujo produto é $\frac{2}{5}$
- 2 frações cujo quociente é $\frac{2}{5}$

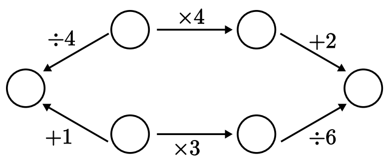
Encontre a fração que está sobrando.

79. ***Qual é o ângulo?*** – No triângulo $\triangle KLM$ temos $KL = KM$, $KT = KS$ e $L\widehat{K}S = 30°$. Qual é a medida do ângulo $x = T\widehat{S}M$?

(a) 10° (b) 15° (c) 20° (d) 25° (e) 30°



80. ***Operação circular*** – Dentro dos círculos, escreva os números inteiros que tornam correta a sucessão de operações.



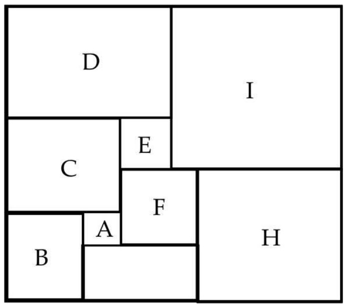
81. ***Pratos e copos*** – Iara possui R$ 50,00 para comprar copos e pratos. Cada copo custa R$ 2,50 e cada prato, R$ 7,00. Ela quer comprar, no mínimo, 4 pratos e 6 copos. O que ela pode comprar?

82. ***Desigualdades de inteiros*** – Quantos são os números inteiros x tais que

$$-5 < x - 1 \leq 5?$$

(a) 8 (b) 9 (c) 10 (d) 11 (e) 12

83. ***Nove quadrados*** – A figura dada mostra nove quadrados. A área do quadrado A mede 1 cm^2 e a do quadrado B é 81 cm^2. Qual é a área, em cm^2, do quadrado I?

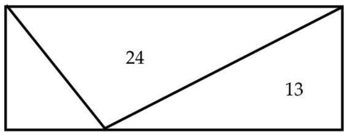


(a) 196 (d) 324
(b) 256 (e) 361
(c) 289

84. ***Muitas medalhas*** – André, Bruno, Celina e Dalva ganharam, juntos, 21 medalhas num concurso. André foi o que mais ganhou medalhas, Bruno ganhou o dobro de Celina e Dalva ganhou três a mais do que Bruno. Quantas medalhas cada um pode ter ganhado?

85. ***As somas são quadrados*** – Escreva numa linha os números de 1 a 15 de tal modo que a soma de quaisquer dois números adjacentes nessa linha seja um quadrado perfeito.

86. ***Área de uma região*** – Um retângulo está dividido em três regiões, conforme indicado na figura. Se as áreas de duas delas medem 24 e 13 cm^2, qual é a área da terceira região?



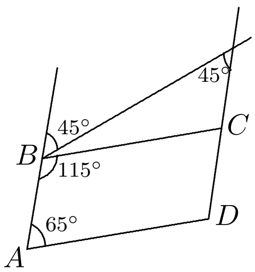
87. ***Potências de* 10** – O valor de $\dfrac{0{,}00001 \times (0{,}01)^2 \times 1\,000}{0{,}001}$ é:

(a) 10^{-1}; (b) 10^{-2}; (c) 10^{-3}; (d) 10^{-4}; (e) 1.

88. ***Diferença de quadrados*** – Se $(x+y)^2-(x-y)^2=20$, então xy é igual a:

(a) 0; (b) 1; (c) 2; (d) 5; (e) 10.

89. ***Um quadrilátero*** – O quadrilátero $ABCD$ da figura é um paralelogramo?



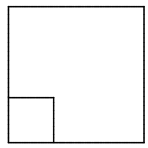
90. ***Sexta-feira treze*** – Qual é o número máximo de sextas-feiras treze que podem ocorrer num ano que não é bissexto? Nesse caso, em que dia da semana cai o décimo dia do ano?

91. ***Triângulos com lados inteiros*** – Quantos triângulos existem cujos lados são números inteiros e o perímetro mede 12 unidades?

(a) 1 (b) 3 (c) 5 (d) 7 (e) 9

92. ***Festa de aniversário*** – Para comemorar seu aniversário, Ana vai preparar tortas de pera e de maçã. No mercado, uma maçã pesa 300 g e uma pera, 200 g. A sacola de Ana aguenta um peso máximo de 7 kg. Qual é o número máximo de frutas que ela pode comprar para poder fazer tortas das duas frutas?

93. ***Os dois quadrados*** – As medidas em centímetros dos lados de cada um dos dois quadrados da figura são números inteiros. Se o menor quadrado tivesse $2\,001$ cm^2 a mais de área, as áreas dos dois quadrados seriam iguais. Quanto pode medir o lado do maior quadrado?



94. ***A multiplicação*** – Júlio faz multiplicações usando apenas os quadrados dos números. Ele tem que calcular o produto 85×135. Para isso, ele desenha um retângulo de 85×135 mm e, nesse retângulo, traça o maior quadrado possível; faz o mesmo no retângulo restante e assim sucessivamente. Dessa maneira, ele obtém oito quadrados que ele, então, soma. Desenhe a figura feita por Júlio e escreva 85×135 como a soma de oito quadrados:
$$85 \times 135 = 85^2 + \ldots.$$

95. ***Expressão fracionária*** – Se $\dfrac{x}{y} = 2$, então $\dfrac{x-y}{x}$ é igual a:

    (a) -1; (b) $-\dfrac{1}{2}$; (c) $\dfrac{1}{2}$; (d) 1; (e) 2;

96. ***Diferença e soma de quadrados*** – Calcule:

    (a) $1\,678^2 - 1\,677^2$ (b) $1\,001^2 + 1\,000^2$ (c) $19\,999^2$ (d) $2\,001^2 + 2\,002^2 + 2\,003^2$

97. ***Um queijo triangular*** – Osvaldo comprou um queijo em forma de um triângulo equilátero. Ele quer dividir o queijo igualmente entre ele e seus quatro primos. Faça um desenho indicando como ele deve fazer essa divisão.

98. ***Notas de Matemática*** – João e Cláudia receberam de volta suas provas de matemática em que os algarismos das notas foram substituídos por símbolos. A nota de João foi ■★ e a de Cláudia ★✳. Juntos, eles obtiveram ✳□⊞. Além disso, Cláudia obteve 13 pontos a mais do que João. Qual foi a nota de cada um?

99. ***Operação com raiz quadrada*** – O número $(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-2)\sqrt{\sqrt{3}+2}$ é igual a:

    (a) $-\sqrt{3}$; (b) $-\sqrt{2}$; (c) -2; (d) 1; (e) 2.

100. ***Para a escola de bicicleta*** – Cátia sai da escola todos os dias no mesmo horário e volta para casa de bicicleta. Quando ela pedala a 20 km/h, ela chega em casa às 16h30m. Se ela pedalar a 10 km/h, ela chega em casa às 17h15m. A que velocidade ela deve pedalar para chegar em casa às 17h?

101. ***Distância na reta*** – Cinco pontos estão sobre uma mesma reta. Quando listamos as 10 distâncias entre dois desses pontos, da menor para a maior, encontramos 2, 4, 5, 7, 8, k, 13, 15, 17 e 19. Qual é o valor de k?

102. ***Número ímpar*** – Se n é um número inteiro qualquer, qual dos seguintes é um número ímpar?

(a) $n^2 - n + 2$ (b) $n^2 + n + 2$ (c) $n^2 + n + 5$ (d) $n^2 + 5$ (e) $n^3 + 5$

103. ***Quatro números inteiros*** – Se quatro inteiros positivos distintos m, n, p e q satisfazem a equação $(7-m)(7-n)(7-p)(7-q) = 4$, então a soma $m+n+p+q$ é igual a:

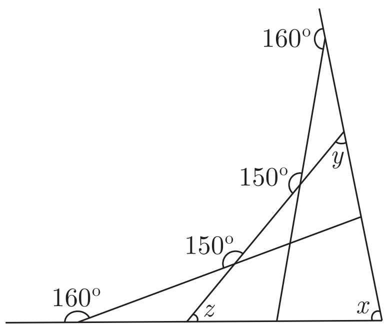
(a) 10; (b) 21; (c) 24; (d) 26; (e) 28.

104. ***As páginas do dicionário*** – Para numerar as páginas de um dicionário, imprimiu-se 1 988 vezes o algarismo 1. Quantas páginas tem esse dicionário?

105. ***Soma de potências de 2*** – Determine um valor de n para o qual o número $2^8+2^{11}+2^n$ seja um quadrado perfeito.

106. ***Reverso de um número*** – O *reverso* de um número inteiro de dois algarismos é o número que se obtém invertendo a ordem de seus algarismos. Por exemplo, 34 é o reverso de 43. Quantos números existem que, somados ao seu reverso, dão um quadrado perfeito?

107. ***Ângulos externos de um triângulo*** – Dados os ângulos de 150° e 160° indicados na figura, calcule os valores dos ângulos x, y e z.



108. ***Uma brincadeira*** – É feita uma brincadeira com quatro números inteiros da seguinte maneira: some três desses números, divida essa soma por 3 e o resultado some com o quarto número. Existem quatro formas de fazer esta brincadeira, obtendo os seguintes resultados: 17, 21, 23 e 29. Qual é o maior dos quatro números?

109. ***Ovos e maçãs*** – Num armazém, uma dúzia de ovos e 10 maçãs tinham o mesmo preço. Depois de uma semana, o preço dos ovos caiu 2% e o da maçã subiu 10%. Quanto se gastará a mais na compra de uma dúzia de ovos e de 10 maças?

(a) 2% (b) 4% (c) 10% (d) 12% (e) 12,2%

110. ***Dividir um cubo*** – Se dividirmos um cubo de 1 m de aresta em cubinhos de 1 mm de aresta, que altura terá uma coluna formada por todos os cubinhos, dispostos sucessivamente um em cima do outro?

(a) 1 m (b) 1 km (c) 10 km (d) 100 km (e) 1 000 km

111. ***Uma expressão*** – A expressão $\dfrac{a^{-2}}{a^5} \times \dfrac{4a}{(2^{-1}a)^{-3}}$, em que $a \neq 0$, é igual a:

(a) $\dfrac{a^3}{2}$; (b) $\dfrac{2}{a^3}$; (c) $\dfrac{1}{2a^3}$; (d) $\dfrac{a^5}{2}$; (e) $\dfrac{2}{a^5}$.

112. ***Uma igualdade*** – Os números a e b são inteiros positivos que satisfazem $96a^2 = b^3$. Qual é o menor valor possível de a?

113. ***Somas de três em três*** – Encontre quatro números inteiros positivos que, somados de três em três, dão somas 6, 7, 8 e 9.

114. ***O retângulo do Luís*** – Luís desenhou um retângulo de 6×10 cm e quer dividi-lo em quatro partes. As áreas das 4 partes devem medir 8, 12, 16 e 24 cm^2. Desenhe como ele pode fazer essa divisão.

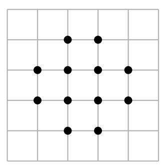
115. ***Uma fábrica de blusas*** – Uma fábrica produz blusas a um custo de R$ 2,00 por unidade, além de uma parte fixa de R$ 500,00. Se cada unidade produzida é comercializada a R$ 2,50, a partir de quantas unidades produzidas a fábrica obtém lucro?

(a) 250 (b) 500 (c) 1 000 (d) 1 200 (e) 1 500

116. ***Existência de triângulos*** – Qual dos seguintes triângulos não pode existir?

(a) triângulo agudo isósceles
(b) triângulo retângulo isósceles
(c) triângulo retângulo obtusângulo
(d) triângulo retângulo escaleno
(e) triângulo escaleno obtusângulo

117. ***Os doze pontos*** – Doze pontos estão marcados numa folha de papel quadriculado, conforme mostra a figura. Qual é o número máximo de quadrados que podem ser formados unindo quatro desses pontos?



118. ***O colar*** – Um colar é composto de pérolas grandes e pérolas pequenas, num total de menos do que 500 pérolas.

(a) Se substituirmos 70% das pérolas grandes por pequenas, o peso do colar diminui 60%.
(b) Se substituirmos 60% das pérolas pequenas por grandes, o peso do colar aumenta 70%.

Quantas pérolas tem o colar?

119. ***Mulheres votantes*** – Numa certa cidade, 40% de todas as mulheres são votantes e 52% da população é de mulheres. Qual é o percentual da população formado por mulheres votantes?

(a) 18,1% (b) 20,8% (c) 26,4% (d) 40% (e) 52%

120. ***Amigos do século XX*** – Dois amigos nasceram no mesmo mês e ano do século XX, com uma semana de intervalo. Escrevendo as datas dos dois aniversários da esquerda para a direita, começando com o (ou os) algarismo(s) do dia, depois o (ou os) algarismo(s) do mês e, por último, os dois últimos algarismos do ano, obtemos dois números. Não colocando o algarismo 0 na frente dos nove primeiros dias do mês nem dos nove primeiros meses do ano e sabendo que um desses números é o sêxtuplo do outro, qual é a data de nascimento do amigo mais velho?

121. ***Operação em uma fração*** – Que número se deve somar aos dois termos de uma fração para se obter o inverso dessa mesma fração?

122. ***O número* 119** – O número 119 tem as propriedades seguintes:

(a) a divisão por 2 deixa resto 1;
(b) a divisão por 3 deixa resto 2;
(c) a divisão por 4 deixa resto 3;
(d) a divisão por 5 deixa resto 4;
(e) a divisão por 6 deixa resto 5.

Quantos inteiros positivos menores que 2 007 satisfazem essas propriedades?

123. ***Fonte com três torneiras*** – Sílvia vai encher seus 10 garrafões numa fonte que tem três torneiras. Um dos garrafões demora um minuto para encher, outro dois minutos, outro três minutos e assim por diante. Como Sílvia deverá distribuir os 10 garrafões pelas três torneiras de modo a gastar o menor tempo possível? Qual é esse tempo?

124. ***A sequência xyz*** – Quais são os valores prováveis de x, y e z na sequência

$$\frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, x, y, z?$$

125. ***A mesa circular*** – Já existem N pessoas sentadas em volta de uma mesa circular com 60 cadeiras. Qual é o menor valor possível para N se a próxima pessoa a se sentar vai ter que se sentar ao lado de alguém?

126. ***Números proporcionais*** – Se $\dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{z}$, então $9y^2$ é igual a:

(a) $\dfrac{x^2}{9}$; (b) x^3z; (c) $3x^2$; (d) x^2z^2; (e) $\dfrac{1}{9}x^2z^2$.

127. ***Esportistas de uma escola*** – Em um grupo de 40 estudantes, 20 jogam futebol, 19 jogam vôlei e 15 jogam exatamente um desses dois esportes. Quantos estudantes não praticam nem futebol nem vôlei?

(a) 7 (b) 5 (c) 13 (d) 9 (e) 10

128. ***Vamos ao teatro*** – Na campanha "Vamos ao teatro", 5 ingressos podem ser adquiridos pelo preço usual de 3 ingressos. Mário comprou 5 ingressos nessa campanha. A economia que Mário fez representa que percentual sobre o preço usual dos ingressos?

(a) 20% (b) $33\,\frac{1}{3}\%$ (c) 40% (d) 60% (e) $66\,\frac{2}{3}\%$

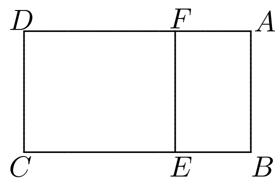
129. ***Uma desigualdade*** – Os valores de x que satisfazem $\dfrac{1}{x-1} > 1$ são dados por:

(a) $x < 2$; (b) $x > 1$; (c) $1 < x < 2$; (d) $x < 1$; (e) $x > 2$.

130. ***A sala do Professor Newton*** – O professor Newton dividiu seus alunos em grupos de 4 e sobraram 2. Ele dividiu seus alunos em grupos de 5 e um aluno ficou de fora. Se 15 alunos são mulheres e tem mais mulheres do que homens, o número de alunos homens é:

(a) 7; (b) 8; (c) 9; (d) 10; (e) 11.

131. ***Um jardim retangular*** – Na figura, o retângulo $ABCD$ representa um terreno retangular cuja largura mede $3/5$ do comprimento. O retângulo $ABEF$ representa um jardim retangular cuja largura também mede $3/5$ do comprimento.



Qual é a razão entre a área do jardim e a área total do terreno?

(a) 30% (b) 36% (c) 40% (d) 45% (e) 50%

132. ***Números decrescentes*** – Escreva em ordem decrescente os números

$$\sqrt[5]{3}\,, \quad 3^{-2/3}\,, \quad 3^{-2}\,, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{3} \quad \text{e} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}.$$

133. ***Os bombons misturados*** – Marta e Carmem ganharam, cada uma, muitos bombons. Elas misturaram todos os bombons e, agora, não sabem mais qual foi o número de bombons que cada uma ganhou. Vamos ajudá-las a descobrir esses números? Sabe-se que:

(a) juntas, elas ganharam 200 bombons;

(b) Marta se lembra que ganhou menos do que 100 bombons, mas mais do que $4/5$ do que ganhou Carmem; e

(c) o número de bombons que cada uma ganhou é um múltiplo de 8.

134. ***Jantar aos sábado*** – Três casais jantam todo sábado num mesmo restaurante, sempre à mesma mesa. A mesa é redonda e os casais combinaram que

(a) jamais marido e mulher sentam à mesa como vizinhos; e

(b) a disposição dos seis à mesa é diferente a cada sábado.

Desconsiderando rotações nas disposições à mesa, durante quantos sábados esses três casais poderão ir a esse restaurante sem repetir sua disposição à mesa?

135. ***Expressão com radicais*** – O valor de $\left(\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}\right)^4$ é:

(a) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; (b) $\frac{1}{2}\left(7+3\sqrt{5}\right)$; (c) $1+2\sqrt{3}$; (d) 3; (e) $3+2\sqrt{2}$.

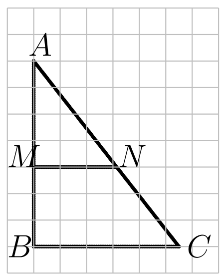
136. ***Possíveis triângulos*** – Os lados de um triângulo têm comprimentos $a, a+2$ e $a+5$, sendo $a>0$. Determine todos os possíveis valores de a.

137. ***Uma diferença*** – O valor de $\dfrac{\sqrt[3]{-0{,}001}\times\sqrt{400}}{\sqrt{0{,}25}}-\dfrac{\sqrt{0{,}036}-\sqrt{0{,}4}}{\sqrt{0{,}4}}$ é:

(a) $-3{,}3$; (b) $-4{,}7$; (c) $-4{,}9$; (d) $-3{,}8$; (e) $-7{,}5$.

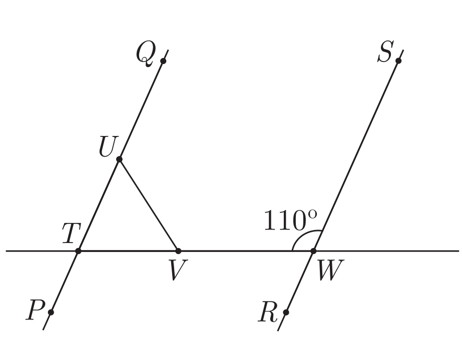
138. ***A Terra*** – A superfície do globo terrestre consiste em 70% de água e 30% de terra. Dois quintos da terra são desertos ou cobertos por gelo e um terço da terra é pastagem, floresta ou montanha; o resto da terra é cultivado. Qual é o percentual da superfície total do globo terrestre que é cultivada?

139. ***Uma fração*** – Na figura dada, determine o valor da fração $\dfrac{AN}{AC}$.



140. ***Cáculo de ângulo*** – Na figura dada, a reta PQ é paralela à reta RS e $TU=TV$. Se o ângulo $T\widehat{W}S$ mede 110°, o ângulo $Q\widehat{U}V$ mede:

(a) 135°; (b) 130°; (c) 125°; (d) 115°; (e) 110°.



141. ***Uma loja de brinquedos*** – Uma loja estava vendendo cada unidade de um brinquedo a R\$ 13,00. Para conseguir vender todo o seu estoque, que não era superior a 100 unidades, a gerência da loja resolveu baixar o preço por um número inteiro de reais, obtendo R\$ 781,00 por todo o estoque. Qual foi a redução do preço, por unidade?

142. ***Fração de fração*** – Qual o valor de $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}$?

143. ***Potências de 3*** – Se $3^a = 2$, quanto vale 27^{2a}?

144. ***Aumento de preço*** – Se o preço de um produto passou de 5,00 para 5,55 reais, qual foi o percentual do aumento?

145. ***Roseiras em fila*** – Jorge ganhou 15 roseiras para seu jardim e quer plantá-las em 6 filas de 5 roseiras cada uma. Isso é possível? Em caso afirmativo, faça um desenho indicando como Jorge pode plantar suas roseiras.

146. ***Calculadora diferente*** – Uma fábrica produziu uma calculadora original que efetua duas operações,

(a) a adição usual, denotada por + e

(b) uma operação denotada por $\circledast$.

Sabemos que, para todo número natural a, valem

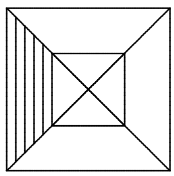
$$\text{(i)}\quad a \circledast a = a \qquad \text{e} \qquad \text{(ii)}\quad a \circledast 0 = 2a$$

e, para quaisquer quatro números naturais a, b, c e d, vale

$$\text{(iii)}\quad (a \circledast b) + (c \circledast d) = (a + c) \circledast (b + d)\,.$$

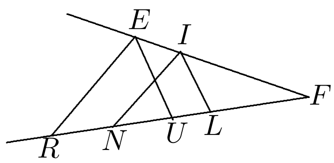
Quais são os resultados das operações $(2 + 3) \circledast (0 + 3)$ e $1\,024 \circledast 48$?

147. ***Dois quadrados*** – Na figura dada, o lado do quadrado maior mede 10 cm e o lado do menor mede 4 cm. As diagonais do quadrado maior contém as diagonais do quadrado menor. Quanto mede a área da região tracejada?



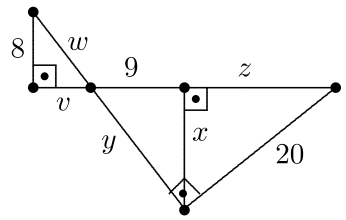
148. ***Paralelismo*** – Sendo o segmento IL paralelo ao segmento EU e o segmento RE paralelo ao segmento NI, determine o valor da fração

$$\frac{FN \times FU}{FR \times FL}.$$



149. ***Um subconjunto*** – O conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 3\,000\}$ contém um subconjunto de 2 000 elementos em que nenhum elemento é o dobro do outro?

150. ***Triângulos retângulos*** – Determine os valores de v, w, x, y e z na figura dada, em que já estão marcados três ângulos retos e os comprimentos de três segmentos.

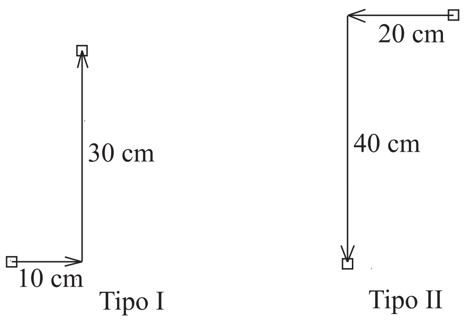


151. ***Uma desigualdade especial*** – Que valores de x satisfazem $x^2 < |x| + 2$?

(a) $x < -1$ ou $x > 1$ (b) $x > 1$ (c) $-2 < x < 2$ (d) $x < -2$ (e) $x < 0$

152. ***Sapo Cururu*** – Cururu é um sapo estranho, que se desloca apenas com dois tipos de saltos, o de

Tipo I: 10 cm para o Leste e 30 cm para o Norte e o de;
Tipo II: 20 cm para Oeste e 40 cm para o Sul.



(a) Como Cururu faz para chegar a um ponto situado a 190 cm para o Leste e 950 cm para o Norte de sua casa?

(b) É possível Cururu chegar a um ponto situado a 180 cm para o Leste e 950 cm para o Norte de sua casa?

153. ***Distribuindo algarismos em linhas*** – Joana escreveu uma sequência em 10 linhas usando os algarismos de 0 a 9, seguindo o padrão seguinte.

$$\begin{array}{cccccccccc}
0 \\
1 & 1 & 0 \\
2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\
3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & \ddots
\end{array}$$

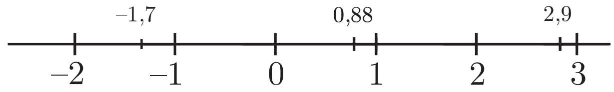
Qual foi o algarismo mais usado? Quantas vezes esse algarismo foi utilizado?

154. ***Será que existe?*** – Existe algum número inteiro N tal que valha

$$2\,008 \times N = 222\ldots 2?$$

155. ***Conferindo uma desigualdade*** – Será verdade que $\dfrac{1}{4^3}+\dfrac{1}{5^3}+\dfrac{1}{6^3}<\dfrac{1}{12}$?

156. ***Parte inteira*** – A parte inteira de um número real x é o maior inteiro que é menor do que ou igual a x. Denotamos a parte inteira de x por $[x]$. Por exemplo, $[2{,}9]=2$, $[0{,}88]=0$ e $[-1{,}7]=-2$.



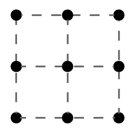
Calcule as partes inteiras seguintes.

(a) $\left[\sqrt{12}\right]$ (b) $\left[\dfrac{28\,756}{12\,777}\right]$ (c) $\left[-\dfrac{2\,007}{2\,008}\right]$ (d) $\left[\sqrt[3]{-111}\right]$

157. ***Soma nove*** – Quantos números inteiros entre 10 e 999 têm a soma de seus algarismos igual a 9?

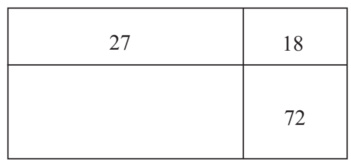
158. ***Retângulos*** – As medidas dos lados de um retângulo são números pares. Quantos retângulos desses existem com área igual a 96?

159. ***Número de retas*** – Sabemos que dois pontos distintos determinam uma única reta. Quantas retas são determinadas por dois quaisquer dos nove pontos marcados no quadriculado dado?



160. ***Cubo*** – Pedro quer pintar uma caixa de formato cúbico de tal maneira que as faces que tenham uma aresta em comum sejam pintadas em cores diferentes. Calcule o número mínimo de cores que serão necessárias para pintar a caixa dessa maneira.

161. ***Área*** – Um lote retangular foi divido em quatro terrenos, todos retangulares. As áreas de três deles estão dadas na figura, em km^2. Qual é a área do lote?



162. ***Inteiro mais próximo*** – Determine o número inteiro mais próximo de

(a) $\dfrac{19}{15}+\dfrac{19}{3}$ (b) $\dfrac{85}{42}+\dfrac{43}{21}+\dfrac{29}{14}+\dfrac{15}{7}$ (c) $-\dfrac{11}{10}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{7}{5}+\dfrac{2}{3}$

163. ***Brincando com números ímpares*** – Beatriz adora números ímpares. Quantos números entre 0 e 1 000 ela pode escrever usando apenas algarismos ímpares?

164. ***Água no jarro*** – João e Maria têm, cada um, um jarro grande com um litro de água. No primeiro dia, João coloca 1 ml da água do seu jarro no jarro da Maria. No segundo dia, Maria coloca 2 ml da água do seu jarro no jarro do João. No terceiro dia, João coloca 3 ml da água do seu jarro no jarro da Maria, e assim por diante. Depois de 200 dias, quantos mililitros de água tem no jarro de Maria?

165. ***Formiga no cubo*** – Uma formiga parte de um vértice de um cubo, andando somente ao longo das arestas, até voltar ao vértice inicial, não passando duas vezes por nenhum vértice. Qual é o passeio de maior comprimento que essa formiga pode fazer?

166. ***Promoção*** – Em uma promoção, Joana comprou blusas por R$ 15,00 cada uma e calças por R$ 17,00 cada uma, gastando, ao todo, R$ 143,00. Quantas blusas e calças Joana comprou?

167. ***Soma de cubos*** – Se $x + y = 1$ e $x^2 + y^2 = 2$, calcule $x^3 + y^3$.

168. ***O revezamento em uma corrida*** – Numa competição de revezamento, em que cada equipe tem dois atletas, cada atleta corre 21 km e o segundo atleta só inicia a corrida quando o primeiro atleta termina a sua parte e lhe passa o bastão. O recorde dessa competição é de 2 horas e 48 minutos. Na equipe de João e Carlos, João inicia a corrida e corre a sua parte com uma velocidade de 12 km/h. Para bater o recorde, qual deve ser a velocidade de Carlos?

169. ***Produtos consecutivos*** – Divida os números 2, 3, 5, 7, 11, 13 e 17 em dois grupos de tal forma que, multiplicando todos os números de um grupo e todos do outro, encontremos números consecutivos.

170. ***Distraindo na fila*** – Vivi, Tânia e Rosa estão em fila, não necessariamente nessa ordem, e gritam sucessivamente, cada uma, um múltiplo de 3.

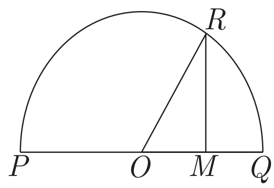
$$\begin{array}{ccc} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Vivi foi a primeira a gritar um número maior que 2 003 e Rosa a primeira a gritar um número de quatro algarismos. Quem gritou o número 666? E o 888?

171. ***Número e o dobro*** – Um número menor do que 200 é formado por três algarismos diferentes e o dobro desse número também tem todos os algarismos diferentes. Ainda, o número e seu dobro não têm algarismos em comum. Qual é esse número? Quantas soluções têm esse problema?

172. ***Invertendo os algarismos*** – Entre 10 e 99, quantos números existem tais que, invertendo a ordem de seus algarismos, obtemos um número maior do que o número original?

173. ***Razão entre segmentos*** – Na figura, O é o centro do semicírculo de diâmetro PQ, R é um ponto sobre o semicírculo e RM é perpendicular a PQ. Se a medida do arco $\overset{\frown}{PR}$ é o dobro da medida do arco $\overset{\frown}{RQ}$, qual é a razão entre PM e MQ?



174. ***Triângulos*** – Quantos triângulos existem que tenham um perímetro de 15 unidades e lados medindo números inteiros?

175. ***Número interessante*** – O número 119 é muito interessante porque deixa resto 1 ao ser dividido por 2, deixa resto 2 ao ser dividido por 3, deixa resto 3 ao ser dividido por 4, deixa resto 4 ao ser dividido por 5 e, finalmente, deixa resto 5 ao ser dividido por 6. Existem outros números de três algarismos com essas propriedades?

176. ***Time vencedor*** – Um time de futebol ganhou 60% das 45 partidas já disputadas. Qual é o número mínimo de partidas que esse time ainda precisa vencer para atingir uma porcentagem de 75% de vitórias?

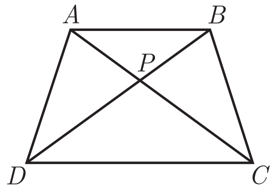
177. ***Brincando com dados*** – Dois dados são lançados. Qual é a probabilidade de o produto dos números obtidos nos dois dados ser divisível por 6?

178. ***Contando soluções*** – Quantos são os pares de números inteiros positivos (x, y) tais que
$$\frac{xy}{x+y} = 144\,?$$

179. ***Círculos tangentes*** – Os vértices de um triângulo cujos lados medem 3, 4 e 5 cm, são centros de três círculos que são dois a dois tangentes exteriormente. Qual é a soma das áreas desses três círculos?

180. ***Grupo de amigos*** – João, Jorge, José e Jânio são bons amigos. Certa vez, João estava sem dinheiro, mas seus amigos tinham algum. Então Jorge deu a João um quinto de seu dinheiro, José deu um quarto de seu dinheiro e Jânio deu um terço de seu dinheiro. Se todos eles deram a mesma quantidade de dinheiro para João, que fração do dinheiro do grupo ficou com João?

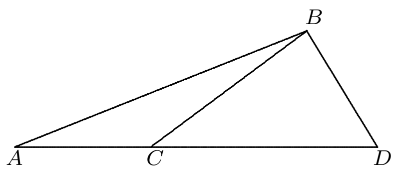
181. ***Um trapézio*** – A figura dada representa um trapézio $ABCD$ em que AB é paralelo a CD e as diagonais AC e BD cortam-se no ponto P. Se as áreas dos triângulos $\triangle APB$ e $\triangle CPD$ medem 4 e 9 cm^2, respectivamente, qual é a área do triângulo $\triangle PCB$?



182. ***Vista ruim*** – Numa classe, 40% dos alunos não enxergam bem. Desses, 70% usam óculos e os 30% restantes usam lentes de contato. Sabendo que 21 alunos usam óculos, quantos alunos tem nessa classe?

183. ***Idade média da população de Campo Verde*** – A razão entre o número de homens e o de mulheres na cidade de Campo Verde é de 2/3. A idade média dos homens é 37 anos e a das mulheres é 42 anos. Qual é a idade média dos habitantes de Campo Verde?

184. ***Área de triângulo*** – Se $AC = 1$ cm e $AD = 4$ cm, qual é a relação entre as áreas dos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle CBD$?



185. ***Construindo quadrados perfeitos*** – Observe as igualdades a seguir.

$$\begin{cases} 1\times 2\times 3\times 4+1 &= & 25 &= & 5^2 \\ 2\times 3\times 4\times 5+1 &= & 121 &= & 11^2 \\ & \vdots & & & \\ 10\times 11\times 12\times 13+1 &= & 17.161 &= & 131^2 \\ & \vdots & & & \end{cases}$$

Será que isso é sempre verdadeiro? Isto é, será sempre um quadrado perfeito o produto de quatro números inteiros consecutivos, mais 1?

186. ***Feira de Ciências*** – Na Feira de Ciências de uma escola, observou-se que metade dos alunos do ensino fundamental e um quarto dos alunos do ensino médio presentes nesse evento compraram um adesivo cada.

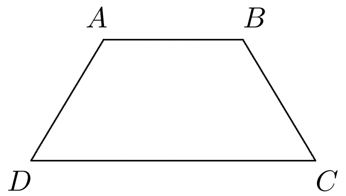
FEIRA DE CIÊNCIAS	
Preço dos Adesivos (unidade)	
R\$ 0,30	alunos do ensino fundamental
R\$ 0,50	alunos do ensino médio

Notou-se também que o número de alunos do ensino médio presentes que não compraram adesivos foi o dobro do número de alunos do ensino fundamental que não compraram adesivos. Sabendo-se que foram arrecadados R\$ 38,00 na venda de adesivos para os alunos desses dois níveis, quantos alunos de cada nível participaram da feira?

187. ***Par perfeito*** – Dizemos que dois números naturais formam um *par perfeito* quando a soma e o produto desses dois números são quadrados perfeitos. Por exemplo, 5 e 20 formam um par perfeito, pois $5+20=25=5^2$ e $5\times 20=100=10^2$. Será que 122 forma um par perfeito com algum outro número natural?

188. ***Um trapézio*** – No trapézio da figura dada, AB é paralelo a DC, $AD=AB=BC=1$ cm e $DC=2$ cm. Quanto mede o ângulo $D\widehat{A}C$?

(a) 30°
(b) 45°
(c) 60°
(d) 90°
(e) 120°



189. ***Mistério das bolas*** – Henrique têm duas urnas. A primeira urna contém somente bolas pretas e a segunda somente bolas brancas. Henrique retirou um certo número de bolas da primeira urna e as colocou na segunda. Em seguida, retirou o mesmo número de bolas da segunda urna e as colocou na primeira. Depois disso, o número de bolas brancas na primeira urna é maior do que, menor do que ou igual ao número de bolas pretas na segunda urna?

190. ***Contando a palavra BRASIL*** – Quantas vezes aparece a palavra BRASIL na figura dada? Só vale ler a palavra emendando letras que estão escritas em quadradinhos adjacentes.

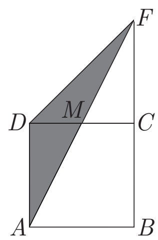
					B
				B	R
			B	R	A
		B	R	A	S
	B	R	A	S	I
B	R	A	S	I	L

191. ***Quais são os números?*** – Descubra quais são os números inteiros positivos x e y que satisfazem a equação $x^4 = y^2 + 71$.

192. ***No jogo*** – Aldo, Bernardo e Carlos jogam baralho. No início, a quantia em dinheiro que eles tinham, na ordem Aldo : Bernardo : Carlos, estava na proporção $7 : 6 : 5$. No final do jogo, na mesma ordem, a proporção era de $6 : 5 : 4$. Se um dos jogadores ganhou 12 reais, qual foi a quantidade de dinheiro com que ficou cada jogador, no final da partida?

193. ***Um número inteiro*** – Mostre que $M = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ é um número inteiro.

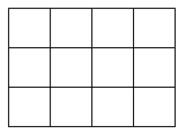
194. ***Área de triângulos*** – A área do quadrado $ABCD$ mede 300 cm^2. Na figura, M é o ponto médio de DC e o ponto F pertence à reta que passa por B e C.



(a) Qual é a área do triângulo $\triangle ABF$?

(b) Qual é área do triângulo $\triangle AFD$?

195. ***Um quadriculado*** – Observe que o retângulo quadriculado na figura ao lado é constituído de 31 segmentos e compreende doze quadrados.



Numa folha retangular de 21 por 29,7 cm, quadriculada com quadrados de lados medindo 0,5 cm, Rosa desenhou um grande retângulo quadriculado, constituído de 1 997 segmentos. Quantos quadrados tem esse retângulo?

196. ***Inteiros de quatro algarismos*** – Determine o valor do número natural a, sabendo que $4a^2$ e $\dfrac{4}{3} \times a^3$ são números inteiros de quatro algarismos.

197. ***Pares positivos*** – Quantos pares (x, y) de inteiros positivos são soluções da equação $3x + 5y = 501$?

198. ***Diferença de quadrados*** – A diferença dos quadrados de dois números inteiros consecutivos é 2 000.

(a) Os dois inteiros são menores do que 100.

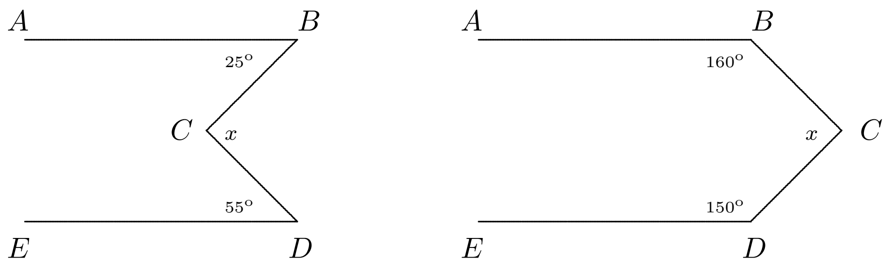
(b) Os dois inteiros são menores do que 1 000, porém maiores do que 99.

(c) Os dois inteiros são menores do que 10 000, porém maiores do que 999.

(d) Os dois inteiros são menores do que 100 000, porém maiores do que 9 999.

(e) Não existem esses dois números.

199. ***Cálculo de ângulos*** – Calcule o valor do ângulo x em cada uma das figuras a seguir, sabendo que os segmentos AB e ED são paralelos.



200. ***Tabela*** – Na tabela ao lado, com seis colunas e diversas linhas, estão escritos, ordenadamente, os números 1, 2, 3, 4, ... Qual é a posição do número 1 000 nessa tabela?

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	...			
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

201. ***Entre 1 e 2*** – Encontre todos os inteiros positivos a e b tais que $a/5$ e $b/7$ sejam menores do que 1 e valha a condição

$$1 < \frac{a}{5} + \frac{b}{7} < 2.$$

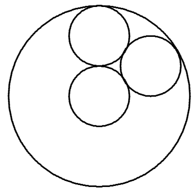
202. ***Triatlon*** – Maria está planejando participar do Triatlon-Brasil que consta de 800 m de nado, seguido de 20 km de bicicleta e, finalmente, 4 km de corrida. Maria corre a uma velocidade constante que é o triplo da velocidade com que nada e pedala 2,5 vezes mais rápido do que corre. Para terminar a prova em, no máximo, 1 hora e 20 minutos, qual deve ser sua velocidade mínima em cada uma das três modalidades?

203. ***Foto de formatura*** – O diretor de certa escola decidiu tirar uma foto dos formandos de 2008. Ele colocou os alunos em filas paralelas, todas com o mesmo número de alunos, mas essa disposição era muito larga para o campo de visão de sua máquina fotográfica. Para resolver esse problema, o diretor resolveu tirar um aluno por fila, colocando-os numa nova fila. Essa disposição não agradou o diretor porque a nova fila tinha quatro alunos a menos do que as outras. Ele decide, então, tirar mais um aluno de cada fila original, colocando-os na nova fila recém criada, e constata que, agora, todas as filas ficaram com o mesmo número de alunos e finalmente tira sua foto. Quantos alunos apareceram na foto?

204. ***Circunferências tangentes*** – Desenhe duas circunferências de mesmo centro, uma de raio medindo 1 cm e a outra de raio medindo 3 cm. Na região exterior à circunferência de 1 cm de raio e interior à de 3 cm de raio, desenhe circunferências que sejam, simultaneamente, tangentes às duas circunferências, como mostrado na figura dada.

(a) Qual deve ser o raio dessas circunferências?

(b) Qual é o número máximo dessas circunferências que podem ser desenhadas, sem que elas se sobreponham?



205. ***Festa na escola*** – Para a festa de aniversário da escola, Ana, Pedro, Miriam e Fábio levaram um total de 90 docinhos. A professora deles observou que

- se Ana tivesse levado dois docinhos a mais;
- se Pedro tivesse levado dois docinhos a menos;
- se Miriam tivesse levado o dobro e
- se Fábio tivesse levado a metade,

os quatro amigos teriam levado todos o mesmo número de docinhos. Quantos docinhos levou cada um dos amigos?

206. ***Inflação*** – Márcia está numa loja comprando um gravador que ela queria há muito tempo. Quando o caixa registra o preço ela exclama: *"Não é possível, você deve ter registrado o número ao contrário e trocou a ordem de dois algarismos, pois lembro que, na semana passada, custava menos do que 50 reais!"* Responde o caixa: *Sinto muito, mas ontem todos os nossos artigos foram aumentados em 20%.* Qual é o novo preço desse gravador?

207. ***Gatos no condomínio*** – Num certo condomínio moram 29 famílias, cada uma das quais possui ou um, ou três, ou cinco gatos. O número de famílias que possuem apenas um gato é o mesmo que o de famílias que possuem cinco gatos. Quantos gatos tem nesse condomínio?

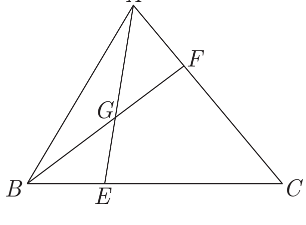
208. ***Soma constante*** – Preencha as cinco casas em branco da tabela 3×3 dada com os números de 3 a 8, sem repeti-los, de modo que as somas dos quatro números escritos nas quatro subtabelas formadas por quadrados 2×2 seja sempre a mesma.

1		2
	9	

209. ***Qual é o número?*** – Na adição ao lado, letras iguais representam o mesmo algarismo e letras diferentes, algarismos diferentes. Encontre o número $A\,B\,C\,D\,E$.

$$\begin{array}{r} A\;B\;C\;D\;E \\ B\;C\;D\;E \\ C\;D\;E \\ D\;E \\ E \\ \hline A\;A\;A\;A\;A \end{array}$$

210. ***Proporção triangular*** – Num triângulo $\triangle ABC$, o ponto F está sobre o lado AC e $FC = 2AF$. Se G é o ponto médio do segmento BF e E o ponto de interseção da reta passando por A e G com o segmento BC, calcule a razão EC/BE.



211. ***Números primos entre si*** – Encontre todos os pares de inteiros positivos (x, y) tais que $x < y$, x e y são primos entre si e $2\,000\left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right)$ seja um número inteiro ímpar.

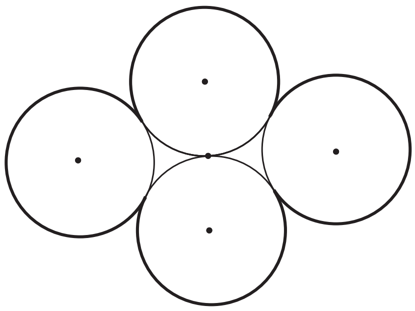
212. ***Fique atento*** – Determine todas as soluções da equação $\sqrt{x} = x - 2$.

213. ***Soluções inteiras*** – Determine todos os números inteiros x e y tais que

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{19}.$$

214. ***No ponto de ônibus*** – Um certo número de meninos e meninas aguardam pelo ônibus. No primeiro ônibus que passa no ponto em que se encontram, embarcam somente quinze meninas e ficam dois meninos para cada menina no ponto de ônibus. No segundo ônibus que passa, embarcam somente 45 meninos e ficam cinco meninas para cada menino no ponto de ônibus. Determine o número de meninos e meninas que estavam no ponto antes de passar o primeiro ônibus.

215. ***Contorno circular*** – A figura a seguir é formada por quatro círculos tangentes de raio a. Determine o comprimento do contorno externo, que está com o traçado destacado.



216. ***Um quadrilátero especial*** – Dois lados consecutivos de um quadrilátero medem 10 e 15 cm. Se cada diagonal divide o quadrilátero em duas regiões de mesma área, calcule seu perímetro.

217. ***Número curioso*** – O número 81 tem a seguinte propriedade: ele é divisível pela soma de seus algarismos, 8+1=9. Quantos números de dois algarismos cumprem essa propriedade?

218. ***Número premiado*** – Um número de seis algarismos é "premiado" se a soma de seus primeiros três algarismos for igual à soma de seus três últimos algarismos. Por exemplo, 342 531 é premiado, pois $3 + 4 + 2 = 5 + 3 + 1$.

   (a) Quais são o maior e o menor número premiado com seis algarismos distintos?

   (b) Mostre que a soma de todos os números premiados com seis algarismos distintos é divisível por 13.

219. **Altura *versus* lado** – Seja $\triangle ABC$ um triângulo tal que a altura relativa ao lado BC não é menor do que o lado BC e a altura relativa ao lado AB não é menor do que o lado AB. Determine as medidas dos ângulos deste triângulo.

220. ***Frações egípcias*** – Determine todos os números inteiros positivos distintos x e y tais que

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{7}.$$

221. ***Tabuleiro de xadrez*** – De quantas maneiras podemos colocar dois bispos de mesma cor num tabuleiro de xadrez em filas, colunas e casas de cores distintas?

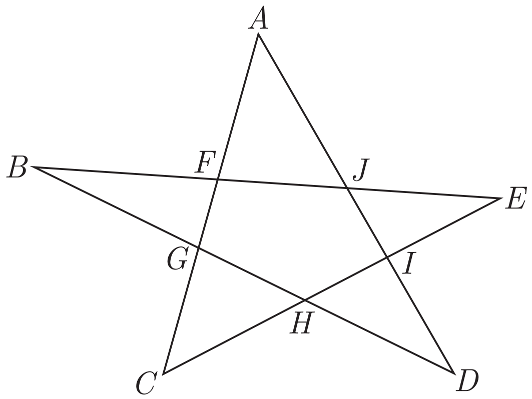
222. ***Quem é menor?*** – Sem usar calculadora, decida qual dentre os números 33^{12}, 63^{10} e 127^8 é o menor.

223. ***Brincando com números*** – A soma $1+1+4$ dos algarismos do número 114 divide o próprio número. Qual é o maior número menor do que 900 que satisfaz essa propriedade?

224. ***Cortando papéis*** – No início de uma brincadeira, André tinha sete pedaços de papel. Na primeira rodada da brincadeira, ele pegou alguns destes pedaços e cortou cada um deles em sete pedaços, que foram misturados aos pedaços de papel que não foram cortados nessa rodada. Na segunda rodada, ele novamente pegou alguns pedaços e cortou cada um deles em sete pedaços, que foram misturados aos demais papéis. Continuando dessa maneira, ao final de alguma rodada, André poderá ter exatamente 2 009 pedaços de papel?

225. ***Um trapézio especial*** – A base AD de um trapézio $ABCD$ mede 30 cm. Suponhamos que exista um ponto E na base AD tal que os triângulos $\triangle ABE$, $\triangle BCE$ e $\triangle CDE$ tenham perímetros iguais. Determine o comprimento de BC.

226. ***Uma estrela*** – Na estrela $ABCDE$ da figura dada, sabe-se que $G\widehat{B}F=20^\circ$ e $G\widehat{H}I=130^\circ$. Qual é o valor do ângulo $J\widehat{E}I$?



227. ***Número palíndromo*** – Um número é dito *palíndromo* se sua leitura da direita para a esquerda for igual à da esquerda para a direita. Por exemplo, os números 23 432 e 18 781 são palíndromos. Quantos números palíndromos de quatro algarismos são divisíveis por 9?

228. ***Multiplicação com letras*** – Na operação dada, as letras a, b e c representam algarismos distintos e diferentes de 1. Determine os valores de a, b e c.

$$\begin{array}{r} a\,b\,b \\ \times \quad c \\ \hline b\,c\,b\,1 \end{array}$$

229. ***Números sortudos*** – Digamos que um número é *sortudo* se a soma de seus algarismos for divisível por sete. Por exemplo, 7, 25 e 849 são números sortudos. Os dois menores números sortudos são 7 e 16.

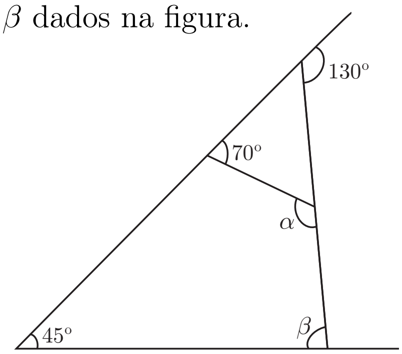
(a) Encontre oito números consecutivos, dos quais dois são números sortudos.

(b) Encontre doze números consecutivos, tais que nenhum seja sortudo.

(c) Mostre que qualquer sequência de treze números consecutivos contém, pelo menos, um número sortudo.

230. ***Uma sequência especial*** – Na sequência 1, 3, 2, ... cada termo depois dos dois primeiros é igual ao termo precedente, subtraído do termo que o precede, ou seja, se $n > 2$, então $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$. Qual é a soma dos cem primeiros termos dessa sequência?

231. ***Triângulos e ângulos...*** – Determine os ângulos α e β dados na figura.

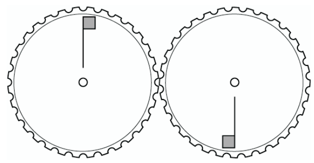


Nível 3

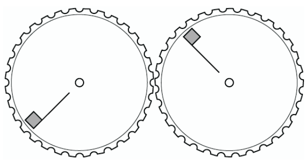
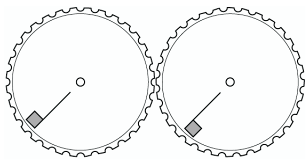
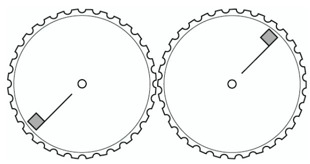
1. ***Usando velas*** – Uma cidade ainda não tem iluminação elétrica, portanto, nas casas usam-se velas à noite. Na casa de João, usa-se uma vela por noite, sem queimá-la totalmente, e com quatro desses tocos de velas, João fabrica uma nova vela. Durante quantas noites João poderá iluminar sua casa dispondo de 43 velas?

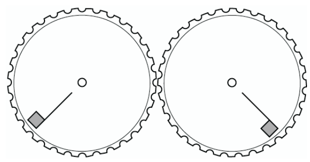
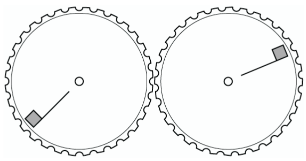
   (a) 43 (b) 53 (c) 56 (d) 57 (e) 60

2. ***Rodas e bandeiras*** – Juliano encaixou duas rodas dentadas iguais, cada uma com uma bandeirinha igual desenhada, como mostra a figura.



   Então ele girou a roda da esquerda um pouco. Qual das alternativas abaixo pode representar a posição final das rodas?

   (a)  (b)  (c) 

   (d)  (e) 

3. ***Número de latas*** – Uma fábrica embala latas de palmito em caixas de papelão de formato cúbico de 20 cm de lado. Em cada caixa são colocadas 8 latas e as caixas são colocadas, sem deixar espaços vazios, em caixotes de madeira de 80 cm de largura por 120 cm de comprimento e 60 cm de altura. Qual é o número máximo de latas de palmito em cada caixote?

   (a) 576 (b) 4 608 (c) 2 304 (d) 720 (e) 144

4. ***Qual é a menor fração?*** – Quantas frações da forma $\dfrac{n}{n+1}$ são menores do que $7/9$, sabendo que n é um número inteiro positivo?

   (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

5. ***Pistas de corrida*** – Um atleta corre 5 000 m por semana em uma quadra de esportes, que tem uma pista curta e outra longa. Em uma certa semana, ele treinou seis dias, sendo que a cada dia correu uma vez na pista longa e duas na pista curta. Na semana seguinte, ele treinou sete dias, sendo que a cada dia correu uma vez em cada pista. Podemos, então, afirmar que:

   (a) a pista longa é 500 m mais longa do que a curta;

   (b) a pista longa é quatro vezes maior do que a curta;

   (c) a pista longa é cinco vezes maior do que a curta;

(d) a pista longa é 600 m mais longa do que a curta;

(e) a pista longa é três vezes maior do que a curta.

6. ***Brincos e brincos*** – Numa certa povoação africana vivem 800 mulheres, 3% das quais usam apenas um brinco. Das demais, a metade usa dois brincos e a outra metade, nenhum. Qual é o número total de brincos usados por todas as mulheres dessa povoação?

(a) 776 (b) 788 (c) 800 (d) 812 (e) 824

7. ***Perguntas e respostas*** – Ana, Bento e Lucas participam de um concurso que consta de 20 perguntas, com as regras seguintes.

- Cada resposta certa vale 5 pontos.
- Cada resposta errada acarreta a perda de 3 pontos.
- Cada resposta em branco acarreta a perda de 2 pontos.

	certas	erradas	em branco
Ana	12	3	5
Bento	13	7	0
Lucas	12	4	4

Usando os resultados do concurso da tabela e escrevendo os nomes dos três em ordem decrescente de classificação no concurso, obtemos:

(a) Ana, Bento, Lucas; (c) Ana, Lucas, Bento; (e) Bento, Ana, Lucas.

(b) Lucas, Bento, Ana; (d) Lucas, Ana, Bento;

8. ***Qual é a carga?*** – O limite de peso que um caminhão pode transportar corresponde a 50 sacos de areia ou a 400 tijolos. Se esse caminhão já carrega 32 sacos de areia, quantos tijolos, no máximo, ele ainda pode carregar?

(a) 132 (b) 144 (c) 146 (d) 148 (e) 152

9. ***Quanto mede a cerca?*** – Uma cerca reta de arame tem 12 postes igualmente espaçados. A distância entre o terceiro e o sexto poste é de 3,3 m. Qual é o comprimento da cerca, em metros?

(a) 8,4 (b) 12,1 (c) 9,9 (d) 13,2 (e) 9,075

10. ***Dízima periódica*** – Sabendo que $0{,}333\ldots = \dfrac{1}{3}$, qual é a fração irredutível equivalente a $0,1333\ldots$?

(a) $\dfrac{1}{13}$ (b) $\dfrac{1}{15}$ (c) $\dfrac{1}{30}$ (d) $\dfrac{2}{15}$ (e) $\dfrac{1\,333}{10\,000}$

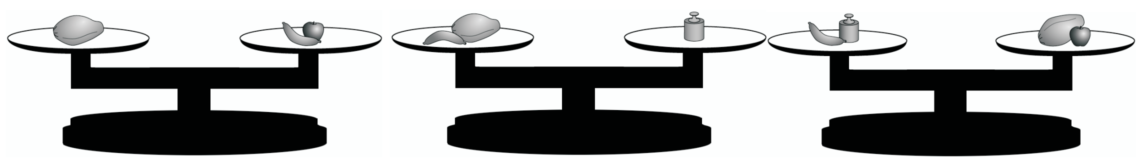
11. ***Valor absoluto*** – O *valor absoluto* $|a|$ de um número a qualquer é definido por

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a > 0, \\ 0 & \text{se } a = 0, \\ -a & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Por exemplo, $|6| = 6$, $|-4| = 4$ e $|0| = 0$. Quanto vale $N = |5| + |3-8| - |-4|$?

(a) 4 (b) -4 (c) 14 (d) -14 (e) 6

12. ***O peso das frutas*** – Marcos quer pesar, numa balança de dois pratos, uma banana, uma maçã e um mamão. Em cada uma das figuras dadas, a balança está em equilíbrio, isto é, os conteúdos que estão no prato da direita têm o mesmo peso que os que estão no prato da esquerda. Em duas das três pesagens foi utilizado um peso de 200 gramas. Podemos afirmar que as três frutas têm um peso total, em gramas, de

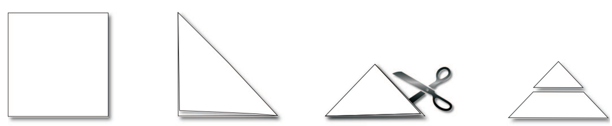


(a) 250; (b) 300; (c) 350; (d) 400; (e) 450.

13. ***Maratona*** – André treina para a maratona dando voltas em torno de uma pista circular com 100 m de raio. Para percorrer 42 km, o número de voltas que André precisa dar está entre:

(a) 1 e 10; (b) 10 e 50; (c) 50 e 100; (d) 100 e 500; (e) 500 e 1 000.

14. ***Dobrando papel*** – Uma folha quadrada foi dobrada duas vezes ao longo de suas diagonais, obtendo-se um triângulo. Em seguida, foi feito um corte reto na folha dobrada, paralelo ao lado maior desse triângulo, passando pelos pontos médios dos outros lados, conforme a ilustração dada.



Desdobrando a folha, obteve-se um buraco quadrado no meio da folha. A área do buraco corresponde a qual fração da área de toda a folha quadrada original?

(a) $\dfrac{1}{2}$ (b) $\dfrac{1}{6}$ (c) $\dfrac{3}{8}$ (d) $\dfrac{3}{4}$ (e) $\dfrac{1}{4}$

15. ***Encontre o número*** – Qual é o menor número inteiro positivo N tal que $N/3, N/4, N/5, N/6$ e $N/7$ sejam todos números inteiros?

(a) 420 (b) 350 (c) 210 (d) 300 (e) 280

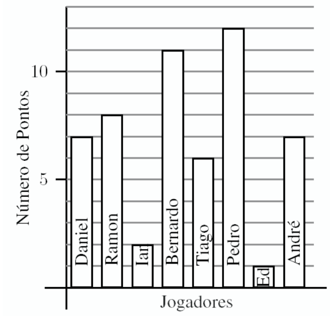
16. ***Equação quadrática*** – Se 3 e $1/3$ são as raízes da equação $ax^2 - 6x + c = 0$, qual é o valor de $a + c$?

(a) 1 (b) 0 (c) $-\dfrac{9}{5}$ (d) $\dfrac{18}{5}$ (e) -5

17. ***Cubo*** – Os vértices de um cubo são numerados de 1 a 8, de tal modo que uma das faces tem os vértices $\{1, 2, 6, 7\}$ e as outras cinco têm os vértices $\{1, 4, 6, 8\}$, $\{1, 2, 5, 8\}$, $\{2, 3, 5, 7\}$, $\{3, 4, 6, 7\}$ e $\{3, 4, 5, 8\}$. Qual é o número do vértice que está mais distante do vértice de número 6?

(a) 1 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 7

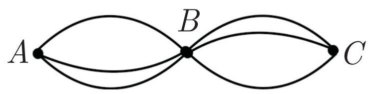
18. ***Time de basquete*** – O gráfico dado mostra o número de pontos que os oito jogadores de basquete do time da escola marcaram no último jogo.



Qual é o número total de pontos marcados pelo time?

(a) 54 (b) 8 (c) 12 (d) 58 (e) 46

19. ***O caminho da formiguinha*** – Uma formiguinha vai caminhar de A até C, podendo passar apenas uma vez pelo ponto B e usando somente os caminhos indicados na figura.



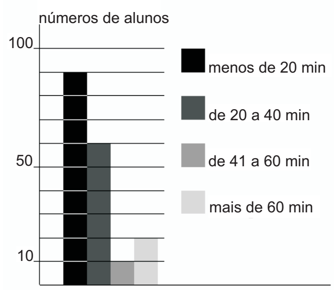
Qual é o número de maneiras diferentes que ela pode escolher para caminhar de A até C?

(a) 3 (b) 5 (c) 7 (d) 8 (e) 9

20. ***Operação*** ✠ – Dados dois números reais a e b, considere a ✠ $b = a^2 - ab + b^2$. Quanto vale 1 ✠ 0?

(a) 1 (b) 0 (c) 2 (d) -2 (e) -1

21. ***Indo para a escola*** – O diagrama de barras mostra a distribuição dos alunos de uma escola de acordo com o tempo que gastam no trajeto de casa para a escola. As frações de minuto foram desconsideradas; por exemplo, se um aluno gasta 40 minutos e 15 segundos neste trajeto, considera-se que o tempo gasto é de 40 minutos.



Responda às perguntas seguintes justificando sua resposta.

(a) Quantos alunos gastam menos do que 20 minutos para chegar à escola?

(b) Quantos alunos tem esta escola?

(c) Quantos alunos gastam mais do que 40 minutos para chegar à escola?

(d) É verdade que a maioria dos alunos gasta mais do que 20 minutos para chegar à escola?

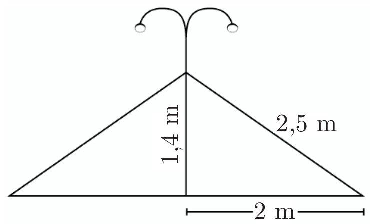
22. ***Campeonato de futebol*** – No último campeonato de futebol do bairro em que moro participaram seis equipes, denominadas A, B, C, D, E e F. Cada equipe disputou, com cada uma das outras, exatamente uma partida. A tabela de classificação do campeonato é fornecida a seguir, sendo V é o número de vitórias, E o número de empates, D o número de derrotas, GP o número de gols marcados e GC o número de gols sofridos para cada equipe.

(a) Quantas partidas foram disputadas?

(b) A tabela está incompleta. Determine a quantidade de vitórias da equipe F, a quantidade de derrotas da equipe D e a quantidade de gols marcados pela equipe F, representados na tabela por x, y e z.

Equipe	**V**	**E**	**D**	**GP**	**GC**
A	4	1	0	6	2
B	2	1	2	6	6
C	0	3	2	2	6
D	1	1	y	3	6
E	0	1	4	1	5
F	x	1	0	z	3

23. ***Poste elétrico*** – Uma companhia de eletricidade instalou um poste num terreno plano. Para fixar bem o poste, foram presos cabos no poste, a uma altura de 1,4 metros do solo e a 2 metros de distância do poste, sendo que um dos cabos mede 2,5 metros, conforme a figura.



Um professor de Matemática, após analisar estas medidas, afirmou que o poste não está perpendicular ao solo. Você acha que o professor está certo? Justifique sua resposta.

24. ***Equações recíprocas*** – Briot (matemático inglês, que viveu de 1817 a 1882) e Ruffini (matemático italiano, que viveu de 1765 a 1822) desenvolveram métodos para encontrar soluções para as equações chamadas recíprocas. Nesta questão, você vai desenvolver, passo a passo, a essência desses métodos. O item (a) é uma preparação para os demais itens.

(a) Se $y = x + \dfrac{1}{x}$, calcule as expressões $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ e $x^3 + \dfrac{1}{x^3}$ em termos de y.

(b) Determine todas as raízes reais da equação $x^2 - 5x + 8 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 0$.

(c) Determine todas as raízes reais de $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$.

(d) Determine todas as raízes reais de $x^6 - 2x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 5x^2 - 2x + 1 = 0$.

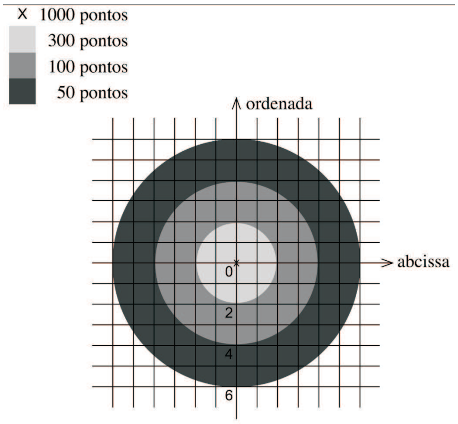
25. ***Atirando flechas*** – Manoel testa sua pontaria lançando cinco flechas que atingiram o alvo nos pontos A, B, C, D e E, de coordenadas $A = (1, -1)$, $B = (2{,}5; 1)$, $C = (-1, 4)$, $D = (-4, -4)$ e $E = (6, 5)$.

A tabela mostra quantos pontos se ganha quando a flecha acerta um ponto dentro de cada uma das três regiões, conforme mostra a figura.

(a) Marque os pontos A, B, C, D e E.

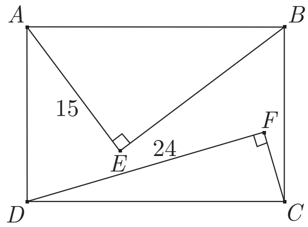
(b) Quantas flechas ele acertou no interior do menor círculo?

(c) Ao todo, quantos pontos Manoel fez?



26. ***Festa de aniversário*** – A festa de aniversário de André tem menos do que 120 convidados. Para o jantar, ele pode dividir os convidados em mesas completas de seis pessoas ou em mesas completas de sete pessoas. Em ambos os casos, são necessárias mais do que 10 mesas e todos os convidados ficam em alguma mesa. Quantos são os convidados?

27. ***Medida do cateto*** – Na figura dada, $ABCD$ é um retângulo e $\triangle ABE$ e $\triangle CDF$ são triângulos retângulos. A área do triângulo $\triangle ABE$ é 150 cm^2 e os segmentos AE e DF medem, respectivamente, 15 e 24 cm. Qual é o comprimento do segmento CF?

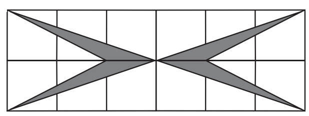


28. ***Sequência de Peri*** – Usando apenas os dígitos 1, 2, 3, 4 e 5, Peri construiu a sequência

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \ldots,$$

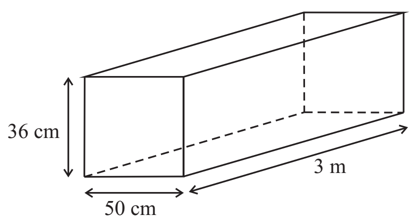
começando com um 1, seguido de dois 2, três 3, quatro 4, cinco 5, seis 1, sete 2, e assim por diante. Qual é o centésimo termo dessa sequência?

29. ***Área em azulejo*** – A figura dada foi montada com 12 azulejos quadrados de lados iguais a 10 cm. Qual é a área da região destacada?

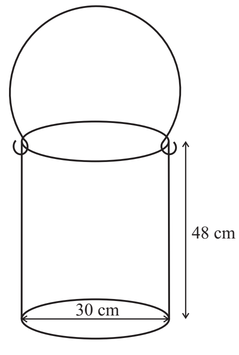


30. ***Os cartões de Capitu*** – Capitu tem cem cartões numerados de 1 a 100. Todos cartões têm uma face amarela e a outra vermelha e o número de cada cartão está escrito em ambas as faces. Os cartões foram colocados sobre uma mesa, todos com a face vermelha voltada para cima. Capitu virou todos os cartões de número par e depois todos os cartões de número múltiplo de 3, colocando-os com a face amarela voltada para cima. Quantos cartões ficaram com a face vermelha para cima?

31. ***Enchendo o tanque*** – Para encher de água um tanque em forma de um bloco retangular de 3 m de comprimento, 50 cm de largura e 0,36 m de altura, um homem utiliza um balde cilíndrico, de 30 cm de



diâmetro em sua base e 48 cm de altura, para pegar água numa fonte. Cada vez que ele vai à fonte, ele enche 4/5 do balde e no caminho derrama 10% do seu conteúdo. Estando o tanque inicialmente vazio, quantas viagens à fonte o homem terá de fazer para que a água no tanque chegue a 3/4 de sua altura?



32. ***Fator primo*** – Qual é o maior fator primo de 2 006?

33. ***Altura de salário*** – Entre 1986 e 1989, a moeda do nosso país era o cruzado (Cz$). De lá para cá, tivemos o cruzado novo, o cruzeiro, o cruzeiro novo e, hoje, temos o real. Para comparar valores do tempo do cruzado e de hoje, os economistas calcularam que 1 real equivale a 2 750 000 000 cruzados. Imagine que a moeda não tivesse mudado e que João, que ganha hoje 640 reais por mês, tivesse que receber seu salário em notas de 1 cruzado, somente. Se uma pilha de cem notas de 1 cruzado mede 1,5 cm de altura, qual seria a altura (em quilômetros) do salário do João?

(a) 26,4 (b) 264 (c) 26 400 (d) 264 000 (e) 2 640 000

34. ***Só bala*** – Há 1 002 balas de banana e 1 002 balas de maçã numa caixa. Lara tira, sem olhar o sabor, duas balas da caixa. Se q é a probabilidade de as duas balas serem de sabores diferentes e p é a probabilidade de as duas balas serem do mesmo sabor, qual é o valor de $q - p$?

(a) 0 (b) $\dfrac{1}{2\,004}$ (c) $\dfrac{1}{2\,003}$ (d) $\dfrac{2}{2\,003}$ (e) $\dfrac{1}{1\,001}$

35. ***Distância ao centro*** – Um ponto P está no centro de um quadrado de 10 cm de lado. Quantos pontos da borda do quadrado estão a uma distância de 6 cm de P?

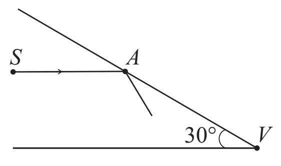
(a) 1 (b) 2 (c) 4 (d) 6 (e) 8

36. ***Potências e potências*** – Se $2\left(2^{2x}\right) = 4^x + 64$, qual é o valor de x?

(a) -2 (b) -1 (c) 1 (d) 2 (e) 3

37. ***Um raio de luz*** – Dois espelhos formam um ângulo de 30° no ponto V. Um raio de luz parte de um ponto S paralelamente a um dos espelhos e é refletido pelo outro espelho no ponto A, como mostra a figura.

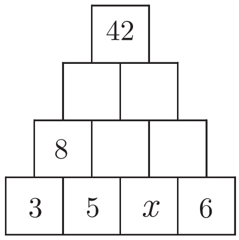
Depois de uma certa quantidade de reflexões, o raio retorna a S. Se AS e AV medem, ambos, 1 metro, qual é o comprimento (em metros) do trajeto percorrido pelo raio de luz?



(a) 2 (b) $2 + \sqrt{3}$ (c) $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ (d) $\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})$ (e) $5\sqrt{3}$

38. ***Diferença de quadrados*** – Determine o valor de $(666\,666\,666)^2 - (333\,333\,333)^2$.

39. ***Escada de número*** – Na figura, o número 8 foi obtido somando-se os dois números diretamente abaixo de sua casa. Fazendo-se o mesmo para preencher as casas em branco, obtém-se o 42 na casa indicada. Qual é o valor de x?



(a) 7 (b) 3 (c) 5 (d) 4 (e) 6

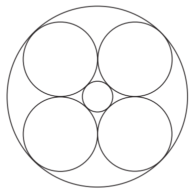
40. ***Diferença de potências*** – Seja $n = 9\,867$. Se você calculasse $n^3 - n^2$, qual seria o algarismo das unidades encontrado?

(a) 0 (b) 2 (c) 4 (d) 6 (e) 8

41. ***Parábola girada*** – O gráfico da parábola $y = x^2 - 5x + 9$ é rodado de 180° em torno da origem. Qual é a equação da nova parábola?

(a) $y = x^2 + 5x + 9$ (c) $y = -x^2 + 5x - 9$ (e) $y = -x^2 - 5x - 9$
(b) $y = x^2 - 5x - 9$ (d) $y = -x^2 - 5x + 9$

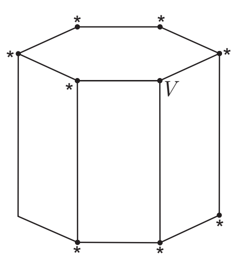
42. ***Logotipo*** – A figura mostra a marca de uma empresa, formada por dois círculos concêntricos e outros quatro círculos de mesmo raio, cada um deles tangente a dois dos outros e aos dois círculos concêntricos. O raio do círculo menor mede 1 cm. Qual é, em centímetros, o raio do círculo maior?

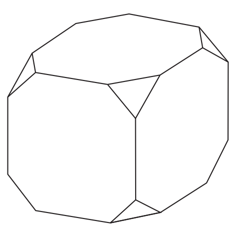


43. ***Padeiro cansado*** – Um padeiro quer gastar toda sua farinha para fazer pães. Trabalhando sozinho, ele conseguiria acabar com a farinha em 6 horas. Com um ajudante, o mesmo poderia ser feito em 2 horas. O padeiro começou a trabalhar sozinho e, depois de algum tempo, cansado, ele chamou seu ajudante e assim, após 150 minutos a farinha acabou. Durante quantos minutos o padeiro trabalhou sozinho?

(a) 30 (b) 35 (c) 40 (d) 45 (e) 50

44. ***Muitas diagonais*** – Calcule o número de diagonais de um prisma hexagonal reto, como o da figura à esquerda. Calcule o número de diagonais do poliedro obtido a partir de um cubo pelo corte de seus oito vértices, como o da figura à direita. (Esse poliedro é muito utilizado na fabricação de dados, pois o corte próximo a cada um de seus vértices "arredonda" o dado e facilita a sua rolagem.)



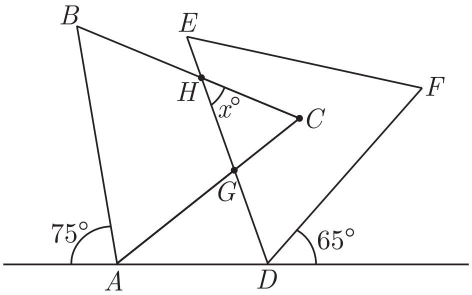


45. ***Promoção de sabonete*** – Uma loja de sabonetes realiza uma promoção com o anúncio *"Compre um e leve outro pela metade do preço."* Qual seria uma outra promoção que a loja poderia fazer oferecendo o mesmo desconto percentual?

(a) *"Leve dois e pague um"*
(b) *"Leve três e pague dois"*
(c) *"Leve cinco e pague quatro"*
(d) *"Leve três e pague um"*
(e) *"Leve quatro e pague três"*

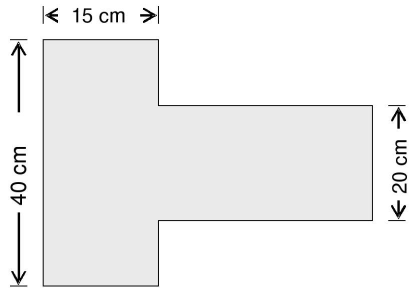
46. ***Qual é o ângulo?*** – Na figura, os dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ são equiláteros. Qual é o valor do ângulo x?

(a) $30°$
(b) $40°$
(c) $50°$
(d) $60°$
(e) $70°$



47. ***Caixa de papelão*** – A figura mostra um pedaço de papelão que será dobrado e colado ao longo das bordas para formar uma caixa retangular. Os ângulos nos cantos do papelão são todos retos. Qual será o volume, em cm^3, da caixa?

(a) 1 500
(b) 3 000
(c) 4 500
(d) 6 000
(e) 12 000



48. ***Soma de vizinhos*** – Numa sequência, cada termo, a partir do terceiro, é a soma dos dois termos imediatamente anteriores. Se o segundo termo é 1 e o quinto termo é 2005, qual é o sexto termo?

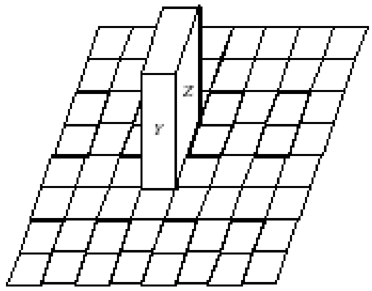
(a) 3 002 (b) 3 008 (c) 3 010 (d) 4 002 (e) 5 004

49. ***Algarismos crescentes*** – Quantos números entre 10 e 13 000, quando lidos da esquerda para a direita, são formados por algarismos consecutivos e em ordem crescente? Por exemplo, 456 é um desses números, mas 7 890 não é.

(a) 10 (b) 13 (c) 18 (d) 22 (e) 25

50. ***Bloco girante*** – Num bloco de $1 \times 2 \times 3$ centímetros, marcamos três faces com as letras X, Y e Z, como na figura. O bloco é colocado sobre um tabuleiro de 8×8 cm com a face X virada para baixo, em contato com o tabuleiro, conforme mostra a figura. Giramos o bloco de $90°$ em torno de uma de suas arestas de modo que a face Y fique virada para baixo (isto é, totalmente em contato com o tabuleiro). Em seguida, giramos novamente o bloco de $90°$ em torno de uma de suas arestas, mas desta vez de modo que a face Z fique virada para baixo.

Giramos o bloco mais três vezes de 90° em torno de uma de suas arestas, fazendo com que as faces X, Y e Z fiquem viradas para baixo, nessa ordem. Quantos quadradinhos diferentes do tabuleiro estiveram em contato com o bloco?



(a) 18 (b) 19 (c) 20 (d) 21 (e) 22

51. ***Iterando um ponto*** – A função f é dada pela tabela

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	4	1	3	5	2

.

Por exemplo, $f(2)=1$ e $f(4)=5$. Quanto vale $\underbrace{f(f(f(f(\ldots f}_{\text{2004 vezes}}(4)\ldots))))$?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

52. ***Esmeralda e o 21*** – Esmeralda escreveu em ordem crescente todos os números de 1 a 999, sem separá-los, formando o número

$$12345678910111213\ldots 997998999.$$

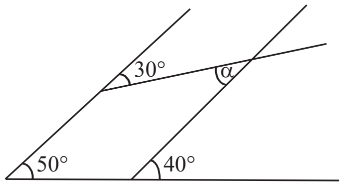
Quantas vezes aparece o agrupamento "21", nessa ordem?

53. ***Muitos fatores*** – Qual é o valor do produto $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{225}\right)$?

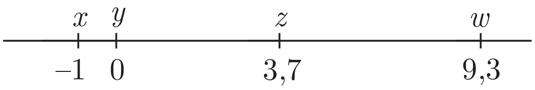
(a) $\dfrac{10}{125}$ (b) $\dfrac{5}{9}$ (c) $\dfrac{3}{5}$ (d) $\dfrac{8}{15}$ (e) $\dfrac{1}{120}$

54. ***Falta um ângulo*** – Quanto mede, em graus, o ângulo α da figura?

(a) 20 (b) 25 (c) 30 (d) 35 (e) 40

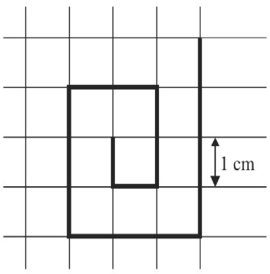


55. ***Soma de distâncias*** – Da figura, concluímos que $|z-x|+|w-x|$ é igual a



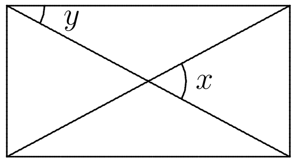
(a) 11 (b) 12 (c) 13 (d) 14 (e) 15

56. ***Espiral do Artur*** – Artur quer desenhar uma "espiral" de 4 metros de comprimento, formada de segmentos de reta. Ele já traçou sete segmentos, como mostra a figura. Quantos segmentos ainda faltam traçar?



(a) 28 (b) 30 (c) 24 (d) 32 (e) 36

57. ***Quais são os ângulos?*** – A figura mostra um retângulo e suas duas diagonais. Qual é a afirmativa correta a respeito dos ângulos x e y indicados na figura?

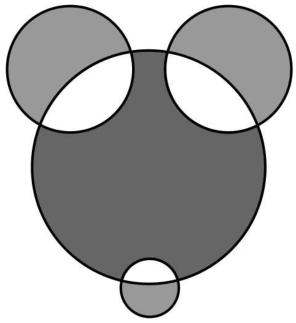


(a) $x < y$ (c) $2x = 3y$ (e) $x = 3y$

(b) $x = y$ (d) $x = 2y$

58. ***Raiz menor*** – Qual é a menor das raízes da equação $2(x - 3\sqrt{5})(x - 5\sqrt{3}) = 0$?

59. ***Comparando áreas*** – Seja v a soma das áreas das regiões pertencentes unicamente aos três discos pequenos na figura (em cinza claro) e seja w a área da região interior pertencente unicamente ao maior disco (em cinza escuro). Os diâmetros dos círculos são 6, 4, 4 e 2. Qual das igualdades dadas é verdadeira?



(a) $3v = \pi w$ (c) $v = w$ (e) $\pi v = w$

(b) $3v = 2w$ (d) $\pi v = 3w$

60. ***Menor raiz*** – Qual é a menor raiz da equação $\dfrac{|x-1|}{x^2} = 6$?

(a) $-\dfrac{1}{3}$ (b) $-\dfrac{1}{2}$ (c) $\dfrac{1}{3}$ (d) $\dfrac{1}{4}$ (e) $\dfrac{3}{2}$

61. ***Toalha redonda*** – Uma mesa quadrada tem 1 metro de lado. Qual é o menor diâmetro (em metros) de uma toalha redonda que cubra completamente o tampo da mesa?

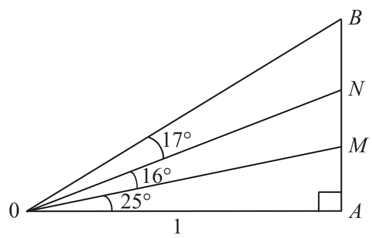
(a) 1 (b) 1,5 (c) 2 (d) $\sqrt{2}$ (e) $\sqrt{3}$

62. ***Soluções reais*** – Qual é o conjunto formado por todos os valores reais positivos de x tais que $(x-1)(x-2)(x-3) < 0$?

(a) $(1,2)$ (b) $(1,3)$ (c) $(0,1) \cup (2,3)$ (d) $(0,3)$ (e) $(0,2)$

63. ***Cossenos crescentes*** – Num triângulo retângulo, definimos o cosseno de um ângulo agudo α por $\cos\alpha = \dfrac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$.

O triângulo retângulo da figura tem cateto $OA = 1$. Escreva, em ordem crescente, os cossenos dos ângulos de 25°, 41° e 58°.



64. ***Central telefônica*** – Os ramais de uma central telefônica têm apenas 2 algarismos, de 00 a 99. Nem todos os ramais estão em uso. Trocando a ordem de dois algarismos de um ramal em uso, ou se obtém o mesmo número ou um número de um ramal que não está em uso. Qual é o maior número possível de ramais em uso?

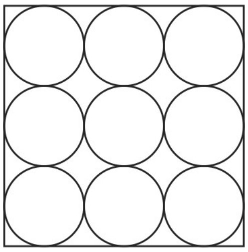
(a) Menos do que 45 (c) Entre 45 e 55 (e) 55

(b) 45 (d) Mais do que 55

65. ***Horário de avião*** – Um ônibus, um trem e um avião partem no mesmo horário da cidade A para a cidade B. Se eu tomar o ônibus, cuja velocidade média é de 100 km/h, chegarei à cidade B às 20 horas. Se eu tomar o trem, cuja velocidade média é de 300 km/h, chegarei à cidade B às 14 horas. Qual será o horário de chegada do avião se sua velocidade média for de 900 km/h?

66. ***Discos de papelão*** – Para fabricar nove discos de papelão circulares para o Carnaval usam-se folhas quadradas de 10 cm de lado, como indicado na figura. Qual é a área (em cm^2) do papel não aproveitado?

(a) 25
(b) 22,5
(c) 21,5
(d) 21
(e) 22



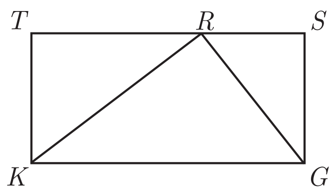
67. ***Afirmações absolutas*** – Determine quais são as afirmações verdadeiras.

(a) $|-108| > 100$
(b) $|2-9| = 9-2$
(c) $|-6a| = 6|a|$
(d) $|5-13| = |5| - |13|$
(e) $|a^2+5| = a^2+5$

68. ***Fração radical*** – Se $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = 5$, quanto é $\dfrac{x+y}{2y}$?

(a) $\dfrac{5}{2}$ (b) $3\sqrt{2}$ (c) $13y$ (d) $\dfrac{25y}{2}$ (e) 13

69. ***Área de triângulo*** – A figura mostra um retângulo $KGST$ e um triângulo $\triangle KGR$. Os ângulos $K\widehat{R}T$ e $R\widehat{G}S$ são iguais. Se $TR = 6$ e $RS = 2$, qual é a área do triângulo $\triangle KGR$?



(a) 12 (b) 16 (c) $8\sqrt{2}$ (d) $8\sqrt{3}$ (e) 14

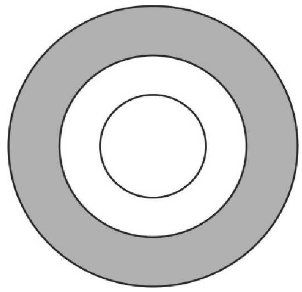
70. ***Pares de inteiros*** – Quantos são os pares diferentes de inteiros positivos (a, b) tais que $a + b \leq 100$ e $\dfrac{a+\dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{a}+b} = 13$?

(a) 1 (b) 5 (c) 7 (d) 9 (e) 13

71. ***Qual é a soma?*** – Se $x+|x|+y = 5$ e $x+|y|-y = 6$, qual é o valor da soma $x+y$?

(a) -1 (b) 11 (c) $\dfrac{9}{5}$ (d) 1 (e) -11

72. ***Círculo intermediário*** – Na figura, os três círculos são concêntricos, e a área do menor círculo coincide com a área do maior anel, destacado em cinza. O raio do menor círculo é 5 cm e do maior 13 cm. Qual é o raio (em cm) do círculo intermediário?



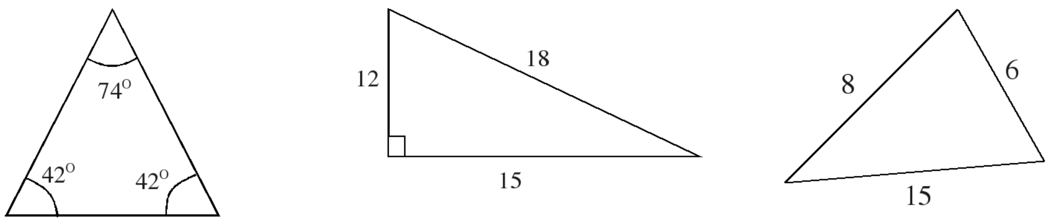
(a) 12 (c) $10\sqrt{65}$ (e) $12\sqrt{2}$

(b) 11 (d) $5\sqrt{3}$

73. ***Frações incompletas*** – Encontre os algarismos que estão faltando em cada um dos espaços marcados com traços.

(a) $\dfrac{126}{8\_} = \dfrac{21}{\_\,\_}$ (b) $\dfrac{\_\,\_8}{33\_} = \dfrac{4}{5}$

74. ***Triângulos impossíveis*** – Quais dessas figuras estão erradas?



75. ***Razão de áreas*** – Se um arco de 60° num círculo I tem o mesmo comprimento que um arco de 45° num círculo II, encontre a razão entre a área do círculo I e a área do círculo II.

(a) $\dfrac{16}{9}$ (b) $\dfrac{9}{16}$ (c) $\dfrac{4}{3}$ (d) $\dfrac{3}{4}$ (e) $\dfrac{6}{9}$

76. ***Inequação errada*** – Sendo $x > 0, y > 0, x > y$ e $z \neq 0$, encontre a única desigualdade falsa.

(a) $x + z > y + z$ (c) $xz > yz$ (e) $xz^2 > yz^2$

(b) $x - z > y - z$ (d) $\dfrac{x}{z^2} > \dfrac{y}{z^2}$

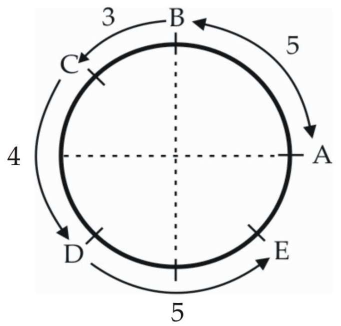
77. ***Equações geométricas*** – Resolva as equações dadas geometricamente, ou seja, interpretando o valor absoluto $|a - b|$ como a distância entre a e b.

(a) $|x - 5| = 2$ (c) $|3x - 7| = 9$

(b) $|x + 3| = 1$ (d) $|x + 2| = |x - 5|$

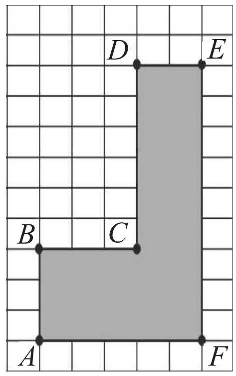
78. ***Pista circular*** – A pista de um autódromo tem 20 km de comprimento e forma circular, conforme figura.

Os pontos marcados na pista são A, que é o ponto de partida; B, que dista 5 km de A no sentido do percurso; C, que dista 3 km de B no sentido do percurso; D, que dista 4 km de C no sentido do percurso; e E, que dista 5 km de D no sentido do percurso. Um carro que parte de A e para após percorrer 367 km estará mais próximo de qual dos cinco pontos?



(a) A (b) B (c) C (d) D (e) E

79. ***Maior comprimento*** – No diagrama dado, todos os quadradinhos têm 1 cm de lado. Qual dos segmentos dados é o de maior comprimento?



(a) AE

(b) $CD + CF$

(c) $AC + CF$

(d) FD

(e) $AC + CE$

80. ***Desigualdade entre inteiros*** – Quantos dentre os números $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ satisfazem a desigualdade $-3x^2 < -14$?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

81. ***Equação cúbica*** – Sobre a equação $2\,007x^3 + 2\,006x^2 + 2\,005x = 0$, o certo é afirmar que:

(a) não possui raízes;

(b) tem três raízes reais distintas;

(c) tem duas raízes iguais;

(d) tem apenas uma raiz real;

(e) tem três raízes positivas.

82. ***O perfume de Rosa*** – Rosa ganhou um vidro de perfume com o formato de um cilindro com 7 cm de raio da base e 10 cm de altura. Depois de duas semanas usando o perfume, restaram 0,45 litros no vidro. Qual é a fração que representa o volume que Rosa já usou?

83. ***Igualdade com inteiros*** – Quais números naturais m e n satisfazem a equação $2^n + 1 = m^2$?

84. ***O caminho da pulga*** – Para percorrer um caminho reto de 10 metros de comprimento, uma pulga usa a seguinte estratégia: a cada dia, ela percorre a metade do caminho que falta. Assim, ela percorre 5 metros no primeiro dia, 2,5 metros no segundo, e assim por diante (o tamanho da pulga pode ser desconsiderado).

(a) Quantos metros ela terá percorrido ao final do sétimo dia? E do décimo?

(b) A partir de qual dia a pulga estará a menos de 0,001 m do final do caminho?

85. ***Uma soma alternada*** – Se $S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots + (-1)^{n+1}n$ para cada inteiro positivo n, então $S_{1992} + S_{1993}$ é igual a

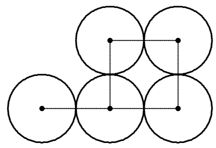
(a) -2; (b) -1; (c) 0; (d) 1; (e) 2.

86. ***O raio da circunferência*** – Um arco de circunferência mede 300° e o seu comprimento é de 2 km. Qual é o número inteiro mais próximo da medida do raio do círculo, em metros?

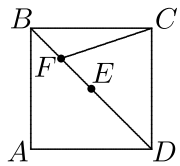
(a) 157 (b) 284 (c) 382 (d) 628 (e) 764

87. ***Quatro passageiros*** – Em um táxi, um passageiro pode se sentar na frente e três passageiros atrás. De quantas maneiras podem se sentar quatro passageiros de um taxi se um desses passageiros quiser ficar na janela?

88. ***Os cinco círculos*** – Cinco discos de mesmo raio estão dispostos como mostra a figura. Quatro centros são os vértices de um quadrado e três estão alinhados. Trace uma reta que divida a figura formada pelos cinco discos em duas partes de mesma área.



89. ***O triângulo e o quadrado*** – Na figura dada, $ABCD$ é um quadrado cujo lado mede 1 cm, E é o ponto médio da diagonal BD e F é o ponto médio do segmento BE. Qual é a área do triângulo $\triangle CBF$?



90. ***Uma refeição*** – Um sanduíche e um prato de refeição custam R\$ 5,00 e R\$ 7,00, respectivamente. De quantas maneiras pode-se comprar só sanduiches, só pratos de refeição ou alguma combinação de sanduiches e pratos de refeição com R\$ 90,00, sem deixar troco?

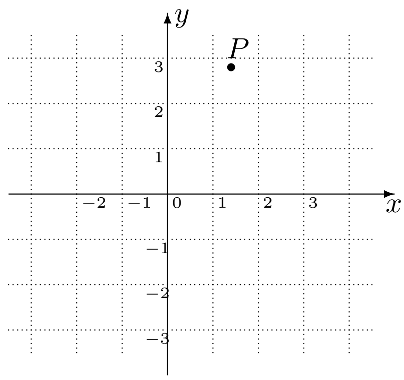
91. ***Plano cartesiano*** – O ponto $P = (a, b)$ está marcado na figura ao lado. Marque os pontos:

(a) $A = (a + 1, b/2)$;

(b) $B = (a/2, b - 1)$;

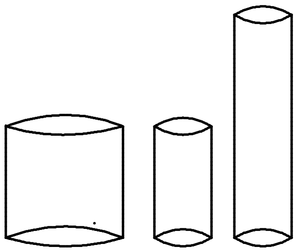
(c) $C = (-a, -b)$;

(d) $D = (1 - a, b - 2)$.



92. ***Soma dos terminados em 9*** – A soma $S_n = 9 + 19 + 29 + 39 + \cdots + a_n$ denota a soma dos primeiros n números naturais terminados em 9. Qual é o menor valor de n para que S_n seja maior do que 10^5?

93. ***Três cilindros*** – Três cilindros de volumes V_1, V_2 e V_3 têm alturas e raios das bases iguais a 10 e 10 cm, 10 e 5 cm e 20 e 5 cm.



(a) Escreva em ordem crescente os volumes V_1, V_2 e V_3 dos três cilindros.

(b) Dê as dimensões de um cilindro cujo volume V_4 esteja entre V_2 e V_3.

(c) Dê as dimensões de um cilindro cujo volume V_5 esteja entre V_1 e V_3.

94. ***Porcentagem de mortalidade*** – Se 15% dos membros de uma população foram afetados por uma doença e 8% dos afetados morreram, a porcentagem da mortalidade em relação à população inteira foi de:

(a) 1,2% ; (b) 1,8% ; (c) 8% ; (d) 12% ; (e) 23% .

95. ***Agenda de aulas*** – Eliane quer escolher o seu horário para a natação. Ela quer ir a duas aulas por semana, uma de manhã e outra de tarde, não sendo no mesmo dia, nem em dias seguidos. De manhã, há aulas de natação de segunda-feira a sábado, às 9h, às 10h e às 11h e de tarde, de segunda a sexta-feira, às 17h e às 18h. De quantas maneiras distintas pode Eliane escolher o seu horário?

96. ***Jogo de cartas*** – Um grupo de amigos disputa um jogo no qual 16 cartas (sendo quatro ases, quatro reis, quatro damas e quatro valetes) estão inicialmente dispostas em quatro pilhas de quatro cartas. O jogo consiste em mover sucessivamente a carta superior de uma pilha e colocá-la sobre uma outra pilha, até obter quatro novas pilhas, em que na primeira pilha só tenha ases, na segunda, só valetes, na terceira só damas e na quarta pilha só reis. Ganha o jogo quem fizer o menor número de movimentos. Com quantos movimentos sempre é possível terminar o jogo? Na figura dada, aparece a disposição inicial das cartas nas pilhas.

pilha 1	pilha 2	pilha 3	pilha 4
rei de ♡	dama de ♡	rei de □	valete de ♠
dama de □	ás de □	valete de ♡	rei de ♠
valete de □	ás de ♡	dama de ♠	ás de ♠
ás de ♣	valete de ♣	dama de ♣	rei de ♣

97. ***Frações inteiras*** – Quantos números inteiros positivos n existem tais que o quociente $\dfrac{2n^2+4n+18}{3n+3}$ seja um inteiro?

98. ***Quatro prefeitos e um círculo*** – Quatro prefeitos decidem construir uma rodovia circular que passe dentro dos limites de suas cidades. Como as quatro cidades não estão sobre um mesmo círculo, os prefeitos contratam uma empresa para elaborar um projeto

para a construção de uma rodovia circular equidistante das quatro cidades. Qual é o maior número de projetos geograficamente distintos que a empresa pode elaborar?

99. ***Fatoriais*** – Se n é um número inteiro positivo, denotamos por $n!$ o produto de todos os inteiros de 1 a n. Por exemplo, $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ e $13! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \cdots \times 12 \times 13$. Por convenção, escrevemos $0! = 1! = 1$. Encontre três números inteiros a, b e c entre 0 e 9, que sejam distintos e tais que o número de três algarismos $a\,b\,c$ seja igual a $a! + b! + c!$.

100. ***O Riquinho*** – Riquinho distribuiu 1 000,00 reais entre os seus amigos Antônio, Bernardo e Carlos da seguinte maneira: deu, sucessivamente, 1 real ao Antônio, 2 reais ao Bernardo, 3 reais ao Carlos, 4 reais ao Antônio, 5 reais ao Bernardo etc. Qual foi a quantia recebida por Bernardo?

101. ***Retângulo com dimensões inteiras*** – As diagonais de um retângulo medem $\sqrt{1\,993}$ cm. Quais são as dimensões do retângulo, sabendo que elas são números inteiros?

102. ***Múltiplos de 3 e quadrados perfeitos*** – Escreve-se em ordem crescente os múltiplos de 3 que, somados com 1, sejam quadrados perfeitos, ou seja, 3, 15, 24, 48, ... Qual é o múltiplo de 3 na 2 006ª posição?

103. ***Cinco cartas*** – Cinco cartas estão sobre uma mesa, e cada uma tem um número numa face e uma letra na outra. Simone deve decidir se a seguinte frase é verdadeira: "*Se uma carta tem uma vogal numa face, então ela tem um número par na outra.*" Qual é o menor número de cartas que ela precisa virar para tomar uma decisão correta?

$$\boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{\mathrm{M}}\ \boxed{\mathrm{A}}\ \boxed{\mathrm{E}}$$

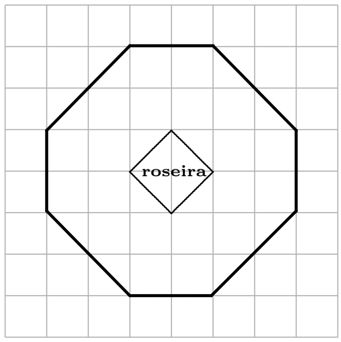
104. ***O lucro de uma companhia*** – Uma companhia tem um lucro de 6% nos primeiros R\$ 1 000,00 reais de venda diária e de 5% em todas as vendas que excedam R\$ 1 000,00 reais, nesse mesmo dia. Qual é o lucro dessa companhia, em reais, num dia em que as vendas alcançam R\$ 6 000,00 reais?

(a) 250 (b) 300 (c) 310 (d) 320 (e) 360

105. ***Sequência triangular*** – Encontre o 21º termo da sequência que começa assim:

$$1;\ 2+3;\ 4+5+6;\ 7+8+9+10;\ 11+12+13+14+15;\ldots$$

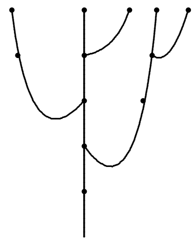
106. ***O jardim octogonal*** – A figura mostra a planta de um jardim de uma cidade, feita num papel quadriculado. O jardim tem a forma de um polígono de oito lados com uma roseira quadrada no centro, cercada de grama. A área total do jardim é de 700 m^2. Para colocar uma cerca em volta do jardim e da roseira, o prefeito dispõe de, no máximo, R$ 650,00.



Qual é o maior preço que o prefeito poderá pagar pelo metro dessa cerca?

107. ***Número de caracteres*** – Numa folha de papel cabem 100 caracteres na largura e 100 na altura. Nessa folha são escritos sucessivamente os números 1, 2, 3, e assim por diante, com um espaço entre cada um e o seguinte. Se no final de uma linha não houver espaço para escrever o número seguinte, ele é escrito no começo da linha seguinte. Qual é o último número escrito na folha?

108. ***A árvore de Emília*** – A árvore de Emília cresce de acordo com a seguinte regra: após duas semanas do aparecimento de um galho, esse galho produz um novo galho a cada semana e o galho original continua crescendo. Depois de cinco semanas, a árvore tem cinco galhos, como mostra a figura. Quantos galhos, incluindo o galho principal, a árvore terá no final de oito semanas?



109. ***Um teste vocacional*** – Foi aplicado um teste vocacional em 1 000 alunos de uma escola. A tabela a seguir apresenta os resultados, por área de estudo e sexo.

	Exatas	Humanas	Biológicas
Masculino	232	116	207
Feminino	112	153	180

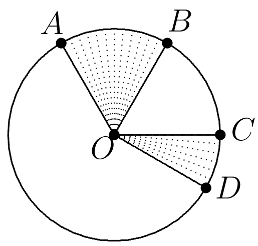
Se um aluno for escolhido ao acaso, determine a probabilidade desse aluno ser:

(a) da área de exatas;

(b) da área de humanas, sendo do sexo masculino;

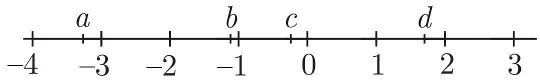
(c) do sexo feminino, sendo da área de biológicas.

110. ***Dois setores circulares*** – A área do círculo da figura mede 20 cm^2. Se $A\widehat{O}B = 60°$ e $C\widehat{O}D = 30°$, quanto mede a área da região do círculo que está destacada?



111. ***Compra de televisores*** – Maria encomendou um certo número de televisores para o estoque de uma grande loja, pagando R$ 1 994,00 por televisor. Ela reparou que, no total a pagar, não aparece o algarismo 0, nem o 7, nem o 8 e nem o 9. Qual foi o menor número de televisores que ela pode ter encomendado?

112. ***Distância entre números*** – Considere os números reais a, b, c e d representados em uma reta, conforme mostra a figura. Determine quais das afirmações são verdadeiras e quais são falsas.



(a) $\lvert a\rvert < 4$	(d) $\lvert a\rvert > \lvert b\rvert$	(g) $\lvert a-b\rvert < 4$	(j) $\lvert b-c\rvert < 2$
(b) $\lvert b\rvert < 2$	(e) $\lvert c\rvert < \lvert d\rvert$	(h) $\lvert a-b\rvert \geq 3$	(k) $\lvert b-c\rvert > 3$
(c) $\lvert c\rvert < 2$	(f) $\lvert a\rvert < \lvert d\rvert$	(i) $\lvert c-d\rvert < 1$	(l) $\lvert c-a\rvert > 1$

113. ***Cartões premiados*** – Uma loja distribui 9 999 cartões entre os seus clientes. Cada um dos cartões possui um número de quatro algarismos, entre 0001 e 9999. Um cartão é premiado se a soma dos primeiros dois algarismos for igual à soma dos dois últimos; por exemplo, o cartão 0743 é premiado. Prove que a soma dos números de todos os cartões premiados é divisível por 101.

114. ***O preço da gasolina*** – Encher o tanque de gasolina de um carro pequeno custava, em valores atualizados, R$ 29,90 em 1972 e R$ 149,70 em 1992. Qual dos valores abaixo melhor aproxima o percentual de aumento do preço da gasolina nesse período de 20 anos?

(a) 20% (b) 125% (c) 300% (d) 400% (e) 500%

115. ***O triângulo de moedas*** – Um menino tentou alinhar 480 moedas em forma de um triângulo, com uma moeda na primeira linha, duas moedas na segunda linha, e assim por diante. Ao final da tentativa, sobraram 15 moedas. Quantas linhas tem esse triângulo?

116. ***Circunferência e triângulo retângulo*** – Inscreve-se uma circunferência num triângulo retângulo. O ponto de tangência divide a hipotenusa em dois segmentos que medem 6 e 7 cm. Calcule a área desse triângulo.

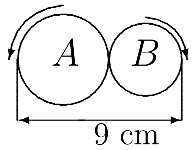
117. ***Soma de razão*** $\frac{1}{2}$ – Se $S_n = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}$, qual é o menor número inteiro positivo n tal que $S_n > 0{,}99$?

118. ***Soma de raízes quadradas***

(a) Se $r = \sqrt{2}+\sqrt{3}$, mostre que $\sqrt{6} = \dfrac{r^2-5}{2}$.

(b) Se $s = \sqrt{215}+\sqrt{300}$, mostre que $s^2 > 1\,015$.

119. ***Duas rodas*** – Na figura dada, a roda A gira a 1 200 voltas por minuto e a roda B a 1 500 voltas por minuto. Calcule os raios dessas duas rodas.

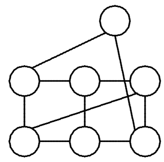


120. ***Dois divisores*** – O número $2^{48} - 1$ é divisível por dois números compreendidos entre 60 e 70. Quais são esses números?

(a) 61 e 63 (b) 61 e 65 (c) 63 e 65 (d) 63 e 67 (e) 67 e 69

121. ***Rede de estações*** – Um serviço de vigilância vai ser instalado num parque na forma de uma rede de estações. As estações devem ser conectadas por linhas de telefone, de modo que qualquer uma das estações possa se comunicar com todas as outras, seja por uma conexão direta, seja por meio de, no máximo, uma outra estação.

Cada estação pode ser conectada diretamente por um cabo a, no máximo, três outras estações. O diagrama mostra um exemplo de uma rede desse tipo, conectando sete estações. Qual é o maior número de estações que podem ser conectadas dessa maneira?



122. ***Bolas brancas e pretas*** – Uma caixa tem exatamente cem bolas pretas e cem bolas brancas. Repetidamente, três bolas são retiradas da caixa e substituídas por outras bolas, que estão em um saco, da maneira seguinte.

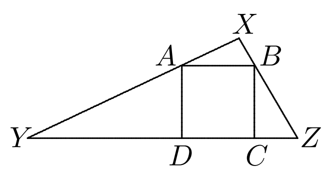
BOLINHAS REMOVIDAS		SUBSTITUÍDAS POR
3 pretas	$\Longrightarrow$	1 preta
2 pretas e 1 branca	$\Longrightarrow$	1 preta e 1 branca
1 preta e 2 brancas	$\Longrightarrow$	2 brancas
3 brancas	$\Longrightarrow$	1 preta e 1 branca

Qual pode ser o conteúdo da caixa depois de seguidas aplicações desse procedimento?

(a) 2 pretas (b) 2 brancas (c) 1 preta (d) 1 preta e 1 branca (e) 1 branca.

123. ***O cubo*** – Alice tem uma folha de cartolina de 60 por 25 cm. Ela quer cortar a folha para montar um cubo, com arestas medindo um número inteiro de centímetros. Permitindo cortes mas não permitindo superposição, qual é o cubo de maior volume que ela pode construir?

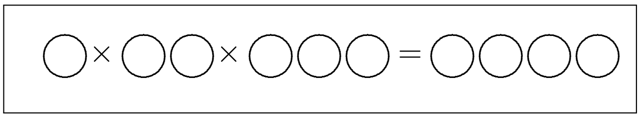
124. ***Um quadrado e um triângulo*** – Na figura, $ABCD$ é um quadrado, cuja área mede $7/32$ da área do triângulo XYZ. Qual é a razão entre XA e XY?



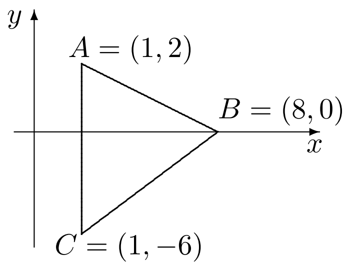
125. ***A urna*** – Uma urna tem seis bolas numeradas de 1 a 6. Se duas bolas são extraídas, qual é a probabilidade de a diferença entre os números dessas duas bolas ser igual a 1?

126. ***Soma das raízes de uma equação*** – Determine a soma das raízes distintas da equação $x^2 + 3x + 2 = |x + 1|$.

127. ***Produto de três números*** – No diagrama dado, cada um dos 10 círculos representa um algarismo. Preencha o diagrama com uma igualdade válida, colocando, em cada círculo, um dos algarismos de 0 a 9 e utilizando cada algarismo uma única vez.



128. ***Área do triângulo*** – Determine a área do triângulo ABC mostrado na figura.



129. ***Duas tabelas*** – As linhas da primeira tabela dada são todas progressões aritméticas de uma mesma razão e as colunas dessa tabela são todas progressões aritméticas de uma mesma razão. Na segunda tabela dada foi utilizada a mesma lei de formação, mas alguém apagou alguns números deixando apenas três. Qual é o número que estava na posição indicada com ★?

5	8	11	14	17
12	15	18	21	24
19	22	25	28	31
26	29	32	35	38
33	36	39	42	45

		39		
				87
56				
			★	

130. ***A sequência abc*** – A lei de formação da sequência $10, a, 30, b, c, \ldots$, a partir de seu terceiro termo, consiste em tomar o dobro da soma dos dois termos imediatamente anteriores. Qual é o valor de c?

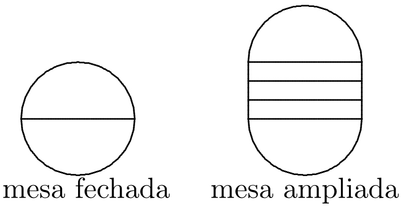
131. ***Perímetro e diagonal*** – O perímetro de um retângulo $ABCD$ mede 20 m. O menor comprimento que pode ter a diagonal AC, em metros, é:

(a) 0; (b) $\sqrt{50}$; (c) 10; (d) $\sqrt{200}$; (e) $20\sqrt{5}$.

132. ***As idades numa classe*** – Numa classe na escola, todos os alunos têm a mesma idade, exceto sete deles que têm 1 ano a menos e dois deles que têm 2 anos a mais. A soma das idades de todos os alunos dessa classe é 330. Quantos alunos tem nessa classe?

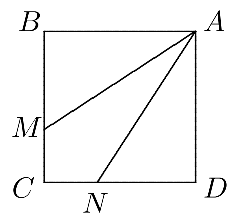
133. ***A mesa redonda*** – Uma mesa redonda tem 1,40 metros de diâmetro.

Para uma festa, a mesa é ampliada colocando-se três tábuas de 40 cm de largura cada uma, como mostra a figura. Se cada pessoa à mesa deve dispor de um espaço de 60 cm, quantos convidados poderão se sentar à mesa?



134. ***Brincadeira com sete números*** – Sete números inteiros positivos estão escritos consecutivamente em ordem crescente numa mesma linha. Determine se é possível colocar entre esses números cinco sinais de "+" e só um de "=" de tal modo que resulte uma igualdade.

135. ***Um terreno compartilhado*** – Três amigas compraram um terreno quadrado e querem reparti-lo em três terrenos de mesma área, conforme indicado na figura, pois no canto do terreno indicado por A se encontra uma boa fonte de água. A que distância do vértice C do terreno devem ficar os pontos de divisa M e N indicados na figura?



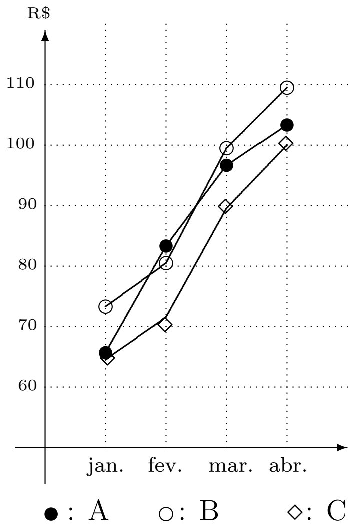
136. ***As duas partículas*** – Duas partículas percorrem um caminho circular de 120 m de comprimento. A velocidade de uma delas é 2 m/s maior do que a da outra e ela completa cada volta num tempo que é 3 segundos inferior ao da outra. Qual é a velocidade de cada partícula?

137. ***Queda livre*** – Um corpo em queda livre demora 11 segundos para tocar o solo. No primeiro segundo ele percorre 4,5 m e, em cada segundo seguinte, a distância percorrida aumenta em 9,8 m. Qual a altura da queda e quantos metros ele percorreu no último segundo?

138. ***Um caminho triangular*** – Janete passeia por um caminho de forma triangular $\triangle ABC$, com o lado AB medindo 1 992 m. Ela gasta 24 minutos para percorrer esse lado AB e, depois, com a mesma velocidade, ela percorre o outro lado BC seguido da hipotenusa CA em 2 horas e 46 minutos. Qual é o comprimento do lado BC?

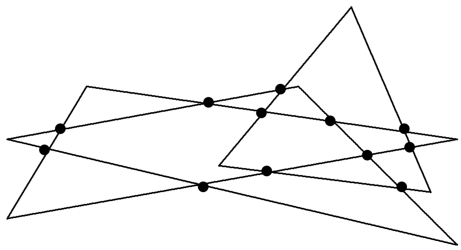
139. ***O preço do feijão*** – A tabela e o gráfico dados mostram a evolução do preço médio de três tipos A, B e C de feijão na bolsa de alimentos durante os primeiros quatro meses de um certo ano. Desses três tipos, os que apresentaram, respectivamente, o maior e o menor aumento percentual do preço nesse período são:

(a) A e B; (b) A e C; (c) B e C; (d) C e A; (e) C e B.

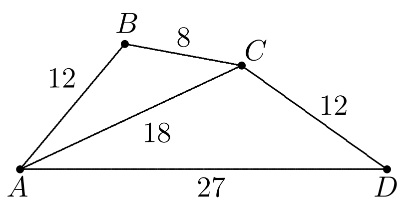


	jan.	fev.	mar.	abr.
A	65,67	83,33	96,67	103,33
B	73,30	80,50	99,55	109,50
C	64,50	71,57	89,55	100,00

140. ***Interseção de triângulos*** – Os três triângulos da figura se cortam em 12 pontos diferentes. Qual é o número máximo de pontos de interseção de três triângulos quaisquer?



141. ***Comparar triângulos*** – Na figura estão indicados os comprimentos de todos os segmentos. Demonstre que AC divide ao meio o ângulo $D\widehat{A}B$.



142. ***Queima de velas*** – Dois tipos de vela têm o mesmo comprimento mas são feitas de material diferente. Uma delas queima completamente em três horas e a outra em quatro horas, ambas queimando com velocidade uniforme. Quantos minutos depois das 13 horas devem ser acesas simultaneamente as duas velas para que, às 16 horas, o comprimento de uma seja o dobro do da outra?

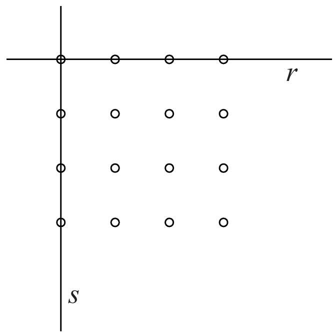
(a) 24 (b) 28 (c) 36 (d) 40 (e) 48

143. ***Uma distração*** – Em vez de multiplicar certo número por 6, Júlia se distraiu e dividiu o número por 6. O erro cometido por Júlia foi de aproximadamente:

(a) 100% ; (b) 97% ; (c) 83% ; (d) 17% ; (e) 3% .

144. ***Problema de nota*** – Um professor propõe 80 problemas a um aluno, informando que lhe atribuirá cinco pontos por problema resolvido corretamente e lhe descontará três pontos por problema não resolvido ou resolvido incorretamente. No final, o aluno fica com oito pontos. Quantos problemas ele resolveu corretamente?

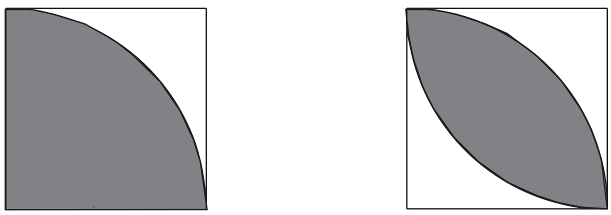
145. ***Quadrados e triângulos*** – Na figura dada, temos 16 pontos formando um reticulado quadrado e duas retas, r e s, perpendiculares entre si.



(a) Quantos quadrados podemos construir, de tal maneira que seus vértices pertençam ao reticulado, porém nenhum de seus lados seja paralelo, nem à reta r, nem à reta s?

(b) Quantos triângulos retângulos isósceles podemos construir de tal maneira que seus vértices pertençam ao reticulado, porém nenhum de seus lados seja paralelo, nem à reta r, nem à reta s?

146. ***Cálculo de áreas*** – Em cada uma das figuras a seguir tem-se um quadrado de lado r. As regiões hachuradas em cada uma destas figuras são limitadas por lados desse quadrado ou por arcos de círculos de raio r de centros nos vértices do quadrado. Calcule cada uma dessas áreas em função de r.



(a) (b)

147. ***Sequência de algarismos*** – Todos os números naturais de 1 em diante foram escritos consecutivamente, formando uma sequência de algarismos, como segue.

$$1234567891011121314151617181920212223\ldots.$$

Qual é o algarismo que aparece na posição de número 206 788?

148. ***Soma constante*** – Coloque os números 663, 664, 665, 666, 667, 668, 669, 670 e 671, sem repetir, numa tabela 3×3, de tal maneira que a soma em cada linha, em cada coluna e em cada diagonal seja 2 001. Caso isso não seja possível, justifique sua resposta.

149. ***Contando os zeros*** – Quantos zeros existem no final do número $9^{2007} + 1$?

150. ***Círculos dentro do quadrado*** – Dentro de um quadrado são colocados círculos, dois a dois disjuntos ou, então, tangentes externamente. Se o lado do quadrado mede 1 cm, será possível colocar tantos desses círculos de tal modo que a soma de seus raios, em centímetros, seja maior do que 2 008?

151. ***Construindo um número*** – Encontre todos os números de oito algarismos formados somente com os algarismos 1, 2, 3 e 4, cada um deles duas vezes, tais que:

(a) exista um único algarismo entre os dois algarismos 1;
(b) existam dois algarismos entre os dois algarismos 2;
(c) existam três algarismos entre os dois algarismos 3 e
(d) existam quatro algarismos entre os dois algarismos 4.

152. ***Número na circunferência*** – Os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 foram escritos (numa ordem desconhecida) ao redor de uma circunferência. Lendo esses algarismos de três em três no sentido horário, formam-se nove números de três algarismos. Determine a soma desses nove números.

153. ***Cada peça em seu lugar*** – Cinco peças de metal, confeccionadas, respectivamente, de ouro, prata, bronze, platina e níquel, foram colocadas em cinco cofres, numerados de 1 a 5. Cada cofre contém uma peça e o problema consiste em descobrir qual peça está em qual cofre. Na porta de cada cofre está escrita uma informação. Das cinco informações, quatro são falsas e a única que é verdadeira é a que aparece na porta do cofre que contém a peça de ouro. As informações nas portas dos cofres são as seguintes.

Cofre 1: O ouro está no cofre 2 ou 3.

Cofre 2: A prata está no cofre 1.

Cofre 3: O bronze não está aqui.

Cofre 4: O níquel está no cofre cujo número é inferior, em uma unidade, ao que contém o ouro.

Cofre 5: A platina está no cofre cujo número é superior, em uma unidade, ao que contém o bronze.

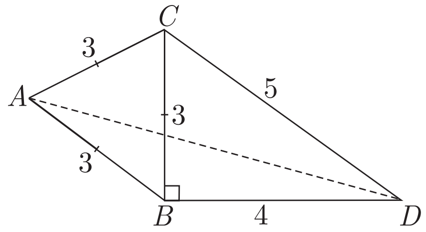
154. ***Soma de quadrados*** – Encontre três números, numa progressão aritmética de razão 2, tais que a soma de seus quadrados seja um número formado de quatro algarismos iguais.

155. ***Adivinhe o número*** – Certo número deixa resto 1 quando dividido por 3, deixa resto 2 quando dividido por 4, deixa resto 3 quando dividido por 5 e deixa resto 4 quando dividido por 6. Qual é o menor número inteiro positivo que satisfaz essas propriedades?

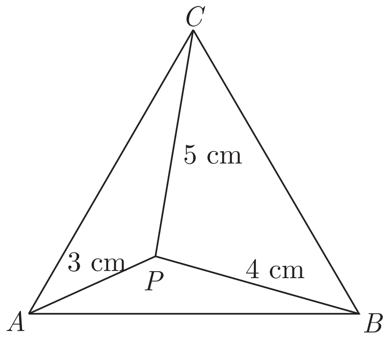
156. ***Um código*** – Na expressão abaixo, cada letra corresponde a um algarismo, sendo que letras diferentes correspondem a algarismos diferentes. Determine esses algarismos.

$$6 \times AOBMEP = 7 \times MEPAOB$$

157. ***Calculando distâncias*** – O triângulo $\triangle ABC$ é equilátero, com lados medindo 3 cm, e o triângulo $\triangle CBD$ é retângulo, com lados medindo 3, 4 e 5 cm, conforme a figura dada. Calcule a distância entre os pontos A e D.



158. ***Calculando lados de um triângulo*** – O triângulo $\triangle ABC$ é equilátero e o ponto P é tal que $PA = 3$ cm, $PB = 4$ cm e $PC = 5$ cm. Calcule o comprimento dos lados do triângulo $\triangle ABC$.



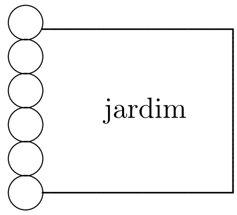
159. ***Amigo oculto*** – Um grupo de cinco amigos decide brincar de *amigo oculto*, cada um compra um presente para seu amigo oculto. Pelas regras do jogo, cada um dá exatamente um presente e recebe exatamente um presente. De quantas maneiras podem os presentes ser distribuídos, de modo que ninguém dê presente para si mesmo?

160. ***Contando soluções*** – Quantos são os pares de números inteiros positivos (x, y) tais que

$$\frac{xy}{x+y} = 144\,?$$

161. ***Determinando uma sequência*** – Numa certa sequência de 80 números, qualquer termo, salvo as duas extremidades, é igual ao produto de seus termos vizinhos. O produto dos 40 primeiros termos da sequência é 8 e o produto de todos os termos também é 8. Determine os termos da sequência.

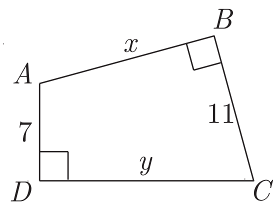
162. ***Construindo uma cerca*** – Carina está desenhando a planta de um jardim retangular que terá um de seus lados num muro reto de pedras. Ela comprou 140 m de cerca, em pedaços de 1 m cada um, para cercar os outros três lados. Ela não pode cortar esses pedaços e deve gastar todos eles.



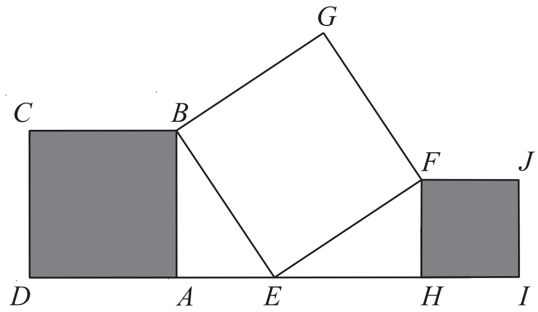
(a) Se os dois lados vizinhos ao muro de pedra têm 40 m cada um, qual será o comprimento do terceiro lado?

(b) É possível que o maior dos lados a ser cercado tenha 85 m? E 65 m? Justifique.

163. ***Um quadrilátero especial*** – Os ângulos $A\widehat{B}C$ e $C\widehat{D}A$ do quadrilátero $ABCD$ da figura são retos e os quatro lados do quadrilátero medem números inteiros que são todos distintos. Se $AD = 7$ e $BC = 11$, quanto medem os lados AB e CD?



164. ***Três quadrados*** – Dois quadrados, $ABCD$ com uma área de 30 cm^2 e $FHIJ$ com uma área de 20 cm^2, têm seus lados AD e HI sobre uma reta, conforme a figura. Se o ponto E do segmento AH for tal que $BEFG$ é um quadrado, calcule a área desse quadrado.

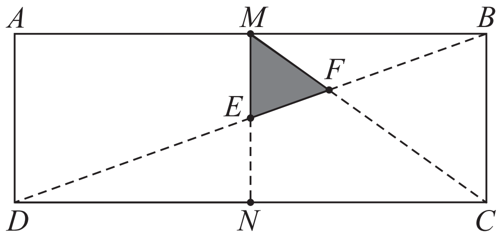


165. ***Bolinha de gude*** – Três amigos jogam uma partida de bolinha de gude, convencionando que o perdedor de cada rodada dobra as bolinhas dos outros jogadores, ou seja, ele dá aos outros dois um número tal de bolinhas que eles fiquem com o dobro do que tinham no início da rodada. O primeiro jogador perdeu a primeira rodada, o segundo jogador a segunda, o terceiro a terceira e todos terminaram com 64 bolinhas cada um. Com quantas bolinhas cada um dos três amigos começou essa partida?

166. ***Uma soma*** – Calcule o valor da soma

$$S = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2\,006\cdot 2\,007} + \frac{1}{2\,007\cdot 2\,008}\,.$$

167. ***Dobrando papel*** – Uma folha $ABCD$ retangular com $1\,000$ cm^2 de área foi dobrada ao meio e, em seguida, desdobrada segundo MN, conforme a figura. Em seguida, foi dobrada e desdobrada novamente, segundo MC e, finalmente, dobrada e desdobrada segundo a diagonal BD. Calcule a área do pedaço de papel indicado na figura, que é limitado pelos três vincos.



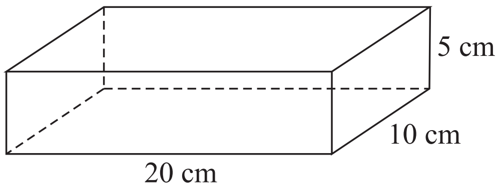
168. ***Uma área*** – No triângulo $\triangle ABC$, M é o ponto médio do lado AC, D é um ponto do lado BC, tal que AD é a bissetriz do ângulo $B\widehat{A}C$, e P é o ponto de interseção de AD e BM. Sabendo que $AB = 10$ cm, $AC = 30$ cm e a área do triângulo $\triangle ABC$ mede 100 cm^2, calcule a área do triângulo $\triangle ABP$.

169. ***Últimos algarismos*** – Quais são os dois últimos algarismos do número

$$8 + 88 + 888 + \cdots + \overbrace{88\cdots 88}^{2\,008}\,?$$

170. ***Idades múltiplas*** – Quando Isabel nasceu, sua mãe estava fazendo aniversário de 20 anos. Se Isabel e sua mãe viverem mais 100 anos, quantas vezes terão sido múltiplas as idades das duas?

171. ***Blocos diferentes*** – Ana tem um cubo de 10 cm de lado. Ela cortou o cubo em cubinhos de 1 cm de lado e, com esses cubinhos, ela brinca de formar outros blocos retangulares, mas sem que sobrem cubinhos. Por exemplo, ela formou um bloco de $10 \times 20 \times 5$. No total, quantos blocos diferentes ela pode construir com esses cubinhos, sem que sobre nenhum?



172. ***Quadro negro*** – Joana escreveu os números de 1 a 10 000 no quadro negro e, depois, apagou todos os múltiplos de 7 e 11. Qual foi o número que ficou na posição 2 008?

173. ***Conjunto sem múltiplos*** – Qual é o maior número possível de elementos de um subconjunto de $\{1, 2, \ldots, 100\}$ tal que nenhum de seus elementos seja um múltiplo de algum outro?

174. ***Brincando com a calculadora*** – Digite numa calculadora um número qualquer de três algarismos. Em seguida, digite o mesmo número obtendo, assim, um número de seis algarismos, da forma $a\,b\,c\,a\,b\,c$. Divida esse número por 7, divida o resultado por 11 e, finalmente, divida o número obtido por 13. O que aconteceu? Por que você obteve esse resultado?

175. ***No galinheiro*** – Um galinheiro com 240 m^2 de área deve abrigar galinhas e pintinhos, sendo desejável que haja um espaço livre de 4 m^2 para cada galinha e 2 m^2 para cada pintinho. Além disso, cada pintinho come 40 g de ração por dia e cada galinha come 160 g por dia, sendo permitido um gasto diário máximo de 8 kg de ração.

    (a) Represente algebricamente as condições do problema.

    (b) Represente graficamente, no plano cartesiano xOy, as condições do problema.

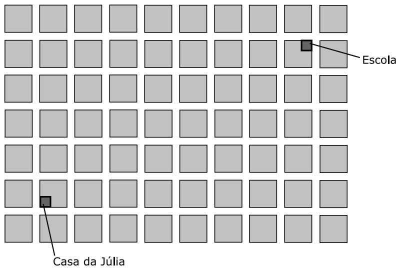
    (c) Esse galinheiro comporta 20 galinhas e 80 pintinhos? E 30 galinhas e 100 pintinhos?

    (d) Qual é o número máximo de galinhas que podem ser colocadas no galinheiro, respeitando os espaços desejáveis e o gasto máximo de ração? E de pintinhos?

176. ***Um número perfeito*** – Um número natural n é dito *perfeito* se a soma de todos os seus divisores próprios, isto é, divisores diferentes de n, é igual a n. Por exemplo, 6 e 28 são perfeitos, pois $6 = 1 + 2 + 3$ e $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Sabendo que $2^{31} - 1$ é um número primo, mostre que $2^{30}(2^{31} - 1)$ é um número perfeito.

177. ***Quinze minutos a mais*** – Dois carros partem, ao mesmo tempo, de uma cidade A em direção a uma cidade B. Um deles viaja à velocidade constante de 60 km/h e o outro à velocidade constante de 70 km/h. Se o carro mais rápido faz a viagem de A a B em 15 minutos a menos do que o outro carro, qual é a distância entre essas duas cidades?

178. ***Outros caminhos*** – Partindo de sua casa para chegar na escola, Júlia deve caminhar oito quarteirões para a direita e cinco quarteirões para cima, conforme indicado na figura dada.



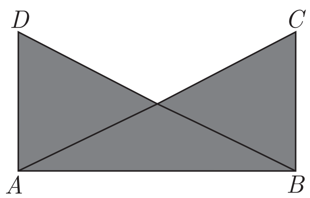
Ela sabe que existem muitas maneiras diferentes de fazer o percurso casa-escola, sempre seguindo o caminho mais curto. Como ela é uma menina muito curiosa, ela gostaria de sempre fazer caminhos diferentes. Quantos desses caminhos existem da casa de Júlia até a escola?

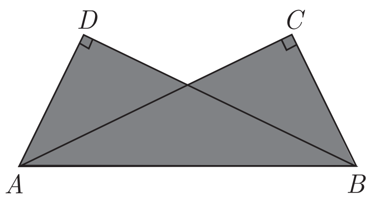
179. ***Escrevendo no tabuleiro*** – Um tabuleiro quadrado de três linhas por três colunas contém nove casas. De quantos modos diferentes podemos escrever as três letras **A**, **B** e **C** em três casas diferentes, de tal modo que, em cada linha, esteja escrita exatamente uma dessas três letras?

180. ***Fração e percentagem*** – Se na fração x/y diminuirmos o numerador x de 40% e o denominador y de 60%, então a fração x/y

(a)diminui 20%; (b)aumenta 20%; (c)diminui 50%; (d)aumenta 50%.

181. ***Triângulos sobrepostos*** – Dois triângulos retângulos congruentes possuem catetos que medem 4 cm e 7 cm. Na figura dada, à esquerda, os triângulos foram desenhados de modo a coincidirem os catetos de 7 cm. Assim, $AB = 7$ cm e $AD = BC = 4$ cm. Já na figura à direita, eles foram desenhados de modo a coincidirem as hipotenusas, donde $AD = BC = 4$ cm e $AC = BD = 7$ cm.





Calcule as áreas sombreadas nas duas figuras.

182. ***Dois motoristas*** – Dois motoristas viajam da cidade A até a cidade B e, imediatamente, regressam à cidade A. O primeiro motorista viaja a uma velocidade constante de 80 km/h, tanto na ida quanto na volta. O segundo motorista viaja até a cidade B a uma velocidade constante de 90 km/h e retorna à velocidade constante de 70 km/h. Qual desses motoristas gasta menos tempo no percurso total de ida e volta?

183. ***Soma e inverte*** – Usando somente as duas operações "$+1$ = somar 1" e "$-i$ = menos o inverso", podemos formar várias sequências a partir de um número inicial. Por exemplo, iniciando com o número 3, podemos formar a sequência

$$3 \xrightarrow{+1} 4 \xrightarrow{+1} 5 \xrightarrow{-i} -\frac{1}{5} \xrightarrow{+1} \frac{4}{5} \xrightarrow{-i} -\frac{5}{4} \xrightarrow{+1} -\frac{1}{4} \xrightarrow{+1} \frac{3}{4} \xrightarrow{-i} -\frac{4}{3}.$$

Iniciando com 0, com qual sequência obteremos novamente o 0, usando apenas essas duas operações "$+1$" e "$-i$"?

184. ***Carro flex*** – Um carro é denominado flex se ele pode ser abastecido com gasolina ou com álcool. O consumo de um carro costuma ser dado (no Brasil) em quilômetros por litro, que indicamos por km/l. Já o custo desse consumo é dado pelo preço do quilômetro rodado, em reais por km. Suponha que os preços do litro de álcool e de gasolina sejam, respectivamente, R$ 1,59 e R$ 2,49.

(a) Digamos que um certo carro flex rode 12,3 km por litro de gasolina. Qual deve ser o consumo de álcool desse carro para que a utilização do álcool seja financeiramente mais vantajosa que a de gasolina?

(b) Com os preços dados, em que condições é mais vantajoso, financeiramente, o uso do álcool em vez do de gasolina? Dê um exemplo numérico que satisfaça as condições.

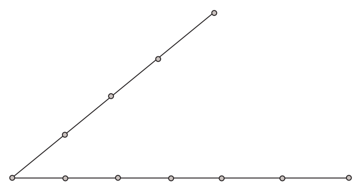
Daqui em diante, suponha que o consumo de um certo carro flex seja de x km/l com gasolina e de $\left(\frac{x}{2}+1\right)$ km/l com álcool.

(c) Escreva a expressão da função $g(x)$ que fornece o custo de rodar 100 quilômetros com esse carro utilizando gasolina e a expressão da função $a(x)$ que fornece o custo de rodar 100 quilômetros utilizando álcool.

(c) Para que o custo seja o mesmo, tanto com álcool como com gasolina, qual deve ser o consumo em km/l para a gasolina e para o álcool?

(d) Com o consumo dado, em que condições é mais vantajoso, financeiramente, o uso do álcool em vez do de gasolina? Dê um exemplo numérico que satisfaça as condições.

185. ***Contando triângulos*** – Na figura dada estão marcados onze pontos sobre dois segmentos. Quantos triângulos podem ser formados com esses onze pontos?



186. ***Quadrado perfeito*** – Existe um número de oito algarismos da forma

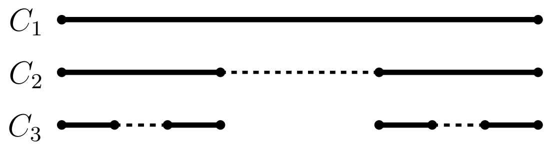
$$9999 * * * *$$

que seja um quadrado perfeito?

187. ***Diferença quase nula*** – Qual é o menor número inteiro positivo n tal que

$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} < 0{,}01?$$

188. ***Conjunto de Cantor*** – Desenhe um segmento de reta com uma unidade de comprimento, denotando-o por C_1. Remova a terça parte central (sem remover as extremidades) e denote por C_2 o que sobrou. Agora, remova a terça parte central (sem as extremidades) de cada um dos dois segmento de reta que constituem C_2, denotando por C_3 o que sobrou. Esse processo pode ser continuado, sempre removendo, em cada estágio, a terça parte central de cada segmento em C_n para formar C_{n+1}. O conjunto de Cantor é formado pelos elementos de C_1 que nunca são removidos, em etapa alguma.



(a) Na figura dada, indique os números nas extremidades dos segmentos C_1, C_2 e C_3.

(b) Quais dentre os pontos $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{3}{81}$ e $\frac{4}{81}$ pertencem ao conjunto de Cantor?

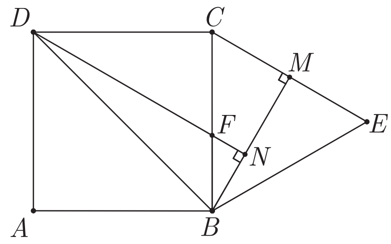
(c) Quais são os comprimentos de C_3, C_4 e C_5? Você consegue encontrar alguma expressão para o comprimento de C_n?

189. ***Enchendo uma piscina*** – Uma piscina vazia foi abastecida de água por duas torneiras A e B, ambas de vazão constante. Durante quatro horas, as duas torneiras ficaram abertas e encheram 50% da piscina. Em seguida, a torneira B foi fechada e, durante duas horas, a torneira A encheu 15% do volume da piscina. Após este período, a torneira A foi fechada e a torneira B aberta. Durante quanto tempo essa torneira teve de ficar aberta para que ela, sozinha, terminasse de encher a piscina?

190. ***Probabilidade de ser um número par*** – Uma urna tem nove bolas, numeradas de 1 a 9. José e Maria retiram, cada um, simultaneamente, uma bola da urna. Com as bolas retiradas eles formam um número de dois algarismos, sendo que o número que está escrito na bola de José é o algarismo das dezenas e o número que está escrito na bola de Maria é o algarismo das unidades. Qual é a probabilidade desse número ser par?

191. ***Múltiplo de 7*** – Mostre que se o produto $N = (n+6m)(2n+5m)(3n+4m)$, com m e n números inteiros positivos, for um múltiplo de 7 então esse produto N também é múltiplo de $7^3 = 343$.

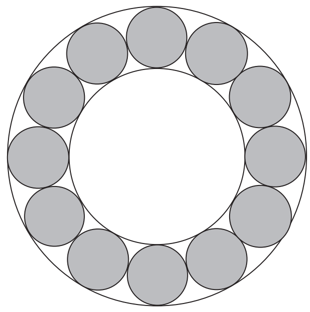
192. ***Os ângulos* $15°$ *e* $75°$** – Na figura dada, $ABCD$ é um quadrado com uma unidade de lado e o triângulo $\triangle BCE$ é equilátero. O ponto M é o ponto médio do segmento CE, o segmento DN é perpendicular a BM e o segmento BM é perpendicular a CE.



(a) Calcule os comprimentos dos lados do triângulo $\triangle DBN$.

(b) Use o item (a) para calcular o cosseno, o seno e a tangente dos ângulos de $15°$ e $75°$.

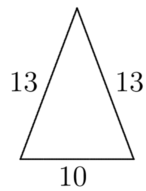
193. ***Círculos tangentes*** – Na figura dada estão desenhados dois círculos concêntricos de raios r e R, sendo $r < R$, e doze círculos compreendidos entre os dois primeiras, todos de raio x. Além disso, os quatorze círculos são disjuntos ou tangentes.



(a) Mostre que $x = \dfrac{R-r}{2}$.

(b) Mostre que $\dfrac{R}{r} = \dfrac{4+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4-\sqrt{6}+\sqrt{2}}$.

194. ***Mudando a base*** – Um triângulo isósceles tem uma base de 10 cm e dois lados iguais medindo 13 cm. É possível cortar esse triângulo em dois outros triângulos de tal modo que, juntando esses triângulos de outra maneira obtenhamos um outro triângulo isósceles (evidentemente com a mesma área)?



195. ***Clube de Matemática*** – Eu faço parte de um Clube de Matemática, onde tenho o mesmo número de colegas homens do que de colegas mulheres. Quando um garoto falta, três quartos da equipe são de meninas. Eu sou homem ou mulher? Quantas mulheres e quantos homens tem o clube?

196. ***Uma calculadora diferente*** – Davi tem uma calculadora muito original, que efetua apenas duas operações, a adição usual $(+)$ e uma outra operação, denotada por $*$, que satisfaz

(i) $a * a = a$,

(ii) $a * 0 = 2a$ e

(iii) $(a * b) + (c * d) = (a + c) * (b + d)$,

para quaisquer números inteiros a e b. Quais são os resultados das operações $(2 * 3) + (0 * 3)$ e $1\,024 * 48$?

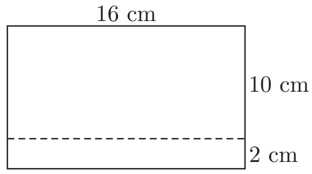
197. ***Cercando o globo terrestre*** – O raio do globo terrestre mede, aproximadamente, 6 378 km no Equador. Suponhamos que um fio esteja ajustado exatamente sobre o Equador.

Em seguida, suponhamos que o comprimento do fio seja aumentado em 1 m, de modo que o fio e o Equador fiquem como círculos concêntricos ao redor da Terra. Um homem em pé, uma formiga, ou um elefante são capazes de passar por baixo desse fio?

198. ***Comprimento de uma corda*** – Numa circunferência de 10 cm de raio, o segmento AB é um diâmetro e o segmento AC é uma corda de 12 cm. Determine a distância entre os pontos B e C.

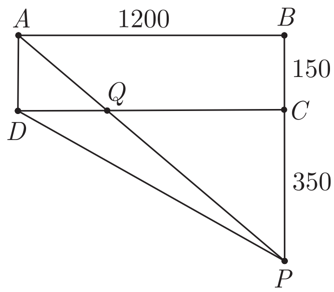
199. ***Dois irmãos*** – A diferença de idade entre dois irmãos é de três anos. Um ano atrás, a idade do pai desses irmãos era o dôbro da soma das idades dos irmãos e, dentro de vinte anos, a idade do pai será a soma das idades desses dois filhos. Qual é a idade de cada um dos irmãos?

200. ***Canelonis de ricota*** – Todo domingo, Pedro prepara canelonis para o almoço. Primeiro, ele corta retângulos de massa de 16 por 12 cm e, depois, cola os dois lados mais longos, superpondo uma faixa de 2 cm.



Dessa forma, ele obtém cilindros que recheia com ricota, gastando 500 g de ricota por cilindro. Num belo domingo, com o mesmo número de retângulos de massa de 16 por 12 cm, ele decide produzir os cilindros colando os lados menores, sempre superpondo uma faixa de 2 cm. Nessa situação, ele vai gastar mais ou menos ricota que antes? Quanto?

201. ***Cálculo de segmentos*** – As medidas do retângulo $ABCD$ são de 1 200 por 150 m. Além disso, P está no prolongamento do lado BC e dista 350 m de C. Determine as medidas de AP, PQ, PD, CQ e DP.



202. ***Prá chegar junto!*** – Ada e Luisa treinam todos os dias, cada uma delas sempre com a mesma velocidade, para a grande corrida que vai acontecer no final do ano na escola. O treino começa num ponto A e termina no ponto B, distantes 3 000 m. Elas partem no mesmo instante, mas quando Luisa termina a corrida, ainda faltam 120 m para Ada chegar ao ponto B. Ontem, Luisa deu uma chance para Ada: *"Partimos ao mesmo tempo, mas eu parto alguns metros antes do ponto A para chegarmos juntas."* Quantos metros antes do ponto A deve partir Luisa para chegar junto com Ada?

203. ***Um professor enfurecido*** – Para castigar os alunos de sua turma por indisciplina, o professor Zerus decidiu descontar da nota mensal de cada aluno uma percentagem igual à nota da prova, isto é, quem tirou 60, terá um desconto de 60% na nota, quem tirou 20, um desconto de 20% na nota e assim por diante. A nota mensal máxima é 100.

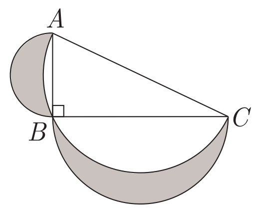
(a) Quem vai ficar com a maior nota?

(b) E a menor?

(c) Alunos que tiraram notas boas reclamaram que vão ficar com a mesma nota de alunos que tiraram notas más. Eles tem razão?

204. ***O percurso de um atleta*** – Um atleta resolveu fazer uma corrida de 15 km. Começou correndo 5 km na direção Sul, depois virou para o Leste, correndo mais 5 km e, novamente, virou para a direção Norte, correndo os 5 km restantes. Após esse percurso, constatou, para seu espanto, que estava no ponto de onde havia partido. Descubra dois possíveis pontos sobre o globo terrestre de onde esse atleta possa ter iniciado sua corrida.

205. ***Áreas iguais*** – Na figura dada, o triângulo $\triangle ABC$ é retângulo e os semicírculos dados têm diâmetros AB, BC ou AC. Mostre que a área sombreada é igual à área do triângulo $\triangle ABC$.



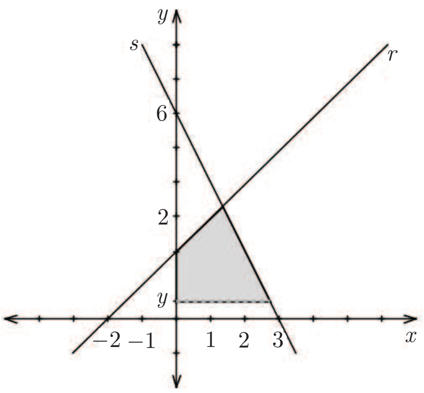
206. ***Função definida por área*** – A função f, definida para cada y satisfazendo $0 \leq y < 2$, é dada por $f(y) =$ área do quadrilátero sombreado, conforme indicado na figura dada.

(a) Escreva as equações das retas r e s.

(b) Determine $f(0)$.

(c) Escreva a expressão de $f(y)$, para $0 \leq y < 2$.

(d) Esboce o gráfico de $f(y)$.

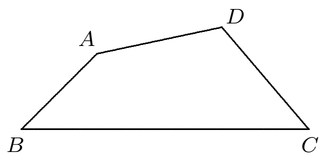


207. ***PA e PG*** – Determine quatro números distintos a_1, a_2, a_3 e a_4 que sejam termos consecutivos de uma progressão aritmética e tais que os números a_1, a_3 e a_4 formem uma progressão geométrica.

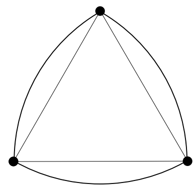
208. ***Plano cartesiano*** – Dizemos que um ponto do plano cartesiano é um *ponto inteiro* se suas coordenadas são inteiras. Dado um inteiro positivo n, denote por $f(n)$ o número de pontos inteiros que estão sobre o segmento que liga a origem ao ponto inteiro $(n, n+3)$, sem contar as extremidades. Mostre que

$$f(n) = \begin{cases} 2, & \text{se } \; n \text{ é múltiplo de 3,} \\ 0, & \text{se } \; n \text{ não é múltiplo de 3}. \end{cases}$$

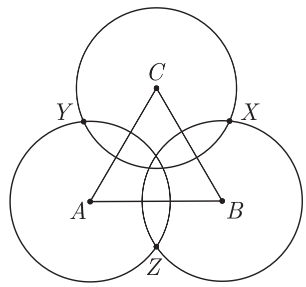
209. ***Trabalhando com um quadrilátero*** – No quadrilátero $ABCD$ da figura dada, tem-se $AB = 5$, $BC = 17$, $CD = 5$ e $DA = 9$. Determine DB, sabendo que sua medida é um número inteiro.



210. ***O triângulo de Reuleaux*** – O triângulo de Reuleaux é a figura formada a partir de um triângulo equilátero, substituindo os lados por arcos de circunferência centrados nos vértices do triângulo e de raios iguais ao lado do triângulo. Qual é a área de um triângulo de Reuleaux, se os lados do triângulo equilátero inicial medem 1 cm?



211. ***Interseção de círculos*** – Na figura dada foram desenhados três círculos de raio r centrados nos vértices do triângulo equilátero $\triangle ABC$ de lado a. Se $\frac{1}{2}a < r < a$, esses três círculos são, dois a dois, concorrentes em três pontos X, Y e Z exteriores ao triângulo $\triangle ABC$. Mostre que o triângulo $\triangle XYZ$ é equilátero e calcule o comprimento do seu lado, em termos de a e r.



212. ***Valor máximo*** – A expressão $\dfrac{k^2}{1{,}001^k}$ atinge seu maior valor com qual número natural k?

213. ***Moedas falsas*** – Aladim tem dez sacos de moedas, sendo que cada saco tem somente moedas verdadeiras ou somente moedas falsas. Cada moeda verdadeira pesa 10 g e cada moeda falsa pesa 1 g.

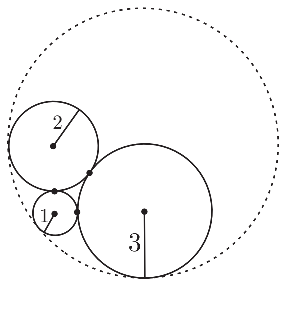
(a) Suponhamos que em cada saco existam exatamente dez moedas e que somente um dos sacos seja de moedas falsas. Utilizando uma balança e efetuando apenas uma pesagem, como deve Aladim proceder para descobrir qual é o saco das moedas falsas?

(b) Suponhamos que os sacos estejam cheios de moedas e que Aladim não saiba quantos desses sacos sejam de moedas falsas. Como pode ele identificar, com apenas uma pesagem, os sacos que têm moedas falsas?

214. ***Menor inteiro*** – Sejam p e q inteiros positivos tais que $\dfrac{5}{8} < \dfrac{p}{q} < \dfrac{7}{8}$. Qual é o menor valor de p para que $p + q = 2\,005$?

215. ***Mais áreas...*** – Um triângulo tem vértices $A = (3,0), B = (0,3)$ e C, onde C está na reta de equação $x + y = 7$. Qual é a área desse triângulo?

216. ***Círculos tangentes*** – Três círculos, com raios medindo 1, 2 e 3 cm, são dois a dois tangentes exteriormente, como na figura dada. Determine o raio do círculo tangente exteriormente aos três círculos.



217. ***Soma finita*** – Cada um dos números $x_1, x_2, \ldots, x_{2\,004}$ pode ser igual a $\sqrt{2}-1$ ou a $\sqrt{2}+1$. Quantos valores inteiros distintos pode valer a soma

$$\sum_{k=1}^{1\,002} x_{2k-1}x_{2k} = x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 + \cdots + x_{2\,003}x_{2\,004}\,?$$

218. ***Múltiplos*** – Seja a um número inteiro positivo que é múltiplo de 5 e tal que $a+1$ é múltiplo de 7, $a+2$ é múltiplo de 9 e $a+3$ é múltiplo de 11. Determine o menor valor possível de a.

219. ***Equação de duas variáveis*** – Determine todos os pares de inteiros (x, y) tais que $9xy - x^2 - 8y^2 = 2\,005$.

220. ***Trapézio retângulo*** – Seja $ABCD$ um trapézio retângulo de bases AB e CD, com ângulos retos em A e D. Dado que a diagonal menor BD é perpendicular ao lado BC, determine o menor valor possível para a razão CD/AD.

221. ***Jogos de futebol*** – Os doze alunos de uma turma de olimpíada saíam para jogar futebol todos os dias após a aula de matemática, formando dois times de seis jogadores cada e jogando entre si. A cada dia eles formavam dois times diferentes dos times formados em dias anteriores. Ao final do ano, eles verificaram que cada cinco alunos haviam jogado juntos num mesmo time exatamente uma vez. Quantos times diferentes foram formados ao longo do ano?

222. ***A soma dos algarismos de um número*** – Denotemos por $s(n)$ a soma dos algarismos do número n. Por exemplo $s(2\,345) = 2+3+4+5 = 14$. Observemos que:

$$40 - s(40) = 36 = 9 \times 4; \quad 500 - s(500) = 495 = 9 \times 55;$$

$$2345 - s(2345) = 2331 = 9 \times 259\,.$$

(a) O que podemos afirmar sobre o número $n - s(n)$?

(b) Usando o item anterior, calcule $s(s(s(2^{2\,009})))$.

SUGESTÃO: Mostre que o número procurado é menor do que 9.

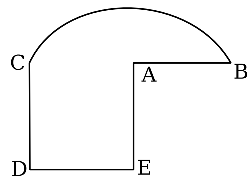
Desafios

1. ***Cadeia do menor número* (N2/N3)** – Partindo do número 265 863 e utilizando uma única vez cada uma das operações $+, -, \times$ e $\div$ e também uma única vez os números 51, 221, 6 817, 13 259, podemos obter vários números. Por exemplo, 54 911, como segue.

$$265\,863 \xrightarrow{\div 221} 1\,203 \xrightarrow{\times 51} 61\,353 \xrightarrow{-13\,259} 48\,094 \xrightarrow{+6\,817} 54\,911$$

Encontre a cadeia que permite obter o menor número inteiro positivo.

2. ***Qual é a metade?* (N2/N3)** – Considere a figura ao lado, em que AB = AE = ED = CD = CA e o arco CB é um arco de círculo centrado no ponto E. Você sabe repartir essa figura em duas partes idênticas, que possam ser superpostas?



3. ***Cada um em seu estado* (N1/N2/N3)** – Amélia, Bruno, Constância e Denise são quatro amigos que se encontram sentados numa mesa quadrada, cada um ocupando um lado da mesa. Um dos quatro mora no Amazonas, outro em São Paulo, outro no Ceará e o quarto na Bahia. Sabendo que valem as condições a seguir, quem mora na Bahia?

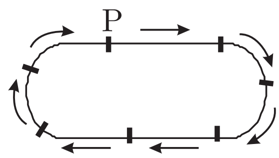
   - À direita de Amélia está quem mora no Amazonas.
   - Em frente à Constância está a pessoa que mora em São Paulo.
   - Bruno e Denise estão um ao lado do outro.
   - Uma mulher está à esquerda da pessoa que mora no Ceará.

4. ***Divisão* (N1/N2)** – Numa divisão, aumentando o dividendo de 1 989 e o divisor de 13, o quociente e o resto não se alteram. Qual é o quociente?

5. ***Extraterrestre* (N1/N2)** – No planeta Staurus, os anos têm 228 dias, divididos em 12 meses de 19 dias. Cada semana tem 8 dias: Zerum, Uni, Duodi, Trio, Quati, Quio, Seise e Sadi. Sybock nasceu num duodi, que foi o primeiro dia do quarto mês. Que dia da semana ele festejará seu primeiro aniversário?

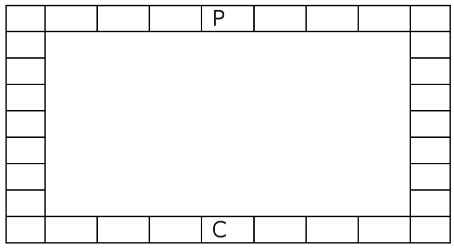
6. ***Que família!* (N1/N2)** – Numa família, cada menino tem o mesmo número de irmãos que de irmãs, e cada menina tem o dobro de irmãos que de irmãs. Qual é a composição dessa família?

7. ***Siga a pista* (N1)** – Na pista de corrida dada, os sete pontos de referência são marcados a cada 50 m. Os atletas devem fazer 2 km no sentido indicado pela flecha, partindo do ponto P. Marque o ponto C de chegada.



8. ***Cara ou Coroa* (N2)** – Jerônimo joga no tabuleiro dado com uma peça e um dado da maneira descrita a seguir.

Colocando a peça na casa P (de partida), ele lança uma moeda. Se der cara, avança duas casas e se der coroa recua uma casa. Jerônimo lançou a moeda 20 vezes e conseguiu chegar na casa C (de chegada). Quantas vezes a moeda deu cara?



9. ***Contas do papagaio* (N1)** – Rosa tem um papagaio que faz contas de um modo estranho. Cada vez que Rosa diz dois números ele faz a mesma conta. Por exemplo:

- se Rosa diz "4 e 2" o papagaio responde "12";
- se Rosa diz "5 e 3" o papagaio responde "12";
- se Rosa diz "3 e 5" o papagaio responde "14";
- se Rosa diz "9 e 7" o papagaio responde "24";
- se Rosa diz "0 e 0" o papagaio responde "1".

Se Rosa diz "1 e 8" o que responde o papagaio?

10. ***As férias de Tomás* (N1/N2)** – Durante as férias de Tomás, houve 11 dias chuvosos. Durante esses 11 dias, se chovia pela manhã havia sol sem chuva à tarde, e se chovia à tarde, havia sol sem chuva pela manhã. No total, Tomás teve 9 manhãs e 12 tardes sem chuva. Quantos dias duraram as férias de Tomás?

11. ***Maratona de Matemática* (N3)** – Numa maratona de Matemática, o número de questões é muito grande. O valor de cada questão é igual à sua posição na prova: um ponto para a questão 1, dois pontos para a questão 2, três pontos para a questão 3, quatro pontos para a questão 4, e assim por diante. Joana totalizou 1 991 pontos na prova, errando apenas uma questão e acertando todas as outras. Qual questão ela errou? Quantas questões tinha a prova?

12. ***Frações ignoradas* (N1)** – Escolhi quatro frações dentre $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}$ e $\frac{1}{12}$, cuja soma é 1. Quais foram as frações que eu não escolhi?

13. ***Caminho de maior total* (N2)** – As regras do jogo são as seguintes.

(a) Partindo da casa com o número 3 destacado, deve-se chegar à casa TOTAL deslocando-se somente por linhas ou colunas e calculando-se os pontos.

(b) Quando nos deslocamos por uma linha, só podemos adicionar, por exemplo passando da 3 para a -6 ao lado, obtemos $3 + (-6) = -3$ pontos.

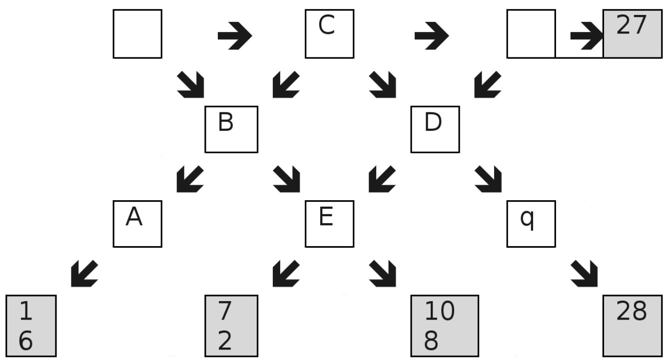
(c) Quando nos deslocamos por uma coluna, só podemos subtrair, por exemplo passando da 3 para a 5 abaixo, obtemos $3 - 5 = -2$ pontos.

(d) Só é permitido passar uma vez por cada casa.

Qual é o caminho que dá o maior total?

3	−6	9	−9
5	7	2	−1
−8	−3	−5	4
−4	1	6	8
0	−2	−7	TOTAL

14. ***Produtos em linha* (N1/N2/N3)** – Em cada uma das oito casas brancas do quadro dado, escrevemos um algarismo dentre os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 de modo que os produtos efetuados em linha reta, seguindo as flechas, forneçam os valores indicados dentro dos casas em cinza. Em qual casa se encontra o número 2?



15. ***Código Postal* (N2/N3)** – Para fazer a separação em regiões da correspondência que deve ser entregue, um serviço postal indica sobre os envelopes um código postal com uma série de cinco blocos de pontos e bastões, que podem ser lidos por um leitor ótico. Os algarismos são codificados como segue.

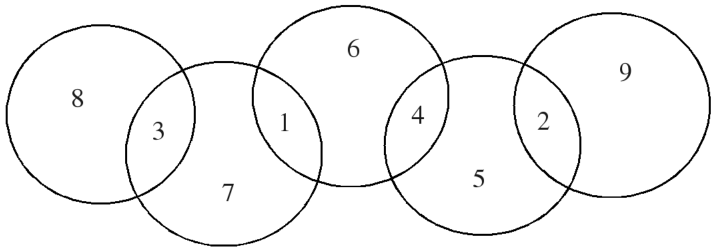
0 ••|||	5 |•|•|
1 •|•||	6 |•||•
2 •||•|	7 ||••|
3 •|||•	8 ||•|•
4 |••||	9 |||••

A leitura se faz da direita para a esquerda. Por exemplo: o código postal 91720 se escreve como ••|||•||•|||••|•|•|||||••, ou seja,

$$\underbrace{\bullet\bullet|||}_{0}\ \underbrace{\bullet||\bullet|}_{2}\ \underbrace{||\bullet\bullet|}_{7}\ \underbrace{\bullet|\bullet||}_{1}\ \underbrace{|||\bullet\bullet}_{9}\ .$$

Note que a codificação de 94, que é $\underbrace{|\bullet\bullet||}_{4}\ \underbrace{|||\bullet\bullet}_{9}$, tem um eixo vertical de simetria. Encontre os códigos entre 47000 e 47999 que apresentam um eixo vertical de simetria.

16. ***Anéis olímpicos*** **(N1/N2/N3)** – Os números de 1 a 9 foram colocados dentro de cinco anéis olímpicos, de tal modo que dentro de cada anel a soma é 11.



Disponha os nove números de outra maneira, para que a soma dentro de cada anel seja sempre a mesma e a maior possível.

17. ***Partidas de Denise*** **(N2/N3)** – Denise e Antônio jogam uma série de oito jogos, em que o vencedor da primeira partida ganha um ponto, o da segunda dois pontos, o da terceira quatro pontos, o da quarta oito pontos, e assim por diante, multiplicando por dois o número de pontos de uma partida para a outra. No final, Denise ganhou 31 pontos a mais que Antônio e não houve empate em nenhuma das partidas. Quais partidas Denise ganhou?

18. ***Sete quadrados*** **(N1/N2)** – Você sabe repartir um quadrado em sete quadrados menores?

19. ***Ilha misteriosa*** **(N1/N2/N3)** – Numa misteriosa ilha havia 13 camaleões cinza, 15 camaleões marrons e 17 camaleões vermelhos. Quando dois camaleões de cores diferentes se encontram, os dois tomam a terceira cor. Por exemplo, se um cinza se encontra com um vermelho, então os dois ficam marrons. Por causa de uma tempestade, ocorreram dois encontros cinza-vermelho, três encontros marrom-vermelho e um encontro cinza-vermelho. Quantos camaleões de cada cor ficaram na ilha?

20. ***Universo hostil*** **(N3)** – Num deserto há cobras, ratos e escorpiões. Cada manhã, cada cobra mata um rato. Cada meio-dia, cada escorpião mata uma cobra. Cada noite, cada rato mata um escorpião. Ao final de uma semana, à noite, só restava um rato. Quantos ratos havia na manhã do início da semana?

21. ***O jogo das fichas*** – Para iniciar um jogo com seus amigos, Manoel coloca oito fichas em cada uma das nove casas do tabuleiro mostrado na figura. Para ganhar o jogo, ele precisa mover as fichas pelo tabuleiro de tal modo que, ao final, todas as fichas estejam colocadas e tenha sido alcançada uma outra configuração de fichas na qual, em cada linha, cada coluna e cada diagonal, reste o mesmo número de fichas (mas não a inicial, com oito fichas em cada casa). Na primeira jogada, ele coloca mais três fichas na casa 3 e tira todas da casa 2, ficando com 5 na mão, para prosseguir. Quantas fichas ele

deve colocar em cada uma das outras sete casas para ganhar o jogo, mantendo as fichas das casa 2 e 3 inalteradas depois dessa primeira jogada?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	2 **0 fichas**	3 **11 fichas**
4	5	6
7	8	9

22. ***Um sistema*** – Nas igualdades $AB + BC = CD$ e $AB - BC = BA$, cada letra representa um algarismo. Quanto vale $A + B + C + D$?

23. ***Constelações floridas*** – Rosa, Margarida e Dália são três constelações em forma de buquês de flores. Sabemos que:

    (a) o número de estrelas de Dália, que é a menor das três constelações, é o produto de dois quadrados;

    (b) o número de estrelas de Rosa também é um produto de dois quadrados;

    (c) Dália e Rosa, juntas, têm o mesmo número de estrelas de Margarida;

    (d) Margarida tem 28 561 estrelas.

    Quantas estrelas possuem, cada uma, Dália e Rosa?

24. ***Dois meses iguais*** – A seguir mostramos o calendário de abril de 2 005.

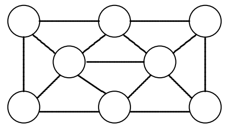
D	S	T	Q	Q	S	S
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30

    Qual é o primeiro mês depois desse, de 2005 ou de 2006, que teve uma página igual?

25. ***A faixa e o quadrado*** – Uma faixa retangular de cartolina mede 5 por 1 cm. Corte a faixa com quatro cortes retilíneos de modo a poder montar um quadrado com as peças obtidas, mas sem superposição das peças.

26. ***Um número e seu sêxtuplo*** – Um número de três algarismos e seu sêxtuplo são formados pelos mesmos algarismos. A soma dos algarismos desse número é 17 e a de seu sêxtuplo é 21. Qual é esse número? Existe mais do que um número com essas propriedades?

27. ***Oito dentro de um retângulo*** – Coloque os números de 1 a 8 dentro dos círculos do retângulo dado, de tal modo que a diferença entre dois números ligados por um segmento seja sempre maior do que 1.



28. ***Uma estratégia com um número muito grande*** – Carlos escreveu consecutivamente todos os números de 1 a 60, ou seja,

$$1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,1\,0\,1\,1\,1\,2\,1\,3\,1\,4\cdots5\,7\,5\,8\,5\,9\,6\,0\,.$$

Depois ele riscou 100 algarismos de tal modo que o número formado com os algarismos que não foram riscados fôsse o maior possível, sem mudar a ordem inicial em que os algarismos foram escritos. Qual é esse número?

29. ***Um número surpreendente*** – Um certo número surpreendente é divisível por 9, tem nove algarismos diferentes, nenhum dos quais é igual a 0 e é tal que:

(a) o número formado pelos 2 primeiros algarismos é divisível por 2;
(b) o número formado pelos 3 primeiros algarismos é divisível por 3;
(c) o número formado pelos 4 primeiros algarismos é divisível por 4;
(d) o número formado pelos 5 primeiros algarismos é divisível por 5;
(e) o número formado pelos 6 primeiros algarismos é divisível por 6;
(f) o número formado pelos 7 primeiros algarismos é divisível por 7;
(g) o número formado pelos 8 primeiros algarismos é divisível por 8.

Qual é esse número?

30. ***Qual é o erro?*** – Uma das afirmações dadas é falsa:

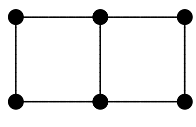
(a) André é mais velho do que Bruno;
(b) Cláudia é mais nova do que Bruno;
(c) A soma das idades de Bruno e Cláudia é o dobro da idade de André;
(d) Claúdia é mais velha do que André.

Quem é o mais velho? E o mais novo?

31. ***Soma*** – Neste exercício, as letras representam algarismos. Determine cada uma das parcelas da soma dada.

$$\begin{array}{r} a\,b\,c\,d\,e\,f \\ a\,b\,c\,d\,e\,f \\ +\quad\; g\,h\,i\,j \\ \hline d\,e\,f\,h\,j\,f \end{array}$$

32. ***Bolinhas*** – Rogério colocou seis bolinhas sobre a mesa, de modo a formar dois quadrados, como na figura. Ele percebe que tem mais uma bolinha. Complete a figura formada pelas bolinhas com essa bolinha a mais, de tal modo que forme três quadrados.



33. ***Um número que não é divisível por 5*** – Determine quais números naturais n entre 2 001 e 2 007 tornam o número $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ não divisível por 5.

34. ***Quatro frações e um inteiro*** – Quantos números naturais a, b, c e d, todos distintos, existem tais que $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d}$ seja um inteiro?

35. ***O Rei Arthur e o Dragão das Três Cabeças e Três Caudas*** – O Rei Arthur teve que lutar com o Dragão das Três Cabeças e Três Caudas. Sua tarefa foi facilitada quando conseguiu arranjar uma espada mágica que podia, a cada golpe, fazer uma e somente uma das seguintes coisas:

    (a) cortar uma cabeça;
    (b) cortar duas cabeças;
    (c) cortar uma cauda;
    (d) cortar duas caudas.

    Além disso, a Fada Morgana lhe revelou o segredo do dragão:

    (a) se uma cabeça é cortada, cresce uma nova;
    (b) se duas cabeças são cortadas, nada mais acontece;
    (c) no lugar de uma cauda cortada nascem duas caudas novas;
    (d) se duas caudas são cortadas, cresce uma nova cabeça;
    (e) o dragão morre se perder as três cabeças e as três caudas.

    Para matar o dragão, de quantos golpes o Rei Artur vai precisar, no mínimo?

36. ***O passeio do cavalo*** – Num tabuleiro de 5×5 casas, um cavaleiro do jogo de xadrez está na casa marcada com A. Depois ele segue movendo, marcando as casas por onde passa, como na figura.

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H$$

A				G
		H		
	B		F	
		D		
C				E

Partindo da casa H, o cavaleiro se move pelo tabuleiro até ter passado por todas as 25 casas. Descreva o trajeto que ele fez.

37. ***As faces do cubo*** – Oito dados são agrupados formando um cubo. Quantas faces dos dados permanecem visíveis?

38. ***Data fatídica*** – Em 1950, um "profeta" anunciou que o fim do mundo ocorreria em 11 de agosto de 1999, que denotamos por 11081999. Como nada aconteceu nesse dia, ele refez seus cálculos e fez a seguinte previsão: *"O fim do mundo ocorrerá na próxima data que se escrever com oito algarismos diferentes."* Você consegue descobrir essa data?

39. ***Todos com o 2*** – Qual é operação que devemos fazer com todos os cinco números 418, 244, 816, 426 e 24 para obter cinco números que tenham todos o algarismo 2?

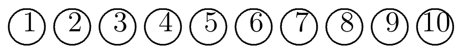
    (a) Dividir por 2.
    (b) Somar 4.
    (c) Dividir por 6.
    (d) Subtrair 5.
    (e) Multiplicar por 3.

40. ***Tortas da vovó*** – Sofia foi levar uns docinhos para sua avó: foram sete docinhos de amora, seis de côco e três de chocolate. Durante o caminho, a gulosa Sofia comeu dois docinhos. Qual das situações abaixo é possível?

    (a) Sua avó não recebeu docinhos de chocolate.
    (b) Sua avó recebeu menos docinhos de côco do que de chocolate.
    (c) Sua avó recebeu o mesmo número de docinhos de cada uma das três variedades.
    (d) Existem duas variedades de docinhos das quais sua vovó recebeu o mesmo número.
    (e) O número de docinhos de amora que sua vovó recebeu é maior que o das outras duas variedades somadas.

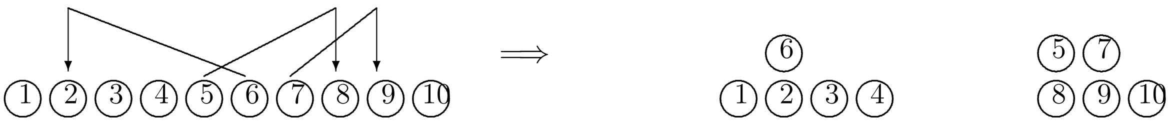
41. ***Família Sétimo*** – O Sr. e Sra. Sétimo têm sete filhos, todos nascidos em 1º de abril; na verdade, em seis 1º de abril consecutivos. Neste ano, para seus aniversários, a Sra. Sétimo fez um bolo com velinhas para cada um de seus filhos, sendo o número de velas em cada bolo igual ao número de anos do aniversariante. João Sétimo, o filho que mais gosta de Matemática, reparou que, nesse ano, o número total de velinhas é o dobro do que havia dois anos atrás e que há dois bolos a mais. Quantas velinhas serão acesas desta vez?

42. ***O salta-ficha*** – Temos dez fichas numeradas colocadas em linha reta, como na figura dada.



Queremos arrumá-las em cinco pilhas, com duas fichas em cada pilha. A regra para isso é que só podemos movimentar uma ficha fazendo-a saltar sobre uma ou mais fichas, ou sobre uma única pilha já formada. Um exemplo de três movimentos é o seguinte.

- A ficha 7 pode saltar sobre a ficha 8 e formar uma pilha com a 9;
- a ficha 5 pode saltar sobre as fichas 6 e 7 e formar uma pilha com a 8 e
- a ficha 6 pode saltar sobre as fichas 5, 4 e 3 formar uma pilha com a 2.



Como formar cinco pilhas de duas fichas com apenas cinco movimentos?

43. ***O menor*** – Qual é o menor número, $5^{2\,002}$ ou $3^{2\,002} + 4^{2\,002}$?

44. ***O maior resultado*** – Qual é o maior resultado que podemos encontrar quando dividimos um número de dois algarismos pela soma de seus algarismos?

45. ***Dois mil*** – Digamos que o *peso* de um número seja a soma de seus algarismos. Qual é o menor número que pesa 2 000?

46. ***No cabeleireiro*** – Três clientes estão no cabeleireiro, pagando cada um a sua conta no caixa.

    - O primeiro cliente paga uma quantia igual ao montante que há no caixa e recebe 10 reais de troco.
    - O segundo cliente efetua a mesma operação que o primeiro.
    - O terceiro cliente efetua a mesma operação que o primeiro.

    Encontre o montante que estava inicialmente no caixa, sabendo que, ao fim das três operações, o caixa ficou zerado.

47. ***O macaco e a raposa*** – O macaco diz para a raposa: *"Você vê as três pessoas que estão correndo lá longe? Eu sei que o produto de suas idades é 2 450 e que a soma de suas idades é o dobro da sua idade. Você pode me dizer suas idades? Não*, responde a raposa. *E se eu te disser que o mais jovem dos três é o único louro, você pode agora descobrir as idades?* Então a raposa dá as idades das três pessoas.

    Porque a raposa não pode responder inicialmente? E porque pode responder depois?

48. ***Nova sequência*** – Encontre a lei que forma a sequência 425, 470, 535, 594, 716, 802, ... e dê seus próximos dois termos.

49. ***Retângulo quase quadrado*** – Um certo terreno retangular é *quase quadrado*, pois sua largura e seu comprimento medem números inteiros que diferem exatamente por uma unidade de medida. A área desse terreno, em unidades quadradas, é um número de quatro algarismos, sendo iguais o das unidades de milhar e o das centenas, bem como o das dezenas e o das unidades. Quais são as possíveis dimensões desse terreno?

50. ***Onde está o erro?*** – Seja x solução de $x^2 + x + 1 = 0$. Então $x \neq 0$ e, por isso, podemos dividir ambos os membros da equação por x, obtendo $x + 1 + 1/x = 0$. Da equação original temos que $x + 1 = -x^2$, portanto, $-x^2 + 1/x = 0$, isto é, $x^2 = 1/x$ ou, ainda, $x^3 = 1$, de modo que $x = 1$. No entanto, substituindo $x = 1$ na equação $x^2 + x + 1 = 0$ original, encontramos $3 = 0$, o que não está exatamente correto. Onde erramos?

Soluções do Nível 1

1. ***Qual é o número?*** – A opção correta é (d).

   Como $96 \div 8 = 12$, temos $8 \times 12 = 96$. Observe que a solução é equivalente a resolver a equação $8x = 96$, cuja raiz é $x = \dfrac{96}{8} = 12$.

2. ***Muro em 15 dias*** – A opção correta é (c).

   Se o pedreiro assenta 8 metros por dia, em 15 dias assentará $15 \times 8 = 120$ metros.

3. ***Medindo pilhas de papel*** – A opção correta é (e).

   Como a espessura de cada folha é 0,1 mm, a altura de um pacote com 500 folhas é $500 \times 0{,}1$ mm $= 50$ mm. Logo, a altura de cada pilha será de 60×50 mm $= 3\,000$ mm $= 3$ m, aproximadamente, a altura de uma sala de aula.

4. ***Quanto pesa?*** – A opção correta é (b).

   Solução 1: Retirando-se dois saquinhos e quatro bolas de cada prato, a balança continua equilibrada e restam três saquinhos no prato à esquerda e seis bolas no prato da direita. Logo, o peso de três saquinhos é igual ao peso de seis bolas. Daí concluímos que o peso de um saquinho é igual ao peso de duas bolas.

   Solução 2: Denotando o peso de um saquinho por x e o peso de uma bola por y, o equilíbrio da balança fornece a equação $5x + 4y = 2x + 10y$, da qual decorre que $3x = 5x - 2x = 10y - 4y = 6y$, ou seja, $x = 2y$.

5. ***Calcule a diferença*** – A opção correta é (e).

   Para que a diferença seja a maior possível devemos escolher o maior número de três algarismos pares diferentes e o menor número de três algarismos ímpares diferentes. O maior número de três algarismos pares diferentes é 864 e o menor número de três algarismos ímpares diferentes é 135. A diferença entre eles é $864 - 135 = 729$.

6. ***Qual é o volume?*** – A opção correta é (b).

   As figuras mostram que os volumes ocupados pelos líquidos correspondem, aproximadamente, a mais do que da metade no frasco A, o que elimina as opções (a) e (e), à metade no frasco B e a menos da metade no frasco C, o que elimina (c) e (d). O único grupo de frações que corresponde a essas estimativas é $2/3$ (mais do que a metade), $1/2$ (metade) e $1/4$ (menos do que a metade).

7. ***Descontos e descontos*** – A opção correta é (b).

   Solução 1: A pessoa irá pagar 120 reais menos o desconto, que é de 30% sobre 120, ou seja, de $0{,}3 \times 120 = 36$ reais. Assim, a pessoa paga $120 - 36 = 84$ reais.

   Solução 2: Como o desconto é de 30%, a pessoa pagará é 70% de 120, ou seja, $0{,}7 \times 120 = 84$ reais.

8. ***O carro de Maria*** – A opção correta é (a).

Solução 1: Se num percurso de 25 km ela gasta 3 litros, então para percorrer 100 km Maria gastará $4 \times 3 = 12$ litros. Logo, para percorrer 600 km, o carro gastará $6 \times 12 = 72$ litros. Como cada litro custa 0,75 reais, 72 litros custarão $0{,}75 \times 72 = 54$ reais.

Solução 2: Podemos usar a regra de três para calcular quantos litros serão gastos em 600 km. Temos:

$$\begin{array}{lcl} 3 \text{ litros} & \text{——} & 25 \text{ km} \\ x \text{ litros} & \text{——} & 600 \text{ km.} \end{array}$$

Como essa regra de três é direta, resulta $25x = 3 \times 600$ e, portanto,

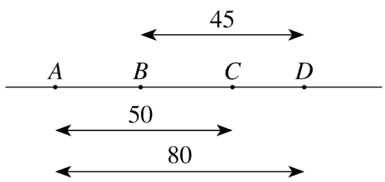
$$x = 3 \times \frac{600}{25} = 72 \text{ litros.}$$

Como cada litro custa 0,75 reais, 72 litros custarão $0{,}75 \times 72 = 54$ reais.

9. ***Calculando distâncias*** – A opção correta é (a).

Solução 1: Pelo enunciado, temos $AC = 50$, $BD = 45$ e $AD = 80$. Da figura segue que

$$CD = AD - AC = 80 - 50 = 30.$$



Logo,

$$BC = BD - CD = 45 - 30 = 15 \text{ km.}$$

Solução 2: Pela figura, temos que $45 - BC = 80 - 50$. Logo, $BC = 15$ km.

10. ***Pesando caixas*** – A opção correta é (e).

Na figura podemos ver uma coluna com três caixas, quatro colunas com duas caixas e três colunas com uma caixa. Logo, o total de caixas é

$$1 \times 3 + 4 \times 2 + 3 \times 1 = 14.$$

Como cada caixa pesa 25 kg, o peso do monte de caixas é $14 \times 25 = 350$ kg.

11. ***Consumo de água*** – A opção correta é (c).

Lembre que a *média aritmética* de n números é um enésimo da soma desses números. Por exemplo, a média aritmética dos números 3, 6, 8 e 26 é

$$\frac{3+6+8+26}{4} = \frac{43}{4} = 10{,}75.$$

Analogamente, o consumo mensal médio é a soma dos consumos mensais dividida pelo número de meses. Logo, o consumo mensal médio é igual a

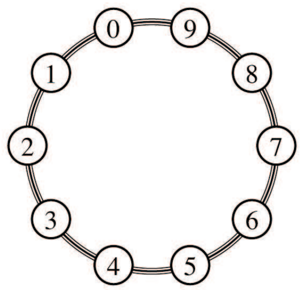
$$\frac{12{,}5 + 13{,}8 + 13{,}7 + 11{,}4 + 12{,}1}{5} = 12{,}7 \text{ m}^3.$$

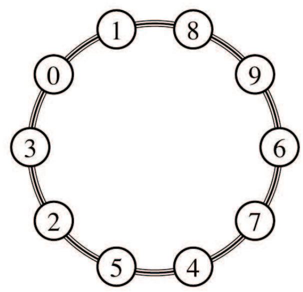
12. ***Folheando um livro*** – A opção correta é (c).

Entre 1 e 100, o algarismo 5 aparece nos números 5, 15, 25, 35, 45, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 65, 75, 85 e 95. A primeira folha contém as páginas 1 e 2, a segunda folha as páginas 3 e 4, a terceira folha as páginas 5 e 6, e assim sucessivamente. Logo, as duas páginas que compõem cada folha têm a seguinte numeração: um número ímpar e o número par seguinte. Assim, estão numa mesma folha as duplas de números $\underbrace{49, 50}$; $\underbrace{51, 52}$; $\underbrace{53, 54}$; $\underbrace{55, 56}$; $\underbrace{57, 58}$; $\underbrace{59, 60}$ e nesse grupo temos seis folhas. Por outro lado, de 1 a 48, temos cinco folhas com as páginas 5, 15, 25, 35 e 45 e, de 61 a 100, temos quatro folhas com as páginas 65, 75, 85 e 95. Concluímos que o total de folhas com o algarismo 5 em sua numeração é $6 + 5 + 4 = 15$.

13. ***Calculando a soma*** – A opção correta é (c).

A partir de qualquer círculo, obtemos inicialmente a sequência 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Subtraindo uma unidade dos ímpares e somando uma unidade aos pares, a sequência torna-se 1, 0, 3, 2, 5, 4, 7, 6, 9, 8. Agora é fácil verificar que a maior soma possível com três números consecutivos é $8 + 9 + 6 = 23$.



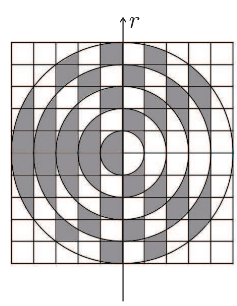


14. ***Desenhando o cubo*** – A opção correta é (b).

Vemos que o cubo (a) é igual ao cubo (e) e o cubo (c) é igual ao cubo (d). Como não podemos trocar a estrela com o círculo cheio mantendo o círculo oco no topo, vemos que a alternativa correta é (b).

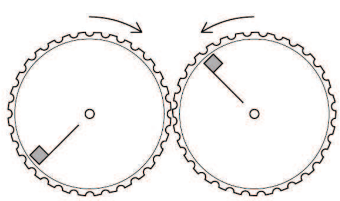
15. ***Círculos concêntricos*** – A opção correta é (c).

Observe que a figura é simétrica em relação à reta r que passa pelo centro comum das circunferências. Para cada região cinza de um lado de r existe uma região branca equivalente do outro lado de r, e vice-versa. Logo, a área da região cinza é igual à área branca. Portanto, a área da região cinza é igual à metade da área do círculo maior.



16. ***Brincando com engrenagens*** – A opção correta é (a).

A engrenagem desta questão é formada por dois discos dentados. Quando um deles gira no sentido horário, o outro gira no sentido anti-horário.

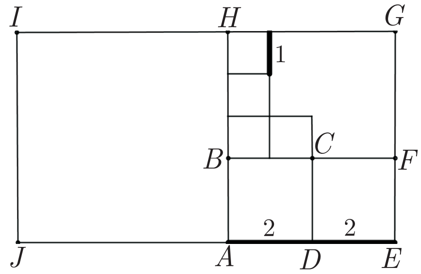


As cinco opções da resposta mostram a bandeira do disco à esquerda, numa posição que corresponde a uma rotação desse disco no sentido anti-horário por um certo ângulo. Nesse caso, a engrenagem direita girou por esse mesmo ângulo no sentido horário, levando a bandeirinha para a posição indicada na primeira alternativa.

17. ***Troca de garrafas*** – A opção correta é (d).

Como $43 = 10 \times 4 + 3$, numa primeira vez as 43 garrafas vazias podem ser trocadas por 10 garrafas cheias, sobrando ainda 3 vazias. Agora, consumindo o leite dessas 10 garrafas, ficamos com 13 vazias, que desta vez podem ser trocadas por 3 cheias, sobrando 1 vazia. Finalmente, consumindo o leite das 3 garrafas cheias, sobram 4 vazias, que podem ser trocadas por 1 cheia. Portanto, o total de garrafas cheias de leite que podem ser obtidas nesse processo é $10 + 3 + 1 = 14$.

18. ***Retângulo e quadrados*** – A opção correta é (c).

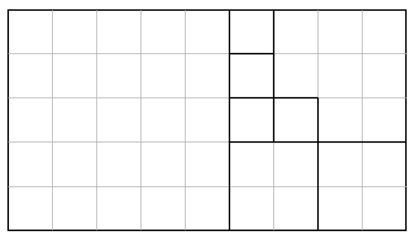


Solução 1: Como os quadrados menores têm 1 m^2 de área, cada um deles tem lado igual a 1 m. Pela figura, concluímos que $BC = 2$ m. Como $ABCD$ é um quadrado, segue que $BC = CD = AD = 2$ m. Sendo $CDEF$ também um quadrado, temos

$DE = 2$ m. Pela figura, temos

$$AH = AB + BH = 2 + 3 + 5,$$

$EJ = AD+DE+AJ$ e $AJ = AH$. Segue que $EJ = 2+2+5 = 9$. Como $EG = AH = 5$, as dimensões do terreno são 9 m de comprimento por 5 m de largura. Portanto, sua área é de $9 \times 5 = 45$ m^2.



Solução 2: Quadriculando o retângulo maior com quadrados de 1 m^2 de área, obtemos o retângulo $BFGH$ formado por 12 quadrados de 1 m^2 de área, os dois quadrados $ABCD$ e $DCFE$ formados por quatro quadrados de 1 m^2 de área e o quadrado $AHIJ$ formado por 25 quadrados de 1 m^2 de área. Portanto, a área pedida é de $12 + 4 + 4 + 25 = 45$ m^2.

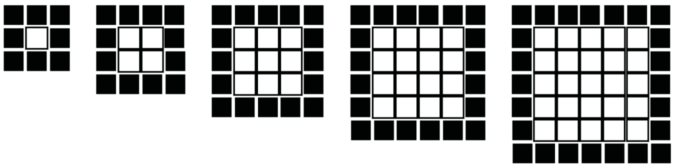
19. ***Quantas fatias de bolo?*** – A opção correta é (e).

Temos um total de $8 \times 3 = 24$ fatias de bolo que foram comidas. Como todos comeram bolo, inicialmente cada um dos nove amigos comeu uma fatia, sobrando, ainda, $24-9 = 15$ fatias para serem comidas por nove pessoas. Se todos os nove amigos tivessem comido menos do que duas dessas 15 fatias, poderíamos escrever o número 15 como uma soma de nove parcelas, cada uma delas sendo 0 (os que não comeram alguma das 15 fatias) ou 1 (os que comeram uma das 15 fatias), o que claramente não é possível. Logo, obrigatoriamente alguém comeu pelo menos duas dessas 15 fatias. Como todos já haviam comido, inicialmente, uma fatia, concluímos que alguém comeu 3 fatias, no mínimo.

20. ***Mosaicos quadrados*** – A opção correta é (a).

No primeiro mosaico, temos $3+3+1+1=8$ azulejos pretos, no segundo, temos $4+4+2+2=12$, no terceiro, temos $5+5+3+3=16$ e não é difícil perceber (e verificar) que os próximos mosaicos têm 20 e 24 azulejos pretos, pois a cada novo mosaico são usados mais quatro azulejos pretos, um em cada lado. Como $8+12+16+20+24=80$, é possível construir exatamente cinco mosaicos. Finalmente, o número total de azulejos brancos nesta sequência de cinco mosaicos é

$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=1+4+9+16+25=55.$$



21. ***Quanto custa?*** – Comprando três cadernos por 6 reais cada um, ainda sobram 4 reais para Ester, de modo que a quantia que ela possui é $3\times 6+4=22$ reais.

(a) Se o irmão lhe empresta 4 reais, ela fica então com $22+4=26$ reais e pode comprar 2 cadernos a 6 reais cada um, sobrando $26-2\times 6=26-12=14$ reais para 7 canetas. Concluímos que o preço de cada caneta é $14\div 7=2$ reais.

(b) Como Ester possui 22 reais, se ela comprar 2 cadernos, sobram-lhe $22-2\times 6=22-12=10$ reais. Como cada caneta custa 2 reais, ela poderá comprar $10\div 2=5$ canetas.

22. ***Encontre o número*** – O número 24 deve ser escrito como uma soma de três algarismos. Inicialmente, note que os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5 não podem ser usados. Realmente, se um deles fosse usado, por exemplo o algarismo 5, então teríamos que encontrar dois algarismos cuja soma fosse 19, pois $24-5=19$; mas, sabemos que isso não é possível. O mesmo ocorre com os algarismos 0, 1, 2, 3 e 4. Logo, o número da casa de Júlia só pode ser composto pelos algarismos 6, 7, 8 e 9.

(a) Se os três algarismos são iguais, então o número da casa de Júlia é 888.

(b) Se apenas dois desses algarismos são iguais, esses dois algarismos devem ser iguais a 9 e o terceiro deve ser 6, obtendo os números 699, 969 e 996. De fato, com dois algarismos 8, recaímos no caso anterior e, com dois 6 ou dois 7, a soma dá, no máximo 14, restando, no mínimo, 10 para o terceiro, o que não é possível.

(c) Se os três algarismos são distintos, então esses algarismos são 7, 8 e 9. De fato, se ocorrer um 6, a soma dos outros dois deve ser $24-6=18$, portanto precisamos de dois 9 e recaímos no caso anterior. Assim, restam apenas as alternativas seguintes: 789, 798, 879, 897, 978 e 987.

23. ***Campeonato de futebol***

(a) A equipe A disputa com as cinco equipes B, C, D, E e F; a equipe B, além da partida contra A, já computada, ainda disputa quatro partidas com as equipes

C, D, E e F; a equipe C, ainda disputa com as equipes D, E e F; a equipe D ainda disputa com as equipes E e F e a equipe E ainda disputa com a equipe F. No total, temos $5+4+3+2+1=15$ partidas disputadas.

Outra maneira de contar: Podemos formar grupos de duas letras e contar, lembrando que AB e BA, por exemplo, são a mesma partida: AB, AC, AD, AE, AF, BC, BD, BE, BF, CD, CE, CF, DE, DF e EF dá 15 partidas.

Outra maneira de contar: Cada uma das seis equipes disputou, com cada uma das outras cinco, exatamente uma partida. Portanto, foram disputadas um total de $\frac{1}{2}(6 \times 5) = 15$ partidas.

(b) Cada equipe disputou cinco partidas, portanto, a soma do número de vitórias, empates e derrotas de cada equipe, é igual a cinco. Assim, temos $x+1+0=5$, portanto, $x=4$, e temos $1+1+y=5$, portanto, $y=3$.

Outra maneira de calcular x e y: Sabemos o número total de empates (que sempre envolvem duas equipes), dado por $1+1+3+1+1+1=8$. Portanto, o número de vitórias (ou derrotas), é igual número de partidas, 15, menos a metade do número de empates, 4, ou seja, o número total de vitórias (ou de derrotas) é $15-4=11$. Assim, $4+2+1+x=11$, portanto, $x=4$, e $2+2+y+4=11$, portanto, $y=3$.

Finalmente, o número total de gols marcados no campeonato é igual ao número total de gols sofridos, que é $2+6+6+6+5+3=28$. Assim,

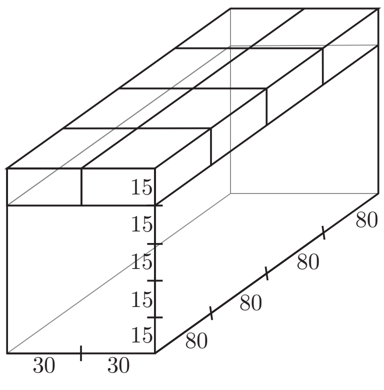
$$28 = 6+6+2+3+1+z,$$

ou seja, $z=10$.

Resumindo, o número x de vitórias da equipe F é 4, o número y de derrotas da equipe D é 3 e o número z de gols marcados pela equipe F é 10.

24. ***Dividindo o paralelepípedo***

(a) Em centímetros, as dimensões do bloco maior são $320 \times 60 \times 75$ e as dos blocos menores são $80 \times 30 \times 15$. Logo, o comprimento foi dividido por $4 = 320 \div 80$, a largura foi dividida por $2 = 60 \div 30$ e a altura foi dividida por $5 = 75 \div 15$. Portanto, teremos um total de $4 \times 2 \times 5$ peças, conforme a figura.



(b) O volume de um bloco é dado por comprimento×largura×altura. Logo, o volume de cada um dos blocos menores é $80 \times 30 \times 15 = 36\,000$ cm^3. Como o peso é dado em metros cúbicos, devemos reduzir o volume de cada bloco para metros cúbicos. Para isso, deslocamos a vírgula seis casas para a esquerda, obtendo $36\,000$ cm^3 = 0,036 m^3. Como 1 m^3 pesa 900 kg, então cada bloco menor de 0,036 m^3 pesará $0{,}036 \times 900 = 32{,}4$ kg.

25. ***Uma calculadora*** – A partir do número 1 no visor devemos aplicar sucessivamente as operações das teclas A e B para obter o número desejado. Observe que, para obter o número 2 a partir do número 1, podemos apertar tanto a tecla A quanto a B, portanto, em cada uma das respostas dadas, podemos trocar cada $1 \xrightarrow{\texttt{A}} 2$ por $1 \xrightarrow{\texttt{B}} 2$.

    (a) $1 \xrightarrow{\texttt{A}} 2 \xrightarrow{\texttt{A}} 4 \xrightarrow{\texttt{B}} 5 \xrightarrow{\texttt{A}} 10$.

    (b) $1 \xrightarrow{\texttt{A}} 2 \xrightarrow{\texttt{B}} 3 \xrightarrow{\texttt{A}} 6 \xrightarrow{\texttt{B}} 7 \xrightarrow{\texttt{A}} 14 \xrightarrow{\texttt{B}} 15$.

    (c) $1 \xrightarrow{\texttt{A}} 2 \xrightarrow{\texttt{B}} 3 \xrightarrow{\texttt{A}} 6 \xrightarrow{\texttt{A}} 12 \xrightarrow{\texttt{A}} 24 \xrightarrow{\texttt{B}} 25 \xrightarrow{\texttt{A}} 50 \xrightarrow{\texttt{A}} 100$.

26. ***Ano bissexto***

    (a) Uma semana tem sete dias. Na divisão de 365 por 7 encontramos quociente 52 e resto 1. Logo, o ano comum tem 52 semanas e 1 dia. Portanto, a frase correta é "O ano comum tem sete semanas e um dia." Como o ano bissexto tem 366 dias, ele possui 52 semanas e 2 dias. Portanto, o correto é dizer "O ano bissexto tem sete semanas e dois dias."

    (b) Se um ano comum inicia numa terça-feira, então a sua 52ª semana inicia numa terça e termina numa segunda, ou seja, a 52ª semana é dada por terça – quarta – quinta – sexta – sábado – domingo – segunda. Como esse ano tem 52 semanas e mais 1 dia, o último dia deste ano será uma terça. Logo, o ano seguinte iniciará numa quarta.

    (c) No caso do ano bissexto, devemos considerar um dia a mais do que no item anterior. Logo, o seu último dia será uma quarta e, portanto, o ano seguinte iniciará numa quinta-feira.

27. ***Números triangulares*** – Notamos que o segundo número triangular é obtido a partir do primeiro acrescentando-se 2, o terceiro é obtido do segundo acrescentando-se 3 e assim por diante. Essa observação nos mostra como calcular os próximos números triangulares sem fazer muitas contas. Por exemplo, já sabemos que o quarto número triangular é 10, donde o quinto será $10 + 5 = 15$ e o sexto sendo, então, $15 + 6 = 21$. Assim, podemos escrever os números triangulares até passar de 100.

$$1 \underbrace{\longrightarrow}_{+2} 3 \underbrace{\longrightarrow}_{+3} 6 \underbrace{\longrightarrow}_{+4} 10 \underbrace{\longrightarrow}_{+5} 15 \underbrace{\longrightarrow}_{+6} 21 \underbrace{\longrightarrow}_{+7} 28 \underbrace{\longrightarrow}_{+8} 36 \underbrace{\longrightarrow}_{+9} 45$$

$$45 \underbrace{\longrightarrow}_{+10} 55 \underbrace{\longrightarrow}_{+11} 66 \underbrace{\longrightarrow}_{+12} 78 \underbrace{\longrightarrow}_{+13} 91 \underbrace{\longrightarrow}_{+14} 105$$

Logo, os números triangulares menores do que 100, são 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78 e 91. Assim, temos 13 números triangulares menores do que 100.

28. ***Livros separados*** – Denotando por n o número de livros que a bibliotecária vai colocar em cada estante, temos $130 \div n =$ número de estantes para os livros de Matemática e $195 \div n =$ número de estantes para os livros de Português. Isso mostra que n deve ser um divisor comum de 130 e de 195, pois o número de estantes utilizadas é inteiro. Sabemos que, quando aumentamos o denominador de uma fração, esta fração diminui; por exemplo, $27/10$ é menor do que $27/8$. Logo, quanto maior for o denominador n, menores serão as frações $130/n$ e $195/n$, o que significa que menor será o número de

estantes utilizadas. Vemos, assim, que n deve ser o maior divisor comum (MDC) de 130 e 195. Como as decomposições desses números em fatores primos são $130 = 2 \times 5 \times 13$ e $195 = 3 \times 5 \times 13$, segue que o MDC de 130 e 195 é $5 \times 13 = 65$.

Logo, a bibliotecária vai colocar 65 livros em cada estante, o número de estantes para os livros de Matemática é $130 \div 65 = 2$ e o número de estantes para os de Português é $195 \div 65 = 3$, o que dá um total de $2 + 3 = 5$ estantes.

29. ***Alunos com óculos*** – Nosso problema aqui é encontrar o número de alunos da classe. Como 1/6 dos alunos usam óculos e, desses, 1/3 são meninas, temos que $\frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$ dos alunos são meninas que usam óculos. Como

$$\underbrace{\text{alunos que usam óculos}}_{\frac{1}{6}} - \underbrace{\text{meninas que usam óculos}}_{\frac{1}{18}} \textbf{ corresponde a } \underbrace{\text{meninos que usam óculos}}_{4}$$

e $\frac{1}{6} - \frac{1}{18} = \frac{3}{18} - \frac{1}{18} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$, concluímos que $\frac{1}{9}$ da classe consiste de meninos que usam óculos, que são em número de 4. Portanto,

$$\frac{1}{9} \text{ da classe corresponde a 4 alunos}$$

$$\frac{9}{9} \text{ da classe corresponde a } 4 \times 9 = 36 \text{ alunos}$$

Assim, o número de alunos na classe é 36.

30. ***Quadrado mágico*** – Para facilitar nossas contas, é conveniente reduzir todas as frações que aparecem na tabela a um mesmo denominador. Como $0{,}4 = 4/10$ e $0{,}5 = 5/10$, podemos reescrever a tabela como segue, em que indicamos com as letras a, b, c, d e e os números que devem ser calculados.

a	c	6/10
b	5/10	d
4/10	5/10	e

Olhando para a diagonal ascendente, vemos que a soma dos elementos dessa diagonal é $4/10 + 5/10 + 6/10 = 15/10$. Como a soma dos elementos da terceira linha deve ser igual a essa soma dos elementos da diagonal, obtemos $4/10 + 5/10 + e = 15/10$, donde $e = 6/10$. Também obtemos, na segunda coluna, $5/10 + 5/10 + c = 15/10$, donde $c = 5/10$. Colocando esses valores de c e e na tabela, obtemos

a	5/10	6/10
b	5/10	d
4/10	5/10	6/10

Agora, a primeira linha fornece $a + 5/10 + 6/10 = 15/10$, donde $a = 4/10$. Da terceira coluna, obtemos $6/10 + d + 6/10 = 15/10$, donde $d = 3/10$; do mesmo modo, obtemos $b = 7/10$ e a tabela está completa.

4/10	5/10	6/10
7/10	5/10	3/10
4/10	5/10	6/10

31. ***Três algarismos*** – A partir da igualdade $(AB)^2 = CAB$ e denotando o número de dois algarismos AB por x, temos $x^2 = (AB)^2 = CAB = C \cdot 100 + x$, ou seja, $x^2 - x = C \cdot 100$. Portanto, o produto $x(x-1) = x^2 - x$ é divisível por 100. Levando em conta a fatoração $100 = 2^2 \cdot 5^2$, dividimos a resolução em três casos, conforme a maior potência de 5 que divide x.

1º Caso: 5^2 divide x.

Como x é um número de dois algarismos, os possíveis valores de x são 25, 50 e 75. Construímos uma tabela.

x	$x-1$	$x \cdot (x-1)$
25	24	600
50	49	2 450
75	74	5 550

Portanto, o número $x \cdot (x-1)$ é um múltiplo de 100 somente se $x = 25$. Como $25^2 = 625$, nesse caso temos $C = 6$.

2º Caso: 5 divide x, mas 5^2 não divide x.

Então, necessariamente, 5 divide $x - 1$, pois 5 divide $x \cdot (x-1)$. Mas isso é uma impossibilidade, porque 5 não pode dividir os dois números consecutivos $x - 1$ e x (lembre que os números divisíveis por 5 terminam em 0 ou 5). Logo, esse caso está excluído.

3º Caso: 5 não divide x.

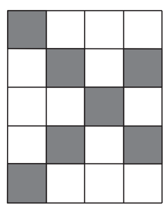
Então 5^2 divide $x-1$. Como no Caso 1, temos $x-1 = 25{,}50$ ou 75 e os possíveis valores de x são 26, 51 e 76. Construímos uma tabela.

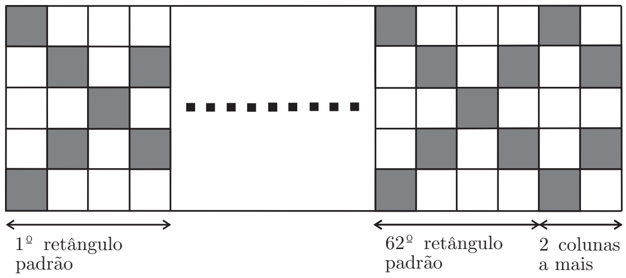
x	$x-1$	$x \cdot (x-1)$
26	25	650
51	50	2 550
76	75	5 700

O produto $x \cdot (x-1)$ é um múltiplo de 100 somente se $x = 76$, mas esse caso também está excluído, pois $76^2 = 5\,776$ tem mais do que três algarismos.

Assim, a única possibilidade é $A = 2, B = 5$ e $C = 6$, com soma $A + B + C = 13$.

32. ***Pintando quadradinhos*** – Para pintar a faixa conforme o modelo, o retângulo padrão (aquele que se repete por toda a faixa) é o retângulo de 5 linhas e 4 colunas mostrado na figura. Nele, temos 7 quadradinhos pintados e 13 não pintados. Precisamos saber quantos retângulos padrão cabem na faixa. A faixa tem 250 colunas e cada retângulo padrão tem 4 colunas. Da divisão de 250 por 4 temos que $250 = 4 \times 62 + 2$, e concluímos que na faixa cabem 62 retângulos padrão, sobrando ainda duas colunas.





Nos 62 retângulos padrão temos $62 \times 13 = 806$ quadradinhos não pintados. Agora falta verificar quais são os quadradinhos não pintados nas duas colunas finais. A figura mostra como são as duas colunas, de acordo com o modelo. Nessas colunas temos 6 quadradinhos não pintados. Assim, o número de quadradinhos não pintados em toda a faixa é $806 + 6 = 812$.

33. ***A cisterna do João*** – O dia 1º de janeiro começa com 156 litros de água na cisterna e, a partir daí, a cisterna recebe água da chuva e perde água para regar as flores. Como no dia 8 não houve alteração na quantidade de água na cisterna, o número de litros de água na cisterna no dia 8 é

$$156 + \text{água de chuva do dia 1 ao dia 7} - \text{água para regar do dia 1 ao dia 7.}$$

O enunciado diz que a segunda parcela da expressão acima é a soma dos números da terceira coluna, que é $2{,}5 + 0 + 5 + 0 + 3 + 0 + 4{,}5 = 15$ e a terceira parcela é a soma dos números da segunda coluna da tabela, que é $6+9+0+4+9+0+11 = 39$. Assim, o número de litros na cisterna, à meia noite do dia 8, é $156 + 15 - 39 = 132$.

34. ***O múltiplo de* 13** – A opção correta é (a).

Como 119 268 916 é divisível por 13, já que $9\,174\,532 \times 13 = 119\,268\,916$, podemos concluir que os números divisíveis por 13 são aqueles obtidos somando ou subtraindo múltiplos de 13 ao número 119 268 916. Dentre os números apresentados, o número

$$119\,268\,916 - 13 = 119\,268\,903$$

é o único divisível por 13.

35. ***Um bilhão*** – A opção correta é (e).

Arnaldo disse que 1 bilhão $= 1\,000\,000 \times 1\,000\,000 = 1\,000\,000\,000\,000 = 10^{12}$. O Professor Piraldo corrigiu-o, dizendo que 1 bilhão $= 1\,000 \times 1\,000\,000 = 1\,000\,000\,000 = 10^9$. A diferença é

$$1\,000\,000\,000\,000 - 1\,000\,000\,000 = 999\,000\,000\,000.$$

36. ***Energia de abelha*** – A opção correta é (b).

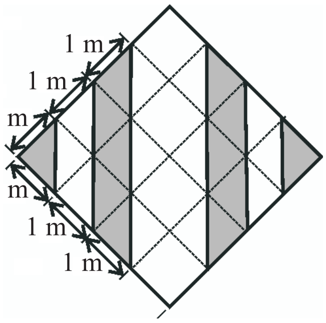
A energia gasta por uma abelha para voar 7 000 quilômetros é a mesma que 7 000 abelhas gastam para voar 1 quilômetro cada. Como o número de litros de mel foi multiplicado por 10, temos energia suficiente para que 10 vezes esse número de abelhas voem 1 quilômetro cada, ou seja, 70 000 abelhas.

37. ***Perda de safra*** – A opção correta é (a).

Como um quinto de 100 000 é $\frac{1}{5}\,100\,000 = 20\,000$ e um quarto de 100 000 é $\frac{1}{4}\,100\,000 = 25\,000$, concluímos que a perda da safra está avaliada entre 20 000 e 25 000 reais. Logo, um possível valor para a perda é de R$ 21 987,53.

38. ***Placa decorativa*** – A opção correta é (c).

Traçando paralelas aos lados, podemos dividir a placa em quadrados de 1 metro de lado, conforme indicado na figura. Então, a área pintada é igual a 12 metades desses quadrados, ou, equivalentemente, 6 desses quadrados. Como a placa total tem 16 desses quadrados, concluímos que a fração da área pintada em relação à área da placa é $\dfrac{6}{16} = \dfrac{3}{8}$.



39. ***O suco do Diamantino*** – A opção correta é (a).

O refresco é composto por 20% de um litro, ou seja, 0,2 litros de suco e por 80% de um litro, ou seja, 0,8 litros de água. Logo, a mistura final tem 0,2 litros de suco e $3 + 0{,}8 = 3{,}8$ litros de água. A porcentagem de suco em relação ao volume da mistura é, então,

$$\frac{\text{volume de suco}}{\text{volume total}} = \frac{0{,}2}{4} = \frac{2}{40} = \frac{5}{100} = 5\%.$$

40. ***Uma eleição*** – João recebeu 2/7 do total de votos, Rosa recebeu 2/5 do total de votos e Marcos recebeu $1 - \big(2/7 + 2/5\big) = 1 - 24/35 = 11/35$ do total de votos. O vencedor foi aquele que obteve a maior fração dos votos. Para comparar essas frações, igualamos seus denominadores, obtendo $2/7 = 10/35$ e $2/5 = 14/35$. Assim, temos

$$\underbrace{\frac{2}{7}}_{\text{João}} < \underbrace{\frac{11}{35}}_{\text{Marcos}} < \underbrace{\frac{2}{5}}_{\text{Rosa}},$$

e, portanto, Rosa venceu a eleição. (É interessante notar que a resposta não depende do número de alunos da turma.)

41. ***Soma de potências*** – A opção correta é (a).

Temos $2^6 + 2^6 + 2^6 + 2^6 - 4^4 = 4 \times 2^6 - 4^4$. Há várias maneiras de calcular isso.

Solução 1: $4 \times 2^6 - 4^4 = 4 \times (2^2)^3 - 4^4 = 4 \times 4^3 - 4^4 = 4^4 - 4^4 = 0.$

Solução 2: $4 \times 2^6 - 4^4 = 4\big(2^6 - 4^3\big) = 4\big[2^6 - (2^2)^3\big] = 4\big[2^6 - 2^6\big] = 0.$

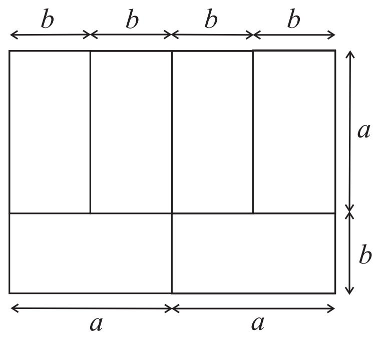
Solução 3: $4 \times 2^6 - 4^4 = 2^2 \times 2^6 - (2^2)^4 = 2^8 - 2^8 = 0.$

42. ***Seis retângulos*** – A opção correta é (e).

A partir da figura, vemos que o comprimento a dos retângulos menores é o dobro da sua largura b, isto é, $a = 2b$. Temos, então,

$$a + b = 2b + b = 3b = 21,$$

ou seja, $b = 7$ cm e $a = 14$ cm. Portanto, o comprimento do retângulo maior é $4b = 28$ e sua área é $21 \times 28 = 588$ cm^2.



43. ***Duas populações*** – A opção correta é (e).

Seja p a população de Tucupira há três anos. Como essa população cresceu 50%, atualmente Tucupira tem $p + 50\%$ de p habitantes, ou seja,

$$p + \frac{50}{100}p = p + 0{,}5\,p = 1{,}5\,p \quad \text{habitantes.}$$

Como a população de Pirajussaraí não cresceu nesses 3 anos e há 3 anos era igual à de Tucupira, podemos concluir que a população atual de Pirajussaraí é p. Como a soma das populações das duas cidades, hoje, é de 9 000, obtemos $p + 1{,}5\,p = 9\,000$, donde $p = 9\,000/2{,}5 = 3\,600$. Assim, a soma das duas populações, há três anos, era de $3\,600 \times 2 = 7\,200$ habitantes.

44. ***Três balanças*** – A opção correta é (d).

Na primeira balança temos $3\blacktriangle + 1\bullet = 6\blacksquare$. Na segunda, temos $2\blacktriangle + 4\bullet = 8\blacksquare$, o que é equivalente a $1\blacktriangle + 2\bullet = 4\blacksquare$. Logo, $(3\blacktriangle + 1\bullet) + (1\blacktriangle + 2\bullet) = 6\blacksquare + 4\blacksquare$, ou seja, $4\blacktriangle + 3\bullet = 10\blacksquare$. Assim, será necessário colocar 10 quadrados no prato direito da balança (3) para que ela fique equilibrada.

45. ***Poucos domingos*** – A opção correta é (c).

Um ano normal tem 365 dias e o ano bissexto 366. Da divisão de 365 por 7, obtemos $365 = 52 \times 7 + 1$ e da divisão de 366 por 7 obtemos $366 = 52 \times 7 + 2$. Logo,

$$\begin{aligned} \text{ano normal} &= 52 \text{ semanas} + 1 \text{ dia} \\ \text{ano bissexto} &= 52 \text{ semanas} + 2 \text{ dias} \end{aligned}$$

Portanto, um ano normal ou bissexto tem, no mínimo, 52 e, no máximo, 53 domingos (um domingo para cada uma das 52 semanas e, talvez, um outro domingo para o dia ou os dois dias que completam o ano).

Cada um dos 12 meses do ano tem, no mínimo, 28 dias e, no máximo, 31 dias, portanto, tem, no mínimo, 4 domingos e, no máximo, 5 domingos. Levando em conta que $12 \times 4 = 48$, concluímos que

i) Num ano de 52 domingos sobram ainda $52 - 48 = 4$ domingos. Cada um desses ficará num mês diferente, porque nenhum mês pode ter seis domingos; logo, temos quatro meses com 5 domingos.

ii) Analogamente, num ano com 53 domingos restam 5 domingos, que ficarão um em cada mês diferente. Portanto, nesse caso, teremos cinco meses com 5 domingos.

46. ***Metade de potência*** – A opção correta é (e).

Antes de dividir a expressão por 2, colocamos 2^{10} em evidência, obtendo $2^{12} + 3 \times 2^{10} = 2^{10}\big(2^2 + 3 \times 1\big) = 2^{10} \times 7$. Assim,

$$\frac{2^{12} + 3 \times 2^{10}}{2} = \frac{2^{10} \times 7}{2} = 2^9 \times 7.$$

47. ***Minutos demais*** – A opção correta é (d).

Dividindo 2 880 717 por 60, obtemos $2\,880\,717 = 48\,011 \times 60 + 57$. Isso significa que $2\,880\,717$ min $= 48\,011$ h $+ 57$ min. Podemos, então, escrever:

$$2\,880\,717 \text{ min} = \underbrace{48\,000 \text{ h}}_{2\,000 \text{ dias}} + 11 \text{ h} + 57 \text{ min}.$$

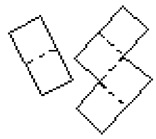
Os 2 000 dias não interferem no horário que estamos procurando, e como 18 horas e 27 minutos são exatamente 17 horas e 87 minutos, a resposta é 18h87min $-$ 11h57min $=$ 6h30min.

48. ***Dois ônibus*** – A opção correta é (b).

O número total de alunos nos dois ônibus é $57 + 31 = 88$ e $\frac{1}{2}\,88 = 44$. Para que cada ônibus tenha o mesmo número de alunos, $57 - 44 = 13$ alunos devem passar do primeiro para o segundo ônibus.

49. ***Cubo de papelão*** – A opção correta é (e).

Com as peças ilustradas ao lado podemos construir um cubo.



50. ***Algarismo das unidades*** – A opção correta é (c).

O último algarismo de um múltiplo de 5 é 0 ou 5; os que terminam em 0 são pares e os que terminam em 5 são ímpares. Como $1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 97 \times 99$ é ímpar, por ser um produto de números ímpares, e é um múltiplo de 5, segue que seu algarismo das unidades é 5.

51. ***Região sombreada*** – A opção correta é (b).

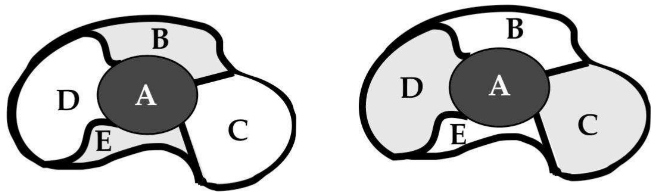
A parte sombreada consiste em 10 metades de quadrados mais 3 quadrados inteiros, o que equivale a $\frac{1}{2}\,10 + 3 = 5 + 3 = 8$ quadrados inteiros. Logo, a fração que representa a parte sombreada é

$$\frac{\text{área sombreada}}{\text{área total}} = \frac{\text{área de 8 quadrados}}{\text{área de 18 quadrados}} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}\,.$$

52. ***Colorindo um mapa*** – A opção correta é (b).

O estado A pode ser pintado de três formas: verde, azul ou amarelo. Para qualquer estado vizinho, por exemplo, o estado B, temos duas possibilidades, e os demais estados têm suas cores determinadas. Logo, podemos colorir o mapa de $3 \times 2 = 6$ formas.

Abaixo ilustramos duas dessas maneiras de pintar o mapa; em ambas, o estado A tem a mesma cor.



53. ***Pintando um tabuleiro*** – A opção correta é (c).

Para satisfazer as condições do problema, as cinco casas das diagonais, marcadas com *, devem ter cores diferentes. Por isso, precisaremos de, no mínimo, cinco cores distintas. Denotemos essas cinco cores distintas por 1, 2, 3, 4 e 5 e vamos determinar como podemos escolher as cores para as quatro casas restantes de modo a satisfazer as condições pedidas. Uma maneira é dada à direita, a seguir.

*		*
	*	
*		*

1		4
	3	
2		5

$\rightarrow$

1	2	4
4	3	1
2	4	5

Logo, é possível pintar as quatro casas restantes sem utilizar mais cores. Assim, bastam cinco cores. A seguir, mostramos outras três maneiras de colorir as casas.

2		3
	1	
5		4

$\rightarrow$

2	4	3
4	1	2
5	2	4

1		2
	4	
3		5

$\rightarrow$

1	3	2
2	4	1
3	2	5

1		5
	2	
4		3

$\rightarrow$

1	3	5
3	2	4
4	1	2

54. ***Número X, Y*** – Temos $X{,}Y = X + \dfrac{Y}{10} = \dfrac{10X+Y}{10}$ e sabemos que

$$\frac{10X+Y}{10} = X, Y = \frac{3}{10}(X+Y).$$

Logo, $10X + Y = 3X + 3Y$, ou seja, $7X = 2Y$. Concluímos que $2Y$ é múltiplo de 7 e, como Y é um número inteiro entre 1 e 9, só temos a possibilidade $Y = 7$, donde $X = 2$. Assim, o número é 2,7.

55. ***Construção de casas*** – Como as casas são vizinhas, podemos pensar nelas como uma fila de casas com seis posições. Vamos dividir a contagem em casos, de acordo com o número de casas de madeira que podem ser construídas.

(a) Nenhuma casa de madeira: aqui há apenas uma maneira de construir as casas, ou seja, todas de alvenaria.

(b) Uma casa de madeira: aqui temos seis maneiras de construir as casas, pois a casa de madeira pode ser qualquer uma delas, sendo as outras de alvenaria.

(c) Duas casas de madeira: as casas de madeira podem ocupar as seguintes posições: 1 e 3, 1 e 4, 1 e 5, 1 e 6, 2 e 4, 2 e 5, 2 e 6, 3 e 5, 3 e 6 ou 4 e 6. Aqui temos 10 maneiras.

(d) Três casas de madeira: as casas de madeira podem ocupar as seguintes posições: 1, 3 e 5; 1, 3 e 6; 1, 4 e 6; 2, 4 e 6. Aqui temos quatro maneiras.

(e) Quatro ou mais casas de madeira: impossível, pois é fácil ver que, nesse caso, sempre teremos duas casas de madeira contíguas.

Dessa forma, há $1+6+10+4=21$ maneiras de planejar a construção.

56. ***Comparação de grandezas*** – A opção correta é (c).

Temos $1\,000+0{,}01=1\,000{,}01$ e $1\,000\times 0{,}01=1\,000\times\dfrac{1}{100}=10$, bem como

$$\frac{1\,000}{0{,}01}=\frac{1\,000}{\frac{1}{100}}=1\,000\times 100=100\,000$$

e $0{,}01/1\,000=0{,}00001$. Finalmente, $1\,000-0{,}01$ é menor do que $1\,000$ (não sendo preciso efetuar o cálculo para obter esta conclusão), de modo que o maior desses números é $1\,000/0{,}01$.

57. ***Maior número de seis algarismos*** – A opção correta é (c).

Solução 1: Para que seja o maior possível, o número deve começar com o maior algarismo. Para termos seis algarismos sem mudar a ordem, o maior é 8 e, depois, 7. Agora faltam quatro algarismos para completar o número, portanto, escolhemos 9 103. Logo, o número é 879 103.

Solução 2: As opções D e E não servem, pois a ordem foi alterada. Como nas opções A, B e C não foi alterada, basta escolher o maior número dentre essas opções, que é C.

58. ***Qual é o numerador?*** – A opção correta é (a).

Como $\dfrac{1}{6}=\dfrac{4}{24}$ e $\dfrac{1}{4}=\dfrac{6}{24}$, então n só pode ser igual a 5.

59. ***Correndo menos*** – A opção correta é (a).

Solução 1: A distância percorrida é $d=10\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}\times 6\,\text{min}=10\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}\times 6\times\dfrac{1}{60}\,\text{h}=1\,\text{km}.$

Percorrendo essa mesma distância de 1 km em 8 minutos, a velocidade será

$$v=\frac{1\,\text{km}}{8\,\text{min}}=\frac{1\,\text{km}}{8\times\frac{1}{60}\,\text{h}}=\frac{60}{8}\,\text{km/h}=\frac{15}{2}\,\text{km/h}=7{,}5\,\text{km/h}\,.$$

Solução 2: Podemos usar diretamente a regra de três, como segue.

Velocidade em km/h		Tempo em horas
10	$\longrightarrow$	$\dfrac{6}{60}$
x	$\longrightarrow$	$\dfrac{8}{60}$

Velocidade e tempo são grandezas inversamente proporcionais (aumentando a velocidade, diminui o tempo), logo $x/10 = \left(\frac{6}{60}\right)/\left(\frac{8}{60}\right) = 6/8$, portanto, $x = 60/8$, ou seja, a velocidade será

$$x = \frac{60}{8}\,\text{km/h} = \frac{15}{2}\,\text{km/h} = 7{,}5\,\text{km/h}\,.$$

60. ***Cinco vizinhas*** – *"Heloísa chega a seu andar depois de Elza, mas antes de Cláudia"* significa que Heloísa mora acima de Elza e abaixo de Cláudia e *"Quando Sueli chega ao seu andar, Heloísa ainda tem 2 andares para subir, e o mesmo ocorre a Patrícia quando Elza chega ao seu andar"* significa que Heloísa mora dois andares acima de Sueli e Patrícia dois andares acima de Elza. Entretanto, como Sueli não mora no primeiro andar e Heloísa mora dois andares acima de Sueli, ou Sueli mora no segundo e Heloísa no quarto ou Sueli mora no terceiro e Heloísa no quinto. Mas Cláudia mora acima de Heloísa, portanto Heloísa não pode morar no último andar, o quinto. Assim, Sueli mora no segundo andar, Heloísa no quarto e Cláudia no quinto. Finalmente, Patrícia mora dois andares acima de Elza, logo Elza mora no primeiro andar e Patrícia no quarto andar.

5º andar	Cláudia
4º andar	Heloísa
3º andar	Patrícia
2º andar	Sueli
1º andar	Elza

61. ***Potências de* 9** – A opção correta é (d).

$$9^{20} + 9^{20} + 9^{20} = 3 \times 9^{20} = 3 \times \left(3^2\right)^{20} = 3 \times 3^{40} = 3^{41}.$$

62. ***Dois números*** – A opção correta é (c).

Como a diferença é 989 e o menor número tem dois algarismos (sendo, portanto, maior do que 9), o número de três algarismos deve ser maior do que $989 + 9 = 998$, de modo que a única opção é 999. Assim, o número de dois algarismos é 10 e a soma dos dois é $999 + 10 = 1\,009$.

63. ***Menor natural*** – A opção correta é (d).

Observe que $10^n - 1$ é um número que tem todos os seus algarismos iguais a 9. Note, também, que um múltiplo de 37, da forma $37 \times n$, só termina em 9 se n terminar em 7. Então, os menores múltiplos de 37 terminados em 9 são $37 \times 7 = 259$, $37 \times 17 = 629$ e $37 \times 27 = 999$. Como $999 = 10^3 - 1$, segue que $n = 3$.

64. ***Imunes à gripes*** – A opção correta é (a).

Contraíram a gripe 0,15% de 14 000 000, ou seja,

$$\frac{0{,}15}{100} \times 140\,000\,000 = 0{,}0015 \times 14\,000\,000 = 21\,000$$

pessoas. Portanto, não contraíram a gripe $14\,000\,000 - 21\,000 = 13\,979\,000$ pessoas.

65. ***O código secreto*** – A opção correta é (b).

O código só pode ser formado com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, e 9.

Da primeira informação temos que 1, 2 e 3 não fazem parte do código (números que não fazem parte estão sublinhados nas tabelas). Da terceira informação, concluímos que 6 faz parte do código, e sua posição é ___6___ ou ___ ___6.

$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{3}$
4	5	**6**
6	$\underline{1}$	$\underline{2}$
5	4	7
8	4	$\underline{3}$

Da segunda informação segue que 4 e 5 não fazem parte do código e a posição do 6 no código é ___ ___6. Da última informação só temos que o código é da forma 8 ___6. Com a quarta informação completamos o código: 876.

$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{3}$
$\underline{4}$	$\underline{5}$	**6**
6	$\underline{1}$	$\underline{2}$
$\underline{5}$	$\underline{4}$	7
8	$\underline{4}$	$\underline{3}$

66. ***Parênteses, colchetes e chaves*** – A opção correta é (e).

As ordens de prioridade para resolver uma expressão são

$$\underbrace{\text{parênteses}}_{1^{\underline{o}}} \to \underbrace{\text{colchete}}_{2^{\underline{o}}} \to \underbrace{\text{chaves}}_{3^{\underline{o}}}$$

e

$$\underbrace{\text{multiplicações e divisões}}_{1^{\underline{o}}} \to \underbrace{\text{somas e subtrações}}_{2^{\underline{o}}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 2-2\left\{2-2\left[2-2(\underbrace{4-2}_{2})\right]\right\} &= 2-2\left\{2-2\left[2-\underbrace{2\times 2}_{4}\right]\right\} \\ &= 2-2\left\{2-2\left[\underbrace{2-4}_{-2}\right]\right\} = 2-2\left\{2-\underbrace{2\times(-2)}_{-4}\right\} \\ &= 2-2\{2-(-4)\} = 2-2\{\underbrace{2+4}_{6}\} = 2-\underbrace{2\times 6}_{12} = 2-12 = -10. \end{aligned}$$

67. ***Ordenando frações*** – A opção correta é (a).

Solução 1: O mínimo múltiplo comum (MMC) dos denominadores é 30. Reduzindo todas as frações a esse denominador comum, temos

$$\frac{4}{3}=\frac{40}{30},\quad \frac{4}{5}=\frac{24}{30},\quad \frac{4}{6}=\frac{20}{30},\quad \frac{3}{5}=\frac{18}{30},\quad \frac{6}{5}=\frac{36}{30}\quad \text{e}\quad \frac{2}{5}=\frac{12}{30}.$$

Ordenando,

$$\frac{12}{30}<\frac{18}{30}<\frac{20}{30}<\frac{24}{30}<\frac{36}{30}<\frac{40}{30}.$$

Concluímos que

$$\frac{2}{5}<\frac{3}{5}<\frac{4}{6}<\frac{4}{5}<\frac{6}{5}<\frac{4}{3}.$$

Solução 2: Escrevendo as frações na forma decimal, temos

$$\frac{4}{3}=1{,}33\ldots,\quad \frac{4}{5}=0{,}8,\quad \frac{4}{6}=0{,}66\ldots,\quad \frac{3}{5}=0{,}6,\quad \frac{6}{5}=1{,}2 \quad \text{e} \quad \frac{2}{5}=0{,}4.$$

Logo,

$$\underbrace{\frac{2}{5}}_{0,4}<\underbrace{\frac{3}{5}}_{0,6}<\underbrace{\frac{4}{6}}_{0,66...}<\underbrace{\frac{4}{5}}_{0,8}<\underbrace{\frac{6}{5}}_{1,2}<\underbrace{\frac{4}{3}}_{1,33...}.$$

68. ***Números de três algarismos*** – A opção correta é (e).

Por serem maiores do que 200, seus algarismos das centenas só podem ser 3 ou 5.

Começando com 3, temos 315 e 351 (que não repetem algarismos) e 311, 313, 331, 335, 353, 333 e 355 (repetindo algarismos), ou seja, nove números.

Começando com 5, basta trocar o 3 com o 5 nos números acima. Logo, temos 9 desses números. Assim, temos um total de 18 números que podem ser escritos usando apenas os algarismos 1, 3 e 5.

69. ***Velocidade de maratona*** – A opção correta é (d).

O tempo que o vencedor gastou foi de

$$13\text{h}45\text{min} - 11\text{h}330\text{min} = 2\text{h}15\text{min} = 2+\frac{1}{4}\ \text{h} = \frac{9}{4}\ \text{h}.$$

Logo, a velocidade média, em km/h, é

$$\frac{\text{espaço percorrido em km}}{\text{tempo gasto em horas}} = \frac{42}{\frac{9}{4}} = \frac{168}{9} = 18{,}6\ \text{km/h}.$$

70. ***Bilhetinhos com números*** – A opção correta é (c).

Se todas as alunas escrevessem o número 1, o produto seria 1, que não está entre as opções. Logo, 2 ou 4 são fatores do produto e, por isso, o produto deve ser uma potência de 2. O maior produto possível seria obtido no caso em que todas as 5 alunas escrevessem o número 4, e o produto seria

$$4\times4\times4\times4\times4 = 4^5 = 2^{10} = 1\,024.$$

Logo, podemos eliminar 2 048. Agora temos que:

- 100 e 120 são divisíveis por 5, logo não são potências de 2;
- 768 é divisível por 3 $(7+6+8=21)$, logo não é potência de 2.

A única resposta possível é $256=2^8$. Seria, por exemplo, o caso em que duas alunas escrevessem o número 2 e três escrevessem o número 4, com $256=2\times2\times4\times4\times4$.

71. ***Produto de frações*** – A opção correta é (d).

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

72. ***Produto máximo*** – A opção correta é (a).

Basta examinar os produtos dos números naturais cuja soma é 11.

$$\begin{array}{lcllcl} 11=1+10 & \text{e} & 1\times 10=10 & 11=2+9 & \text{e} & 2\times 9=18 \\ 11=3+8 & \text{e} & 3\times 8=24 & 11=4+7 & \text{e} & 4\times 7=28 \\ 11=5+6 & \text{e} & 5\times 6=\mathbf{30} & & & \end{array}$$

73. ***Quem é o cubo?*** – A opção correta é (c).

Temos $3^m = 81 = 3^4$, donde $m = 4$. Logo, $m^3 = 4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$.

74. ***Qual é o maior?*** – A opção correta é (c).

Somando 3 a todos os membros, obtemos $a-1+3 = b+2+3 = c-3+3 = d+4+3$, de modo que $a+2 = b+5 = c = d+7$, mostrando que c é o maior dos números.

75. ***Quatro formiguinhas*** – A opção correta é (b).

O trajeto de Biloca é 3 diagonais + 4 larguras + 2 comprimentos. O trajeto de Pipoca de 25 dm compreende 5 diagonais, logo o comprimento de uma diagonal é $25 \div 5 =$ 5 dm. O trajeto de Tonica de 37 dm compreende 5 diagonais mais 4 larguras da lajota, ou seja, 25 + 4 larguras = 37, donde 4 larguras = 37 − 25 = 12 dm e a largura de uma lajota é 3 dm. O trajeto de Cotinha de 32 dm compreende 5 comprimentos + 4 larguras, ou seja, 5 comprimentos + 12 = 32, donde 5 comprimentos = 32 − 12 = 20 e o comprimento de uma lajota é 4 dm. Assim, Biloca percorre

$$\underbrace{3 \text{ diagonais}}_{3\times 5} + \underbrace{4 \text{ larguras}}_{4\times 3} + \underbrace{2 \text{ comprimentos}}_{2\times 4} = 15+12+8 = 35 \text{ dm}.$$

76. ***Trocando figurinhas*** – A *moeda de troca* de Guilherme são as figurinhas de aranha, portanto calculamos o *valor-aranha* das figurinhas que Célia quer trocar, usando as informações dadas.

- $4 \text{ borboleta} \overset{(a)}{=} \underbrace{12 \text{ tubarão}}_{4\times 3} \overset{(e)}{=} \underbrace{24 \text{ periquito}}_{12\times 2} \overset{(d)}{=} \underbrace{72 \text{ aranha}}_{24\times 3}$
- $5 \text{ tubarão} \overset{(e)}{=} \underbrace{10 \text{ periquito}}_{5\times 2} \overset{(d)}{=} \underbrace{30 \text{ aranha}}_{10\times 3}$
- $6 \text{ macaco} \overset{(c)}{=} \underbrace{24 \text{ aranha}}_{6\times 4}$
- $3 \text{ cobra} \overset{(b)}{=} \underbrace{9 \text{ periquito}}_{3\times 3} \overset{(d)}{=} \underbrace{27 \text{ aranha}}_{9\times 3}$
- $6 \text{ periquito} \overset{(d)}{=} \underbrace{18 \text{ aranha}}_{6\times 3}$

Logo, Célia receberá $72+30+24+27+18 = 171$ figurinhas de aranha.

77. ***Soma de frações*** – A opção correta é (d).

$$\frac{10+20+30+40}{10} + \frac{10}{10+20+30+40} = \frac{100}{10} + \frac{10}{100} = 10 + 0{,}1 = 10{,}1$$

78. ***Geometria com palitos*** – A opção correta é (c).

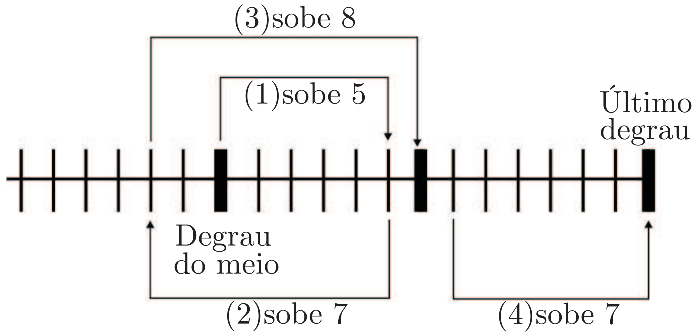
Para o triângulo foram usados $6 \times 3 = 18$ palitos, sobrando, então, $60 - 18 = 42$ palitos para formar os três lados do retângulo. Da figura, temos que a largura do retângulo é formada por seis palitos, logo o comprimento é formado por $\frac{1}{2}(42-6) = 18$ palitos. Como cada palito tem 5 cm de comprimento, a área do retângulo é dada por $\underbrace{6 \times 5}_{\text{largura}} \times \underbrace{18 \times 5}_{\text{comprimento}} = 30 \times 90 = 2\,700 \text{ cm}^3$.

79. ***Um incêndio e o bombeiro*** – A opção correta é (c).

O sobe-desce do bombeiro a partir do degrau do meio até chegar ao último degrau é dado por

$$\overbrace{+5}^{\text{sobe}} \quad \underbrace{-7}_{\text{desce}} \quad \overbrace{+8}^{\text{sobe}} \quad \overbrace{+7}^{\text{sobe}},$$

de modo que o bombeiro sobe $8 + 5 = 13$ degraus acima do degrau do meio, chegando ao último degrau da escada. Portanto, a escada tem 13 degraus acima do degrau do meio, e igualmente 13 degraus abaixo do degrau do meio. Portanto, a escada tem $13 + 1 + 13 = 27$ degraus. Veja um esquema da movimentação do bombeiro.



80. ***Árvore genealógica*** – A opção correta é (c).

Na figura vemos que o pai de Evaristo é José. O irmão de José é Jean. O pai de Jean é Luís. O irmão de Luís é André.

- irmão do $\underbrace{\text{pai de Evaristo}}_{\text{José}}$ = irmão de José = Jean
- pai do $\underbrace{\text{irmão do } \underbrace{\text{pai de Evaristo}}_{\text{José}}}_{\text{Jean}}$ = pai de Jean = Luís
- irmão do $\underbrace{\text{pai do } \underbrace{\text{irmão do } \underbrace{\text{pai de Evaristo}}_{\text{José}}}_{\text{Jean}}}_{\text{Luís}}$ = irmão de Luís = André

81. ***Colcha quadrada*** – A opção correta é (b).

A colcha é formada de $5 \times 5 = 25$ quadradinhos, todos iguais. Já os triângulos são de dois tipos, o tipo I, que corresponde a meio quadrado e o tipo II, que corresponde a 1/4 de um quadradinho. A parte em cinza é composta de 8 triângulos do tipo I, 8 triângulos do tipo II e 4 quadrados, ou seja,

$$\underbrace{\text{8 triângulos tipo I}}_{\text{4 quadrados}} + \underbrace{\text{8 triângulos tipo II}}_{\text{2 quadrados}} + 4 \text{ quadrados} = 10 \text{ quadrados.}$$

Logo, a fração correspondente à parte cinza é $\dfrac{10}{25} = \dfrac{40}{100} = 40\%$.

82. ***Falsas igualdades*** – A opção correta é (e).

Nenhuma igualdade está correta.

(i) Errada: $3 \times 10^6 + 5 \times 10^2 = 3\,000\,000 + 500 = 3\,000\,500 \neq 8 \times 10^8$.

(ii) Errada: $2^3 + 2^{-3} = 2^3 + \dfrac{1}{2^3} = 8 + \dfrac{1}{8} \neq 1 = 2^0$.

(iii) Errada, a multiplicação precede a soma: $5 \times 8 + 7 = 40 + 7 = 47 \neq 75$.

(iv) Errada, a divisão precede a soma: $5 + 5 \div 5 = 5 + 1 = 6 \neq 2$.

83. ***Menor valor da soma*** – A opção correta é (c).

Seja N o número dado por $N = 3a = 4b = 7c$. Então, o número N é um múltiplo de 3, 4 e 7. Portanto, quando fatoramos o número N em fatores primos, aparecem, pelo menos, os fatores 2, 3 e 7, o primeiro dos quais com expoente, no mínimo, igual a 2. Segue que N é um múltiplo de $2^2 \times 3 \times 7 = 84$. Por outro lado, os números $a = 4 \times 7 = 28$, $b = 3 \times 7 = 21$ e $c = 4 \times 3 = 12$ satisfazem as igualdades $3a = 4b = 7c$. Logo, $a = 28$, $b = 21$ e $c = 12$ são os menores valores possíveis para a, b e c e $28 + 21 + 12 = 61$ é o menor valor possível para $a + b + c$.

84. ***Procurando um quadrado perfeito*** – A opção correta é (d).

Fatorando 120 obtemos $120 = 2^3 \times 3 \times 5$. Para obter um quadrado perfeito, todos os expoentes dessa decomposição devem ser pares, logo basta multiplicar 120 por

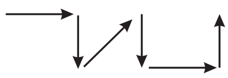
$$2 \times 3 \times 5 = 30.$$

De fato, temos, $120 \times 30 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2 = (2^2 \times 3 \times 5)^2 = 60^2$.

85. ***Visitas num museu*** – A opção correta é (c).

Observe que os únicos algarismos que não aparecem no número $1\,879\,564$ são 0, 2 e 3. O próximo número com todos os algarismos distintos ocorrerá quando mudar o algarismo das centenas e tivermos $1\,879\,6\_\ \_$. Logo, o menor número será $1\,879\,602$ e ainda faltam $1\,879\,602 - 1\,879\,564 = 38$ visitantes.

86. ***Ligando números por flechas*** – A opção correta é (e).

O caminho-padrão é o que se repete, a saber, , formado por seis flechas, sempre começando nos múltiplos de 6, ou seja, em 0, 6, 12, etc. Vamos averiguar qual é a posição de 1 997 em relação ao múltiplo de 6 mais próximo. Dividindo 1 997 por 6, obtemos $1\,997 = 6 \times 332 + 5$, correspondendo a 336 caminhos-padrão mais o resto de 5 flechas. Portanto, 1 998 é múltiplo de 6 mais próximo de 1 997, ocupando a primeira posição no caminho-padrão. Assim,

$$\begin{tikzcd} 1998 \arrow[r] & 1999 \arrow[d] \\ 1997 \arrow[u] & 2000 \end{tikzcd}$$

é o caminho que ocorre entre 1 997 e 2 000.

87. ***Múltiplos de* 9** – Um número só é um múltiplo de 9 se a soma dos seus algarismos for um múltiplo de 9.

    (a) O número deve ter 9 algarismos iguais a 1, ou seja, 111 111 111.

    (b) Devemos usar o maior número possível de algarismos iguais a 2, todos ficando nas casas mais à direita. Assim, o menor número é 12 222.

88. ***A florista*** – Se a florista vender as flores sem desidratá-las, ela vai apurar um total de $49 \times 1{,}25 = 61{,}25$ reais. O peso das flores depois da desidratação é

$$\left(1 - \frac{5}{7}\right) \times 49 = \frac{2}{7} \times 49 = 14 \text{ kg}.$$

Logo, vendendo as flores desidratadas, ela apura um total de $14 \times 3{,}25 = 45{,}50$ reais. Assim, a florista ganha mais no processo sem a desidratação.

89. ***Divisores*** – Como 2, 3, 5 e 7 são primos, os divisores do número $N = 2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d$ são os números da forma $2^m \times 3^n \times 5^p \times 7^q$, com $0 \leq m \leq a$, $0 \leq n \leq b$, $0 \leq p \leq c$ e $0 \leq q \leq d$. Portanto, N tem $(a+1) \times (b+1) \times (c+1) \times (d+1)$ divisores. Decompondo 378 em fatores primos, encontramos $378 = 2 \times 3^3 \times 7$, portanto queremos a, b, c e d tais que

$$(a+1) \times (b+1) \times (c+1) \times (d+1) = 2 \times 3^3 \times 7.$$

Por outro lado, para N ser mínimo, os expoentes devem ser ordenados do maior para o menor, isto é, $a \geq b \geq c \geq d$.

Afirmamos que $d > 0$, pois se $d = 0$ então $a+1$, $b+1$ ou $c+1$ tem dois fatores maiores do que 1. Se $a + 1 = mn$, com $m \geq n > 1$, temos que

$$2^a = 2^{mn-1} = 2^{m-1}2^{mn-m} = 2^{m-1}(2^m)^{n-1} \geq 2^{m-1}8^{n-1} > 2^{m-1}7^{n-1},$$

onde na penúltima desigualdade usamos o fato que $m \geq 3$. Assim, temos que

$$2^a 3^b 5^c 7^d > 2^{m-1} 3^b 5^c 7^{n-1}$$

e, portanto, encontramos um número com a mesma quantidade de divisores, mas menor. O argumento é igual no caso em que $b + 1$ ou $c + 1$ tem dois fatores. Assim, $d \geq 1$ e restam somente as possibilidades dadas na tabela seguinte.

a	b	c	d	$(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)=378$
20	2	2	1	$21\times 3\times 3\times 2$
13	2	2	2	$14\times 3\times 3\times 3$
8	6	2	1	$9\times 7\times 3\times 2$
6	5	2	2	$7\times 6\times 3\times 3$

Por último, como

$$\frac{2^{20}\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^1}{2^{13}\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2}=\frac{2^7}{7}>1,\qquad \frac{2^{13}\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2}{2^{8}\cdot 3^6\cdot 5^2\cdot 7^1}=\frac{2^5\cdot 7}{3^4}>1$$

e

$$\frac{2^{8}\cdot 3^6\cdot 5^2\cdot 7^1}{2^{6}\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7^2}=\frac{2^2\cdot 3}{7}>1,$$

temos que o valor de N é $2^6\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7^2$. Portanto, $a=6, b=5, c=2$ e $d=2$.

90. ***O produto dos algarismos***

(a) Como $12=2\times 6=4\times 3=2\times 2\times 3$, devemos utilizar os algarismos 1, 2, 3, 4 e 6 cujos produtos sejam 12. Assim, temos:

- números com 2 algarismos: 26, 62, 34 e 43;
- números com 3 algarismos:
  - com os algarismos 1, 2 e 6: 126, 162, 216, 261, 612 e 621;
  - com os algarismos 1, 3 e 4: 134, 143, 314, 341, 413 e 431;
  - com os algarismos 2, 2 e 3: 223, 232 e 322.

(b) Se $P(n)=0$, então o produto de seus algarismos é igual a zero e, portanto, pelo menos um dos algarismos do número n é zero. De 1 a 199 temos 18 números com zero só nas unidades, 9 números com zero só nas dezenas e ainda o número 100, totalizando 28 números:

$$\underbrace{10,\ 20,\ldots,\ 90,\ 110,\ldots,\ 190}_{\text{0 só nas unidades}},\ \underbrace{101,\ 102,\ldots,\ 109}_{\text{0 só nas dezenas}}.$$

(c) Queremos encontrar os inteiros positivos menores do que 200, cujo produto dos algarismos seja maior do que 37 e menor do que 45. Por exemplo, 58 é um desses números, porque $5\times 8=40$. Em primeiro lugar, note que não existem números cujo produto dos algarismos seja 38, 39, 41, 43 e 44, porque esses números possuem um fator primo maior do que 10 e, portanto, não podem ser escritos como produto de dois ou três algarismos. Logo, restam apenas 40 e 42. Assim, os números menores do que 200 cujo produto dos algarismos

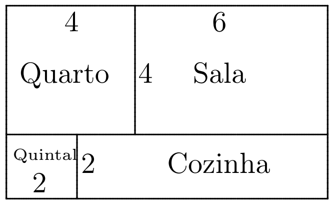
- é 40 são 58, 85, 158 e 185;
- é 42 são 67, 76, 167 e 176.

(d) O valor de $P(n)$ é o maior possível quando $n=99$ ou $n=199$, quando

$$P(99)=P(199)=81.$$

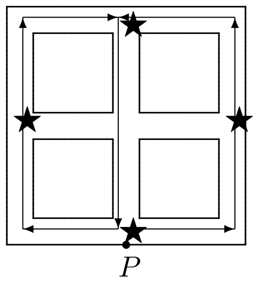
91. ***Suco de laranja*** – Se Davi comprar seis garrafas individualmente, ele gastará $6 \times 2{,}80 = 16{,}80$ reais, que é um valor maior do que o preço de uma caixa com seis. Portanto, ele deve comprar a maior quantidade possível de caixas. Nesse caso, como $22 = 3 \times 6 + 4$, ele deve comprar três caixas e quatro garrafas individualmente, caso em que gastará $3 \times 15 + 4 \times 2{,}80 = 56{,}20$ reais, que é o mínimo possível.

92. ***A casa da Rosa*** – Como o quarto é quadrado, com uma área de 16 m^2, suas dimensões são 4×4 m. Da mesma forma, as dimensões do quintal quadrado são 2×2 m. A sala tem uma área de 24 m^2 e uma dimensão igual à do quarto; portanto, as dimensões da sala são 6×4 m. Assim, as dimensões totais da casa são 10×6 m e a área total da casa é de 60 m^2. Logo, a cozinha tem uma área de



$$60 - 16 - 24 - 4 = 16 \ \mathrm{m}^2.$$

93. ***O passeio do Matias*** – Observe que há 12 ruas, ou seja, lados de 100 metros, entre os quatro quarteirões. Também há quatro esquinas, marcadas com ★ na figura, em que se encontram três ruas. Sempre que Matias passar por uma dessas quatro esquinas, usará duas dessas três ruas. Assim, pela regra que ele mesmo se impôs, quando voltar a passar numa dessas quatro esquinas, termina o passeio. Portanto, em todo caminho que percorrer, há, pelo menos, duas dentre essas quatro esquinas ★ em que não usou todas as ruas que chegam a essas esquinas. Assim, o caminho de comprimento máximo usa no máximo 10 ruas, ou seja, tem um total de 1 000 m. Na figura desenhamos um dos trajetos máximos.



94. ***O adesivo oficial*** – Como o quadrado pintado da cor azul pode estar em qualquer lugar, temos seis possíveis formas de escolher a posição desse quadrado. Entre os cinco quadrados restantes, precisamos pintar dois de amarelo, o que podemos fazer de 10 maneiras. Os três quadrados restantes são pintados de verde. Portanto, o prefeito tem $6 \times 10 = 60$ formas diferentes de escolher o adesivo.

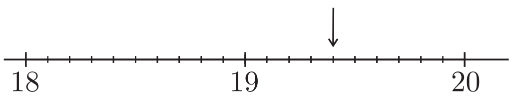
95. ***Adição de números*** – Efetuando a adição

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1\,1} \\ a\;000 \\ a\;998 \\ +\,a\;999 \\ \hline \square\;997 \end{array}$$

encontramos $\square\ 997 = 22\,997$, onde $\square = a + a + a + 1$. Logo, $22 = a + a + a + 1$ e, portanto, $a = 7$.

96. ***Cubo perfeito e divisibilidade*** – Um cubo perfeito é um número da forma a^3, onde a é um natural. Como $9^4 = (3^2)^4 = 3^8$, os cubos perfeitos que dividem 3^8 são 1, 3^3 e $(3^2)^3 = 3^6$.

97. ***Localização de um ponto*** – O ponto indicado está quatro marcas à direita de 19. Entre 19 e 20 aparecem subdivisões em 10 partes iguais, portanto, cada marca equivale a 0,1 nessa escala. Assim, o ponto indicado é 19,4.



98. ***Cálculo de porcentagem*** – Temos 58 acertos em 84 questões, portanto, a razão de acertos é $\frac{58}{84}$. Dividindo 58 por 84, encontramos, aproximadamente, 0,69047 em 1, ou 69,047 em 100. Logo, o percentual é, aproximadamente, 69,047%.

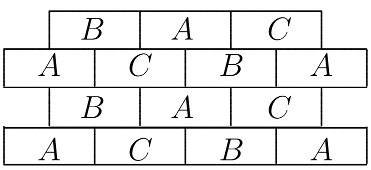
99. ***Comparação de algarismos*** – Os números que estamos procurando são maiores do que 400 e menores do que 600, portanto, o algarismo das centenas só pode ser 4 ou 5. Como são números ascendentes, o algarismo das dezenas é menor do que o algarismo das unidades. Vejamos como escolher os algarismos das dezenas e das centenas.

$$4\left\{\begin{array}{l}5\,6\\5\,7\\5\,8\\5\,9\end{array}\right. \quad ; \quad 4\left\{\begin{array}{l}6\,7\\6\,8\\6\,9\end{array}\right. \quad ; \quad 4\left\{\begin{array}{l}7\,8\\7\,9\end{array}\right. \quad ; \quad 4\left\{\,8\,9\right.$$

$$5\left\{\begin{array}{l}6\,7\\6\,8\\6\,9\end{array}\right. \quad ; \quad 5\left\{\begin{array}{l}7\,8\\7\,9\end{array}\right. \quad ; \quad 5\left\{\,8\,9\right.$$

Logo, temos 10 números ascendentes com algarismo das centenas igual a 4 e seis números ascendentes com algarismo das centenas igual a 5. Assim, temos 16 números ascendentes entre 400 e 600.

100. ***Muro colorido*** – Observamos que no momento em que escolhermos a cor de dois tijolos vizinhos, a cor de todos os demais tijolos estará decidida.



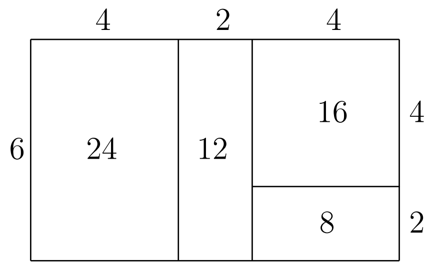
Assim, denotando os tijolos de acordo com uma de suas três cores A, B ou C, e seguindo a exigência de não ter tijolos de mesma cor se tocando, obtemos uma distribuição como a da figura. Como a maior quantidade de tijolos está marcada com A, num total de seis, e os tijolos amarelos são os mais baratos, devemos escolher tais tijolos amarelos. Por outro lado, temos a mesma quantidade de tijolos B e C, quatro de cada tipo, portanto, podemos escolher quatro tijolos azuis e quatro vermelhos. Assim, o menor valor a ser pago na compra dos tijolos desse muro é $6 \times 6 + 4 \times 7 + 4 \times 8 = 96$ reais.

101. ***Divisores e fatoração*** – Como o produto dos dois fatores é 96, eles são divisores de 96. Decompondo 96 em fatores primos, encontramos $96 = 2^5 \times 3$, portanto, seus divisores são $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 16,\ 24,\ 32,\ 48$ e 96.

Os divisores 96, 48, 32, 24 e 16 não servem, pois seus quadrados já são maiores do que 208, sobrando 1, 2, 3, 4, 6, 8 e 12, cujos quadrados são $1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 36,\ 64$ e 144.

Agora é fácil ver que a única possibilidade é $64 + 144 = 208$. Como $8 \times 12 = 96$, os números são 8 e 12.

102. ***O retângulo do Luís*** – Faremos a divisão com retângulos. Observamos que $24 = 6 \times 4$ e $12 = 6 \times 2$, portanto, Luís pode fazer um primeiro corte a 4 cm no lado de 10 cm e outro corte a 2 cm do corte anterior. Depois desses cortes, resta um retângulo de tamanho 6×4. Por último, como $16 = 4 \times 4$, basta fazer mais um corte a 4 cm no lado que mede 6 cm. Os cortes estão ilustrados na figura seguinte, com indicação das dimensões dos lados e das áreas.



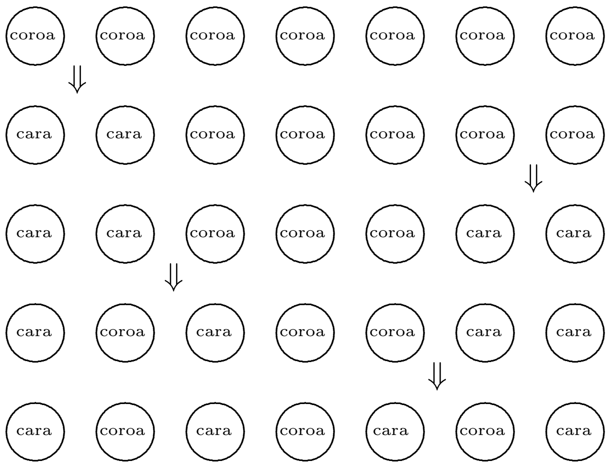
103. ***Comparação de números*** – Fatorando os números e extraindo as raízes, obtemos

$$\begin{aligned} \sqrt{121} &= \sqrt{11^2} &&= 11, \\ \sqrt[3]{729} &= \sqrt[3]{9^3} &&= 9 \text{ e} \\ \sqrt[4]{38\,416} &= \sqrt[4]{2^4 \times 7^4} &&= 2 \times 7 = 14\,. \end{aligned}$$

Logo, em ordem crescente, temos $\sqrt[3]{729}$, $\sqrt{121}$ e $\sqrt[4]{38\,416}$.

104. ***As moedas*** – Atribuindo o valor 1 às coroas e -1 às caras e somando os resultados depois de cada jogada, inicialmente a brincadeira começa com soma 7 e queremos chegar a cara e coroa alternadas, de modo que a brincadeira termina em 1 ou em -1. Observamos que, em cada passo da brincadeira, temos as seguintes possibilidades: trocamos duas coroas por duas caras e o valor da soma diminui em 4; trocamos uma cara e uma coroa por uma coroa e uma cara e o valor da soma fica inalterado; ou trocamos duas caras por duas coroas e o valor da soma aumenta em 4. Portanto, é impossível partir de 7 como soma inicial e chegar a 1, mas vejamos que, efetivamente, é possível chegar a -1, isto é, a quatro caras e três coroas. Como queremos obter quatro caras não consecutivas, precisamos de, pelo menos, quatro jogadas.

As quatro jogadas, que fazem a soma passar de 7 para 3, de 3 para -1 e então permanecer em -1, estão ilustradas na figura.



105. ***O preço do frango*** – A opção correta é (b).

Como $81 = 3^4$, o valor do frango triplicou quatro vezes. O número de meses transcorridos foi $4 \times 6 = 24$ meses, isto é, dois anos, ou seja, em janeiro de 2002 o frango atingirá o preço de R$ 81,00.

106. ***Excursões a Foz do Iguaçu*** – Temos um ônibus com $27 - 19 = 8$ lugares livres e ainda precisamos acomodar os $53 - 8 = 45$ participantes em ônibus de 27 lugares. É claro que um ônibus só não é suficiente, portanto, precisamos de dois ônibus e teremos $2 \times 27 - 45 = 9$ lugares livres no último ônibus. Ficaram $27 - 9 = 18$ pessoas no ônibus incompleto.

107. ***As frações de Laura*** – Como a fração é igual a um número inteiro, o seu numerador deve ser um múltiplo do seu denominador. Vamos testar todas essas possibilidades e escolher as que satisfazem as condições do problema.

$$\frac{3+5+6}{2} = 7\,, \quad \frac{3+6+11}{2} = 10 \quad \text{e} \quad \frac{5+6+11}{2} = 11 \text{ não satisfazem;}$$

$$\frac{2+5+11}{3} = 6 \text{ satisfaz;} \quad \frac{3+6+11}{5} = 4 \text{ não satisfaz;}$$

$$\frac{2+5+11}{6} = 3 \text{ satisfaz e} \quad \frac{2+3+6}{11} = 1 \text{ não satisfaz.}$$

Assim, temos somente as duas respostas seguintes.

$$\frac{2 + 5 + 11}{3} = 6 \qquad\qquad \frac{2 + 5 + 11}{6} = 3$$

108. ***Cálculo da unidade*** – A opção correta é (e).

Como o algarismo da unidade de qualquer potência de 5 é 5, segue que o algarismo da unidade de cada fator do produto é $5 + 1 = 6$. Mas, $6 \times 6 = 36$, ou seja, o produto de dois números terminados em 6 também é um número terminado em 6. Logo, o algarismo da unidade desse produto é 6.

109. ***Números cruzados***

7	5	2		8	8
	8	8	5		0
5	7		1	7	5
6	3	2		4	
4		8	7	6	4
7	5	9	2		5

110. ***Ovos e maçãs*** – A opção correta é (b).

Como o enunciado e a resposta são percentuais podemos, nesse caso, estipular qualquer preço e qualquer unidade monetária, que a resposta será, sempre, a mesma. O mais simples, portanto, é supor que, inicialmente, uma dúzia de ovos custava 100 e, portanto, que dez maçãs também custavam 100. Como o preço dos ovos subiu 10%, o novo valor dos ovos é 110. O preço das maçãs diminuiu 2%, portanto, o novo preço de dez maçãs é 98. Assim, enquanto antes gastava-se 200 na compra de uma dúzia de ovos e dez maçãs, agora gasta-se $110 + 98 = 208$. Daí, temos que o aumento foi de 8 em 200, o que corresponde ao percentual de

$$\frac{8}{200} = \frac{4}{100} = 4\%.$$

111. ***Divisão de números decimais*** – A opção correta é (a).

Efetuando a divisão, temos

$$\frac{254{,}88}{0{,}177} = \frac{254\,880}{177} = \frac{144 \times 177 \times 10}{177} = 1\,440\,.$$

112. ***Almoço dos amigos*** – Os preços de um prato mais uma vitamina são

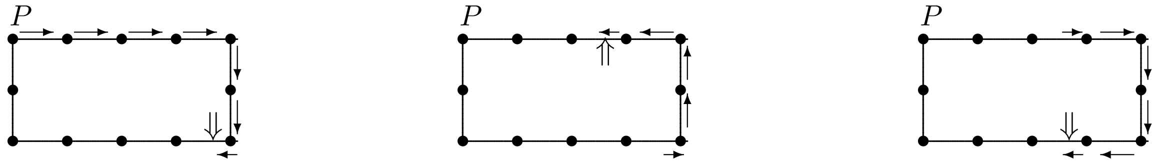
$$\underbrace{13}_{7+6}, \underbrace{14}_{7+7}, \underbrace{16}_{7+9}, \underbrace{17}_{11+6}, \underbrace{18}_{11+7}, \underbrace{20}_{11+9}, \underbrace{20}_{14+6}, \underbrace{21}_{14+7}, \underbrace{23}_{14+9}\,.$$

Dentre esses, os que diferem por 6 são 14 e 20, ou 17 e 23. Logo, temos duas soluções: ou Denise gasta $7 + 7 = 14$ e Júlio $14 + 6 = 11 + 9 = 20$, ou Denise gasta $11 + 6 = 17$ e Júlio $14 + 9 = 23$.

113. ***Somas de três em três*** – Inicialmente, observe que se a maior soma de três desses números for 9, então todos os números devem ser menores do que 7, ou seja, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Por outro lado, se a menor soma de três desses números distintos for 6, então eles não podem incluir 5 ou 6, restando 1, 2, 3 e 4. Verificamos que esses são os números, pois

$$1 + 2 + 3 = 6\,,\; 1 + 2 + 4 = 7\,,\; 1 + 3 + 4 = 8 \quad \text{e} \quad 2 + 3 + 4 = 9\,.$$

114. ***O passeio do Jorge*** – Lembrando que a distância entre as árvores ao longo do caminho é de 5 m, ilustramos o sentido do percurso de Jorge nas figuras.



(a) Caminhando inicialmente 32 m, ele toca em sete árvores, parando 2 m depois da última árvore que tocou.

(b) Voltando 18 m, ele toca em quatro árvores, parando 1 m depois da última que tocou.

(c) Ao retornar 22 m, ele toca em cinco árvores, parando 1 m depois da última árvore que tocou.

Assim, Jorge tocou em $7 + 4 + 5 = 16$ árvores.

115. ***A descoberta do algarismo*** – Separando os números cujos quadrados têm 1, 2 e 3 algarismos, temos,

com 1 algarismo: $1, 2, 3$
com 2 algarismos: $4, 5, 6, 7, 8, 9$
com 3 algarismos: $10, 11, 12, \ldots, 31$.

Até 31^2, o número já tem $3 + 12 + 66 = 81$ algarismos. Abreviando algarismo por "algs", temos

$$\underbrace{1^2, 2^2, 3^2}_{1\times 3 \text{ algs}}, \underbrace{4^2, \ldots, 9^2}_{2\times 6=12 \text{ algs}}, \underbrace{10^2, \ldots, 31^2}_{3\times 22=66 \text{ algs}}.$$

Assim, faltam $100 - 81 = 19$ algarismos para o $100^{\underline{o}}$. Como só 100^2 tem 5 algarismos, e como $19 = 4 \times 4 + 3$, teremos mais 4 números de 4 algarismos cada um, que são 32^2, 33^2, 34^2 e 35^2, e mais os 3 algarismos (milhar, centena, dezena) do número $36^2 = 1\,296$, como segue.

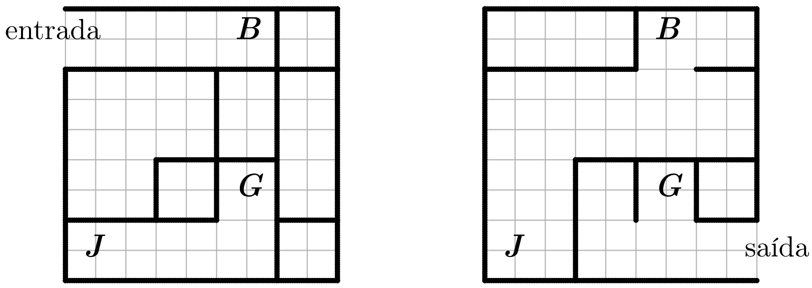
$$\underbrace{1^2, 2^2, 3^2}_{1\times 3 \text{ algs}}, \underbrace{4^2, \ldots, 9^2}_{2\times 6=12 \text{ algs}}, \underbrace{10^2, \ldots, 31^2}_{3\times 22=66 \text{ algs}}, \underbrace{32^2, 33^2, 34^2, 35^2}_{4\times 4=16 \text{ algs}}, \; 12\underbrace{9}_{100^{\underline{o}}\text{alg}}6$$

Assim, vemos que o algarismo 9 ocupa a $100^{\underline{a}}$ posição.

116. ***OBMEP*** – Como peso de $B+$ peso de $E = 6$ e peso de $M+$ peso de $P = 6$, segue que os pesos de M, P, B e E são todos menores do que 6. Como não há dois discos de mesmo peso, M, P, B e E não podem pesar 3 e, portanto, os pesos desses quatro discos só podem ser 1, 2, 4 e 5. Agora, peso de $X+$ peso de $O = 13$ e peso de $Z+$ peso de $O = 9$, portanto, peso de $X =$ peso de $Z + 4$. Assim, a única opção para os pesos de Z e de X é 3 e 7. Por exclusão, o peso de O é 6. Assim, obtemos

$$\text{peso de } O + \text{peso de } B + \text{peso de } M + \text{peso de } E + \text{peso de } P = 6 + 6 + 6 = 18.$$

117. ***Prédio misterioso*** – Primeiro observamos que os elevadores denotados por A, C, D, E, F e H conduzem a recintos fechados em algum dos dois andares e, portanto, não levam à saída. Desconsiderando esses elevadores, nosso desenho de elevadores úteis é o seguinte.



Assim, o caminho mais curto entre a entrada de um andar até a saída do outro consiste em primeiro pegar o elevador B, depois o J e, por último, o G.

118. ***Soma de frações***

Solução 1: Transformando as frações em números decimais, obtemos

$$\frac{1}{10} - \frac{1}{100} + \frac{1}{1\,000} - \frac{1}{10\,000} = 0{,}1 - 0{,}01 + 0{,}001 - 0{,}00001 = 0{,}0909 = \frac{909}{10\,000}.$$

Solução 2: Efetuando a soma das frações, obtemos

$$\frac{1}{10} - \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} - \frac{1}{10\,000} = \frac{1\,000 - 100 + 10 - 1}{10\,000} = \frac{909}{10\,000}.$$

119. ***Biblioteca*** – Ao comprar 140 livros, a biblioteca ficou com $\frac{27}{25}$ do número de livros, portanto, 140 corresponde a $\frac{2}{25}$ dos livros da biblioteca. Se $\frac{2}{25}$ corresponde a 140 livros, $\frac{1}{25}$ corresponde a $140 \div 2 = 70$ livros e $\frac{25}{25}$ a $70 \times 25 = 1\,750$ livros. A opção correta é (a).

120. ***Comparação de frações*** – Para que uma fração seja menor do que 1, o numerador deve ser menor do que o denominador. Eliminando as repetições, obtemos a lista seguinte.

(a) 1 fração com denominador 2: $\frac{1}{2}$

(b) 2 frações com denominador 3: $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$

(c) 2 frações com denominador 4: $\frac{1}{4}$, $\underbrace{\frac{2}{4}}_{1/2}$ e $\frac{3}{4}$

(d) 4 frações com denominador 5: $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ e $\frac{4}{5}$

(e) 2 frações com denominador 6: $\frac{1}{6}$, $\underbrace{\frac{2}{6}}_{1/3}$, $\underbrace{\frac{3}{6}}_{1/2}$, $\underbrace{\frac{4}{6}}_{2/3}$ e $\frac{5}{6}$

(f) 6 frações com denominador 7: $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$ e $\frac{6}{7}$

(g) 4 frações com denominador 8: $\frac{1}{8}, \underbrace{\frac{2}{8}}_{1/4}, \frac{3}{8}, \underbrace{\frac{4}{8}}_{1/2}, \frac{5}{8}, \underbrace{\frac{6}{8}}_{3/4}$ e $\frac{7}{8}$

(h) 6 frações com denominador 9: $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \underbrace{\frac{3}{9}}_{1/3}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \underbrace{\frac{6}{9}}_{2/3}, \frac{7}{9}$ e $\frac{8}{9}$.

Assim, temos 27 dessas frações.

121. ***Divisão com resto*** – Se a divisão de 2 007 por algum número deixar resto 5, então esse número divide $2\,007 - 5 = 2\,002$. Assim, calculamos todos os divisores de $2\,002 = 2 \times 7 \times 11 \times 13$, listados na coluna da direita da tabela seguinte.

		1
2 002	2	2
1 001	7	7, 14
143	11	11, 22, 77, 154
13	13	13, 26, 91, 182, 143, 286, 1 001, 2 002
1		

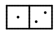
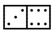
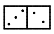
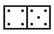
Como o resto 5 deve ser menor do que o divisor, dividindo 2 007 por qualquer um dos 14 números seguintes deixa resto 5:

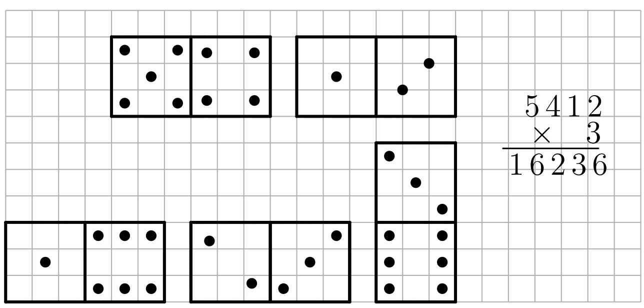
$$7, 11, 13, 14, 22, 26, 77, 91, 143, 154, 182, 286, 1\,001 \text{ e } 2\,002.$$

122. ***Panelas*** – Convertendo 1 kg em 1 000 g, temos que as duas panelas juntas, mais a carne, pesam $645 + 237 + 1\,000 = 1\,882$ g. Logo, cada panela, mais o seu conteúdo de carne, deve pesar $1\,882 \div 2 = 941$ g. Assim, José colocou:

$$941 - 645 = 296 \text{ g} \qquad \text{e} \qquad 941 - 237 = 704 \text{ g}$$

nessas duas panelas.

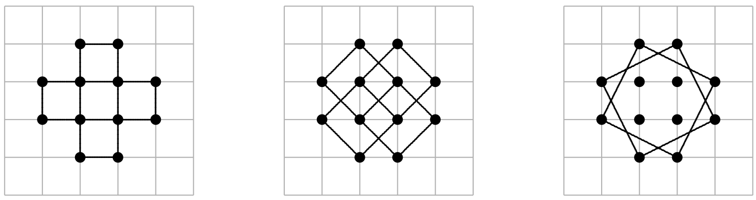
123. ***Dominós*** – Como $2 \times 3 = 6$, podemos começar supondo que os dois dominós  e  estejam na posição certa. Se isso for verdade, e como $1 \times 3 = 3$, resulta que o algarismo na dezena do resultado deve ser 3, portanto precisamos trocar o dominó  pelo dominó , de tal forma que o 3 fique na dezena. Como temos um 2 na centena do resultado, a centena do primeiro número precisa ser um 4. Com essa troca, a posição dos dominós fica correta, como pode ser visto na figura.



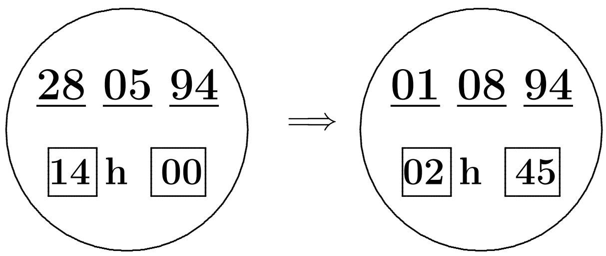
124. ***Código secreto*** – A única maneira de obter $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ como produto de três números de um algarismo cada um é $360 = 9 \times 8 \times 5$. Como A é o menor dos três, $A = 5$. Logo $B = 8$ e $C = 9$, ou $B = 9$ e $C = 8$, ambas opções com $AA + BB + CC = 55 + 88 + 99 = 242$. Logo, temos duas possibilidades para o código ABC, a saber, 589 ou 598.

125. ***Os doze pontos*** – No total, temos 11 possíveis quadrados, mostrados nas figuras seguintes.

5 quadrados   4 quadrados   2 quadrados



126. ***Relógio*** – Vamos tentar uma data e um horário no mesmo ano de 1994. Já que com os números dados não podemos alterar o dia nem para 29 nem para 30, sem alterar o ano, então a data procurada não está no mês 05. O seguinte mês possível é o 08. Como precisamos da data mais próxima possível, observemos que podemos formar o dia 01, sobrando os algarismos 0, 2, 4 e 5 para formar a hora. A menor hora possível que podemos formar com esses algarismos é 02h45m, de modo que a data procurada é 1º de agosto de 1994, às 02 horas e 45 minutos.



127. ***Lápis*** – A opção correta é (b).

Vamos ver em quantas caixas podemos colocar o número máximo de lápis, que é 6 por caixa. Nas 13 caixas não é possível, pois $13 \times 6 = 78$ é maior do que o número 74 do total de lápis. Em 12 caixas podemos ter $12 \times 6 = 72$, sobrando uma caixa, com $74 - 72 = 2$ lápis.

128. ***Contagem*** – A cada 10 páginas, o algarismo 1 aparece uma vez nas unidades e, a cada 100 páginas, aparece 10 vezes nas dezenas. Contando o número de páginas que contém o algarismo 1 em cada faixa abaixo, temos

(a) 20 vezes entre 1 e 99:

1, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91, num total de 10 vezes na unidade;

10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, num total de 10 vezes na dezena.

(b) 120 vezes entre 100 e 199:
101, 111, 121, 131, 141, 151, 161, 171, 181, 191: 10 vezes na unidade;
110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119: 10 vezes na dezena;
100, 101, 102, ..., 199, num total de 100 vezes na centena.

(c) 20 vezes entre 200 e 299:
201, 211, 221, 231, 241, 251, 261, 271, 281, 291: 10 vezes na unidade;
210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219: 10 vezes na dezena.

Até a página 299, o número 1 aparece $20 + 120 + 20$ vezes, faltando, portanto, apenas $171 - 160 = 11$ vezes. Os dois primeiros que aparecem depois de 299 são dois na unidade, em 301 e 311, e os nove primeiros das dezenas, em 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317 e 318. Assim, o livro tem 318 páginas.

129. ***Viagem a Recife*** – A opção correta é (b).

No momento em que a informação foi dada, o tempo de vôo que faltava era de 1h20min, ou 4/3 de hora. Logo, nesse momento, a distância até Recife era de $864 \times \frac{4}{3} = 1\,152$ km. Como estávamos a $1\,222$ km da cidade de partida, a distância entre essa cidade e Recife deve ser $1\,152 + 1\,222 = 2\,374$ km. Dentre as opções dadas, a mais próxima é $2\,400$ km.

130. ***Praça*** – Como a 5ª casa da Maria é a 12ª casa do João, a diferença entre as contagens é de 7 casas e, portanto, a 1ª casa da Maria é a 8ª casa do João. Como a 30ª casa da Maria é a 5ª casa do João, a 32ª da Maria é a 7ª do João. A casa seguinte já é a 8ª do João, ou seja, a 1ª da Maria. Assim, a praça tem 32 casas.

131. ***Sequência de figuras*** – As figuras se repetem num grupo de seis, sempre terminando com $\square$, tanto o 1º quanto o 166º grupo. Como $996 = 6 \times 166$, a última figura do 166º grupo, ou seja, a 966ª figura, é $\square$.

$$\underbrace{\triangle, \clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \heartsuit, \square}_{1^{\text{o}}\text{ grupo de 6}}, \ \ldots\ , \underbrace{\triangle, \clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \heartsuit, \overbrace{\square}^{996^{\text{o}}}}_{166^{\text{o}}\text{ grupo de 6}}, \ \triangle, \clubsuit, \diamondsuit, \overbrace{\spadesuit}^{1\,000^{\text{o}}}, \heartsuit, \square, \ldots$$

(a) A 1000ª figura, portanto, é $\spadesuit$.

(b) O primeiro $\diamondsuit$ está na 3ª posição, o segundo na $1 \times 6 + 3 = 9$ª posição, o terceiro na $2 \times 6 + 3 = 15$ª, o quarto na $3 \times 6 + 3 = 21$ª posição, e assim por diante, até o milésimo $\diamondsuit$, que aparece na $999 \times 6 + 3 = 5\,997$ª posição.

132. ***A brincadeira com o quadrado***

Solução 1: Convertendo metros em milímetros, temos 1 m = $1\,000$ mm. Assim, o quadrado ficou dividido em $1\,000 \times 1\,000 = 10^6$ quadradinhos, cada um com 1 mm de lado. Colocando lado a lado todos os 10^6 quadradinhos, teremos um retângulo de comprimento

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{10^6 \text{ parcelas}} = 10^6 \times 1 = 10^6 \text{ mm} = 1 \text{ km}.$$

Solução 2: O quadrado tem área igual a 1 $\mathrm{m}^2 = 10^6$ mm^2. A área Δ do retângulo é a mesma do quadrado. Como a largura do retângulo mede $\ell = 1$ mm, resulta que o comprimento c do retângulo, em milímetros, mede

$$c = \frac{\Delta}{\ell} = \frac{10^6}{1} = 10^6 \text{ mm.}$$

133. ***O código da Arca do Tesouro*** – Nas duas tabelas seguintes mostramos unicamente os grupos de três números em casas sucessivas, horizontais ou verticais, cuja soma seja 14.

			9	4	1
		7	3	4	
8	2	4			
			7	5	2
	7	6	1		
			6	7	1

	9		9		1
	3		3	4	8
	2		2	5	5
7		5	7	5	
2		6	1	2	
5		3	6	7	

Assim, quando eliminamos esses números da tabela inicial, os números que sobrevivem são somente os indicados na tabela seguinte.

5		4			
6					
	4				
					8
	2				

Portanto, a soma dos números que restam é $5+4+6+4+8+2 = 29$, que é o código da Arca do Tesouro.

134. ***Operações com decimais*** – Temos $\dfrac{(0{,}2)^3+1}{0{,}2+1} = \dfrac{0{,}008+1}{1{,}2} = \dfrac{1{,}008}{1{,}2} = 0{,}84$.

135. ***Fatores inteiros*** – Como o produto dos dois fatores é 96, eles são divisores de $96 = 2^5 \times 3$, ou seja, os possíveis fatores positivos são 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48 e 96.

Os únicos com quadrado menor do que 208 são 1, 2, 3, 4, 6, 8 e 12, cujos quadrados são 1, 4, 9, 16, 36, 64 e 144.

A única maneira de obter 208 como soma de dois dos números listados acima, é $64 + 144 = 208$. Assim, os únicos fatores positivos são 8 e 12. Logo os únicos fatores inteiros cuja soma dos quadrados é 208 são 8 e 12 ou, então, -8 e -12.

136. ***Divisibilidade*** – A opção correta é (b).

O número é divisível por $45 = 5 \times 9$, portanto é divisível por 5 e 9. Todo número divisível por 5 termina em 0 ou 5. Assim, $b = 0$ ou $b = 5$. Todo número divisível por 9 tem como a soma dos seus algarismos um número que é múltiplo de 9. Logo, $6 + a + 7 + 8 + b = 21 + a + b$ é múltiplo de 9. Como $a \leq 9$, e $b = 0$ ou $b = 5$, temos $21 \leq 21 + a + b \leq 21 + 9 + 5 = 35$. Mas, o único múltiplo de 9 entre 21 e 35 é 27. Logo, $21 + a + b = 27$. Concluímos que $a + b = 6$ e o número procurado é 61 785 ou 66 780.

137. ***Número simples*** – Com 1 algarismo, temos os números simples 1 e 2; com 2 algarismos, temos os $2^2 = 4$ números simples 11, 12, 21 e 22; com 3 algarismos, temos os $2^3 = 8$ números simples 111, 112, 121, 122, 211, 212, 221 e 222. Com 4 algarismos, temos $2^4 = 16$ números simples, com 5 algarismos, temos $2^5 = 32$ números simples e com 6 algarismos, temos $2^6 = 64$ números simples. Como um número inferior a 1 milhão tem, no máximo, 6 algarismos, resulta que existem exatamente $2+4+8+16+32+64 = 126$ números simples menores do que 1 milhão.

138. ***Venda de TV*** – Sejam a o algarismo da dezena de milhar e b o da unidade. Como o número é divisível por $72 = 8 \times 9$, temos que $79b$ é um número par divisível por 8. Testando os valores de $b = 0$, 2, 4, 6 e 8, vemos que, necessariamente, $b = 2$. Um número é divisível por 9 se a soma dos seus algarismos for um múltiplo de 9. Então, $a + 6 + 7 + 9 + 2 = a + 24$ é um múltiplo de 9 e, portanto, $a = 3$. Assim, na fatura constava R$ 36 792,00 e, portanto, cada TV custou $36\,792 \div 72 = 511$ reais.

139. ***Chocolate*** – Como $8\times 1{,}35 = 10{,}8$ é maior do que 10, Henrique comprou 7 barras de chocolate e recebeu $10 - 7\times 1{,}35 = 0{,}55$ reais, ou 55 centavos, de troco.

140. ***O quadradinho*** – Simplificando, obtemos

$$1{,}6 \times \square = \frac{6\,400\,000}{400} = 16\,000 = 1{,}6 \times 10\,000\,.$$

Assim, $\square = 10\,000$.

141. ***Dois números*** – Como 12 é o MDC dos dois números e cada um tem dois algarismos, os únicos candidatos são os múltiplos de 12 menores do que 100, ou seja,

$$12,\ 24,\ 36,\ 48,\ 60,\ 72,\ 84 \text{ e } 96.$$

Como $1\,728 = 12 \times 12 \times 12 = 2^6 \times 3^3$, os múltiplos 60 (com fator 5) e 84 (com fator 7) não são divisores de 1 728. Também $1\,728 \div 12 = 144$ e $1\,728 \div 96 = 18$, de modo que a lista reduz a 24, 36, 48 e 72, com $24 \times 72 = 36 \times 48 = 1\,728$. Como o MDC de 24 e 72 é 24, temos uma única solução, a saber, 36 e 48, cujo produto é 1 728 e o MDC é 12.

142. ***As idades dos irmãos*** – Dividindo 2 000 por 7, obtemos $2\,000 = 7 \times 285 + 5$. Logo, 2 000 dias equivalem a 285 semanas, mais 5 dias. Como o dia 13 de março de 2 007 caiu em uma terça-feira, contando os 5 dias restantes, temos que o aniversário do irmão de Carlos cairá em um domingo. Agora, dividindo 2 000 por 365, obtemos $2\,000 = 365 \times 5 + 175$. Assim, 2 000 dias equivalem a, aproximadamente, cinco anos e meio, portanto Carlos estará com 12 anos de idade.

143. ***A mistura de concreto*** – A opção correta é (e).

De acordo com os dados do problema, misturamos 1 kg de cimento com 3 kg de areia e 5 kg de terra. Isso equivale a misturar 5 kg de cimento com 15 kg de areia e 25 kg de terra, e essa mistura pesa $5 + 15 + 25 = 45$ kg.

144. ***Ponto na escala*** – A distância entre os pontos inicial e final é de $12{,}62 - 12{,}44 = 0{,}18$ unidades. Como estão marcados 18 intervalos, o comprimento de cada um deles é de $0{,}18 \div 18 = 0{,}01$ unidades. O ponto P está na $6^{\underline{a}}$ posição à direita de 12,44, portanto corresponde a $12{,}44 + 0{,}01 \times 6 = 12{,}50$.

145. ***O pomar do Francisco*** – A opção correta é (c).

De acordo com os dados do problema, podemos observar que temos dois pares de árvores vizinhas: as laranjeiras são vizinhas dos limoeiros e as macieiras são vizinhas das pereiras. Como são cinco fileiras e as macieiras e pereiras não estão do lado das laranjeiras e limoeiros, resulta que as tangerineiras estão na terceira fila, a do meio.

146. ***Quatro quadrados*** – Se a área de cada quadrado é 3 cm^2 e cada um deles está dividido em 16 quadradinhos, então a área de cada quadradinho é $\dfrac{3}{16}$ cm^2. Como há um total de 6 quadradinhos superpostos nos 4 quadrados, temos que a área da figura é

$$4 \times 3 - 6 \times \frac{3}{16} = 12 - \frac{9}{8} = \frac{87}{8} = 10{,}875 \text{ cm}^2.$$

147. ***O fio de arame*** – A opção correta é (d).

A figura é composta de 3 semicírculos, o que exclui as opções (b), (c) e (e), e 4 segmentos de reta, o que exclui a opção (a), que só tem 3 segmentos.

148. ***Sequência de fósforos*** – A opção correta é (c).

Observe que o número de fósforos da sequência é formado da seguinte maneira:

$$\begin{array}{lcl}
\text{primeiro termo} & = & 3+3=\mathbf{2}\times 3=(1+1)\times 3; \\
\text{segundo termo} & = & 3+3+3=\mathbf{3}\times 3=(2+1)\times 3; \\
\text{terceiro termo} & = & 3+3+3+3=\mathbf{4}\times 3=(3+1)\times 3.
\end{array}$$

Logo, o oitavo termo da sequência é $(8+1) \times 3 = \mathbf{9} \times 3 = 27$.

149. ***O trajeto das formiguinhas***

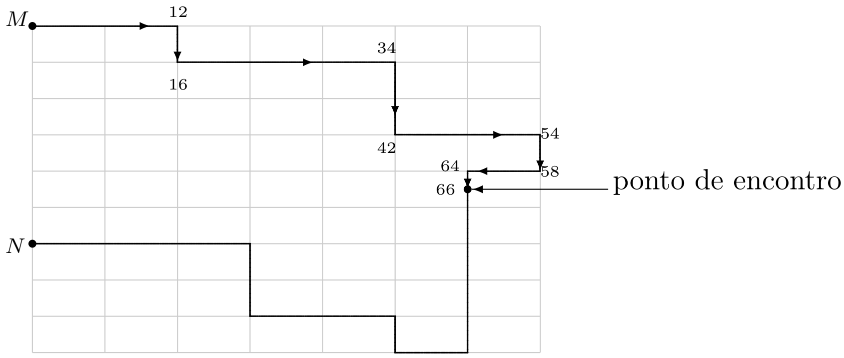
(a) O trajeto de M a N compreende 14 comprimentos e 12 larguras das lajotas. Logo, seu comprimento é $14 \times 6 + 12 \times 4 = 84 + 48 = 132$ cm.

Como as duas formiguinhas percorrem a mesma distância, cada uma deve andar $132 \div 2 = 66$ cm.

(b) Vamos acompanhar, desde o início, o percurso feito por Maricota até completar os 66 cm:

$$\underbrace{2\,\text{comprimentos}}_{2\times6=12} + \underbrace{1\ \ \text{largura}}_{4+12=16} + \underbrace{3\,\text{comprimentos}}_{18+16=34} + \underbrace{2\,\text{larguras}}_{8+34=42} +$$
$$\underbrace{2\,\text{comprimentos}}_{12+42=54} + \underbrace{1\ \ \text{largura}}_{4+54=58} + \underbrace{1\,\text{comprimento}}_{6+58=64} + \underbrace{1/2\ \ \text{largura}}_{2+64=66}.$$

O caminho de Maricota até o ponto de encontro está indicado na figura.



150. ***A soma é* 100**

(a) Inicialmente observe que, como a soma dos três números é 100 e o maior deles é igual à soma dos outros dois, então duas vezes o maior número é 100, ou seja, o maior número é 50.

(b) Como 50 não é primo, os outros dois números são primos e têm soma igual a 50. Por exemplo, 3 e 47 são primos e $3 + 47 = 50$. Portanto, os números 3, 47 e 50 formam uma solução do problema.

(c) Existem outras soluções para o problema. Para encontrá-las, escrevemos a lista de todos os primos entre 1 e 50, ou seja, $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43$ e 47 e, para cada um desses números, verificamos se a diferença para 50 também é primo. Encontramos um total de quatro soluções

Solução 1	3	47	50
Solução 2	7	43	50
Solução 3	13	37	50
Solução 4	19	31	50

151. ***Código de barras*** – Lembre que a primeira e a última barra não fazem parte do código.

(a) Primeiramente, escrevemos o CEP dado com os algarismos 0 e 1:

$$\underbrace{00101}_{3}\underbrace{10100}_{6}\underbrace{00110}_{4}\underbrace{00001}_{7}\underbrace{11000}_{0}\underbrace{00011}_{1}\underbrace{00101}_{3}\underbrace{11000}_{0}\,.$$

Em seguida, escrevemos o código de barras desse CEP:

(b) Primeiramente, escrevemos o código de barras dado com os algarismos 0 e 1 em grupos de 5 algarismos:

01010 11000 01010 00110 11000 11000 01010 11000

Em seguida, escrevemos o CEP, que é 20240020.

152. ***Atletas da escola*** – O número total de alunos na escola é dado pela fração $12/12$, que podemos representar graficamente por um retângulo dividido em 12 partes iguais.

Denotemos por V, F e NE o número de alunos que jogam somente vôlei, somente futebol e nenhum desses dois esportes, respectivamente. A informação dada, em termos das partes desse retângulo, é a seguinte:

- o $1/4$ dos alunos que jogam somente vôlei corresponde a três partes;
- o $1/3$ dos alunos que jogam somente futebol corresponde a quatro partes;
- o $1/12$ dos alunos que não jogam nem vôlei nem futebol corresponde a uma parte.

V	V	V	F
F	F	F	NE

(a) Sobram 4 partes do retângulo para os alunos que jogam vôlei e futebol, ou seja, esses 300 alunos correspondem a $4/12 = 1/3$ do total dos alunos da escola. Logo, o total de alunos na escola é $300 \times 3 = 900$.

(b) O total de alunos que jogam somente futebol é $\dfrac{1}{3} \cdot 900 = 300$.

(c) Os alunos que jogam futebol são os que jogam só futebol mais os que jogam futebol e vôlei, ou seja, $300 + 300 = 600$.

(d) O total de alunos que praticam um dos esportes é $\dfrac{11}{12} \cdot 900 = 825$, pois $1/12$ dos alunos não jogam nem futebol, nem vôlei.

153. ***Dízima periódica***

(a) Dividindo 1 por 22, obtemos $\frac{1}{22} = 0{,}0454545\ldots$. Observe que o algarismo 4 está nas posições pares, ou seja, segunda, quarta, sexta, e assim por diante, enquanto que o algarismo 5 está nas posições ímpares, ou seja, a terceira, a quinta, a sétima, e assim por diante. Como 1 997 é um número ímpar, temos que o algarismo da 1 997ª casa decimal é 5.

(b) Dividindo 1 por 27, obtemos $\frac{1}{27} = 0{,}037037037\ldots$. Observe que os algarismos 0, 3 e 7 se repetem, sucessivamente, a cada três casas decimais, sendo que

- o algarismo 0 está nas posições 1ª, 4ª, 7ª, ..., ou seja, aquelas que, divididas por 3, deixam resto 1;
- o algarismo 3 está nas posições 2ª, 5ª, 8ª, ..., ou seja, aquelas que, divididas por 3, deixam resto 2 e
- o algarismo 7 está nas posições 3ª, 6ª, 9ª, ..., ou seja, aquelas que são múltiplas de 3.

$$\begin{array}{r|l} 1\,997 & 3 \\ \cline{2-2} \underbrace{2} & 665 \end{array}$$

Como a divisão $1\,997 \div 3$ deixa resto 2, o algarismo da 1 997ª casa decimal é 3.

154. ***Ana na corrida*** – Transformando minutos em horas, temos que 20 minutos correspondem a $20/60 = 1/3$ de hora. Assim, a velocidade de Ana deve ser maior do que $v = 5/\dfrac{1}{3} = 15$ km/h.

155. ***Quadradinhos e o buraco*** – Contando os quadradinhos retirados de cada linha, temos que o número desses quadradinhos é $1 + 3 + 5 + 15 + 10 + 2 = 36$. Como cada quadradinho tem 1 cm^2 de área, a área do buraco é 36 cm^2.

Para obter o perímetro do buraco, podemos simplesmente contar quantos lados de quadradinhos têm o buraco, obtendo 42 lados, de modo que o perímetro mede 42 cm. Entretanto, uma maneira alternativa de descobrir o perímetro do buraco é observar que ele se estende por 6 linhas e 15 colunas, sendo que cada linha e cada coluna ocupada pelo buraco contém exatamente dois lados de quadradinho que fazem parte do perímetro. Logo, o perímetro do buraco mede $2 \times (6 + 15) = 42$ cm.

156. ***Quadrados perfeitos no retângulo*** – Para resolver esse problema, convém listar os quadrados perfeitos de dois algarismos, que são

$$4^2 = 16,\ 5^2 = 25,\ 6^2 = 36,\ 7^2 = 49,\ 8^2 = 64 \ \text{ e } \ 9^2 = 81,$$

bem como os quadrados perfeitos de três algarismos, que são

$$10^2 = 100,\ 11^2 = 121,\ 12^2 = 144,\ 13^2 = 169,\ 14^2 = 196,\ 15^2 = 225,$$

$$16^2 = 256,\ 17^2 = 289,\ 18^2 = 324,\ 19^2 = 361,\ 20^2 = 400,\ 21^2 = 441,$$

$$22^2 = 484,\ 23^2 = 529,\ 24^2 = 576,\ 25^2 = 625,\ 26^2 = 676,\ 27^2 = 729,$$

$$28^2 = 784,\ 29^2 = 841,\ 30^2 = 900 \ \text{ e } \ 31^2 = 961.$$

Em particular, vemos que todo quadrado perfeito de três algarismos é um número terminado em 0, 1, 4, 5, 6 ou 9.

Assim, estabelecemos que, dos quadrados perfeitos de dois algarismos, 25, 36 e 81 não podem aparecer na terceira coluna, assinalada com X. Para essa coluna, restam apenas os quadrados perfeitos 16, 49 e 64, portanto, temos três opções, como segue.

		X
		X

(I)

		1
		6

(II)

		4
		9

(III)

		6
		4

(a) Vamos examinar cada uma das três opções.

Opção (I): Os quadrados perfeitos de três algarismos terminados em 6 são 196, 256, 576 e 676. Como nenhum quadrado perfeito de dois algarismos termina em 2 ou 7, os quadrados perfeitos 256, 576 e 676 não podem aparecer na segunda linha, restando, apenas, 196.

		1
1	9	6

Agora, os únicos quadrados perfeitos de dois algarismos terminados em 1 e 9 são, respectivamente, 81 e 49. Obtemos a solução seguinte, que é a única dentro da Opção (I).

8	4	1
1	9	6

Opção (II): Os quadrados perfeitos de três algarismos terminados em 9 são 169, 289, 529 e 729, de modo que a segunda linha pode ser preenchida apenas com o quadrado perfeito 169. Na primeira coluna só pode aparecer o número 81, por ser o único quadrado perfeito de dois algarismos terminado em 1.

		4
1	6	9

8		4
1	6	9

Temos, agora, duas opções para preencher a última casa em branco: 1 ou 3. No entanto, nem 814 nem 834 são quadrados perfeitos. Assim, a opção (II) é impossível.

Opção (III): Os quadrados perfeitos de três algarismos terminados em 4 são 144, 324, 484 e 784, de modo que a segunda linha pode ser preenchida apenas com o quadrado perfeito 144 e, na primeira coluna só pode aparecer o número 81. Agora, a única escolha para a casa em branco é o número 6.

8		6
1	4	4

8	6	6
1	4	4

No entanto, 866 não é quadrado perfeito. Logo a opção (III) também é impossível.

(b) Pelo que vimos acima, existe apenas uma solução, encontrada no item precedente, a saber,

8	4	1
1	9	6

.

157. ***Aula de divisão***

(a) Temos $38 - 4 = 34 = 2 \times 17 = 1 \times 34$, portanto, $\bigstar = 17$ e $\star = 2$, ou $\bigstar = 34$ e $\star = 1$.

(b) Temos $75 = 6 \times 12 + 3$, portanto, $\bigstar = 3$ e $\star = 6$.

(c) Temos $3 \times 7 = 21$. Os possíveis restos da divisão por 3 são 0, 1 e 2, portanto, $\star = 21$ e $\bigstar = 0$, ou $\star = 22$ e $\bigstar = 1$ ou, ainda, $\star = 23$ e $\bigstar = 2$.

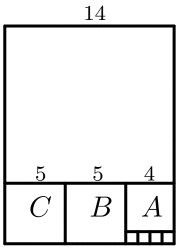
(d) Temos $42 = 5 \times 8 + 2$, portanto, podemos trocar o divisor pelo quociente para obter $\star = 8$ e $\bigstar = 2$.

158. ***Linhas de ônibus***

(a) Fatorando, temos $15 = 3 \cdot 5$ e $25 = 5^2$, portanto o menor múltiplo comum de 15 e 25 é $75 = 3 \cdot 5^2$. Assim, os dois ônibus passarão juntos novamente no ponto a cada 75 minutos, ou seja, a cada 1h15min. Logo, os ônibus passarão juntos novamente no ponto perto da casa de Quinzinho, às 7h30min + 1h15min = 8h45min.

(b) Para obter os horários em que os ônibus passarão juntos no ponto de ônibus perto da casa de Quinzinho, devemos ir somando 1h15min, obtendo 8h45min, 10h, 11h15min, 12h30min, 13h45min, 15h, 16h15min, 17h30min, 18h45min, 20h, 21h15min, 22h30min e 23h45min. O próximo ônibus só passa depois da meia noite.

159. ***Quadrados dentro de um retângulo***



(a) Como o menor quadrado tem 1 cm de lado, o lado do quadrado A mede $1 \times 4 = 4$ cm e o lado do quadrado B mede $4 + 1 = 5$ cm. O quadrado C tem um lado em comum com o quadrado B, portanto, o quadrado C também tem 5 cm de lado. Assim, o lado do quadrado maior mede $5 + 5 + 4 = 14$ cm.

(b) Os lados do retângulo medem 14 cm e $14 + 5 = 19$ cm, portanto, o perímetro do retângulo é $14 \times 2 + 19 \times 2 = 66$ cm.

160. ***Festa na escola***

(a) A professora + 16 alunos + 1 monitor + 5 pais = 23 pessoas comerão os pães de queijo. Para que cada pessoa possa comer pelo menos 5 pães de queijo, será necessário comprar, no mínimo, $5 \times 23 = 115$ pães de queijo. Cada pão de queijo pesa, em média, $\dfrac{100}{10} = 10$ gramas, de modo que será necessário comprar

$$10 \times 115 = 1\,150 \text{ gramas de pães de queijo.}$$

Como a precisão da balança é de 100 g, arredondamos 1 150 g para 1 200 g e obtemos a quantidade de pão de queijo que a professora deve comprar, em gramas.

(b) Como $\dfrac{1\,200}{100} = 12$, temos que a professora gastará $12 \times 3{,}20 = 38{,}40$ reais.

(c) A quantidade de pães de queijo comprada foi de $\dfrac{1\,200}{10} = 120$ pães. Logo, sobrarão $120 - 115 = 5$ pães de queijo.

161. ***Ai que fome***

(a) Maria possui $5 \times 0{,}50 + 7 \times 0{,}25 + 4 \times 0{,}10 + 5 \times 0{,}05 = 2{,}50 + 1{,}75 + 0{,}40 + 0{,}25 = 4{,}90$ reais.

(b) Tirando a passagem, restam R$ 4,00 para Maria fazer seu lanche. Observe que Maria não pode escolher uma empada e, se escolher um sanduíche, não pode mais comprar um refrigerante. Assim, Maria só tem as nove seguintes opções de lanche.

Opção 1	Opção 2	Opção 3	Opção 4
Sanduíche: R$ 2,20	Sanduíche: R$ 2,20	Sanduíche: R$ 2,20	Sanduíche: R$ 2,20
Suco: R$ 1,20	Suco: R$ 1,20	Refresco: R$ 1,00	Refresco: R$ 1,00
Cocada: R$ 0,40	Bombom: R$ 0,50	Cocada: R$ 0,40	Bombom: R$ 0,50
Total: R$ 3,80	Total: R$ 3,90	Total: R$ 3,60	Total: R$ 3,70

Opção 5	Opção 6	Opção 7	Opção 8	Opção 9
Pastel: R$ 2,00	Pastel: R$ 2,00	Pastel: R$ 2,00	Pastel: R$ 2,00	Pastel: R$ 2,00
Suco: R$ 1,20	Suco: R$ 1,20	Refresco: R$ 1,00	Refresco: R$ 1,00	Refresco: R$ 1,00
Cocada: R$ 0,40	Bombom: R$ 0,50	Sorvete: R$ 1,00	Bombom: R$ 0,50	Cocada: R$ 0,40
Total: R$ 3,60	Total: R$ 3,70	Total : R$ 4,00	Total: R$ 3,50	Total: R$ 3,40

162. ***Advinhe*** – Somando $50 + 50 = 100$ obtemos três dígitos e $41 - 32 = 9$ tem um, portanto, os números procurados não podem ser maiores do que 49, nem menores do que 42. Como 43 é primo (bem como 47), meus números são quaisquer dentre 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48 e 49, que não têm divisor comum diferente de 1.

163. ***Produto de consecutivos*** – Em primeiro lugar, note que se três números são consecutivos, então um deles é divisível por 3. Portanto, qualquer número que seja o produto de três ou mais números consecutivos, deve ser divisível por 3. Mas, dentre os números dados, apenas 1 680 é divisível por 3 e, além disso,

$$1\,680 = 2^4 \times 3 \times 5 \times 7 = 5 \times 6 \times 7 \times 8.$$

Logo, 1 680 é o único dentre os três números dados que pode ser escrito como um produto de quatro números consecutivos.

164. ***Palíndromos***

(a) O próximo é 2 112.

(b) O próximo palíndromo ímpar é 3 003.

(c) Para ser primo, o palíndromo não pode ter quatro algarismos, pois todo número palíndromo de quatro algarismos é do tipo $abba$, que é divisível por 11, já que

$$\begin{aligned} abba &= a00a + bb0 = a \times 1001 + b \times 110 = a \times 11 \times 91 + b \times 11 \times 10 \\ &= (91a + 10b) \times 11. \end{aligned}$$

O primeiro número palíndromo de cinco algarismos é $10\,001 = 73 \times 137$, que não é primo. Os próximos possíveis candidatos são

$$10\,101 = 3\,367 \times 3 \quad \text{e} \quad 10\,201 = 101 \times 101.$$

Assim, o primeiro número palíndromo primo depois de 929 é 10 301.

165. ***O maior MDC*** – Designemos por d o máximo divisor comum dos seis números. Então, esses seis números de dois algarismos são múltiplos distintos de d e podemos reformular a pergunta: queremos saber qual é o maior número d que possui seis múltiplos distintos menores do que 100.

Note que $d, 2d, 3d, 4d, 5d$ e $6d$ são todos múltiplos de d. Logo, a melhor situação possível é quando esses seis números são os múltiplos considerados. Para isso, é preciso que $6d \leq 99$. Dividindo 99 por 6, obtemos o quociente 16 e o resto 3, ou seja, $99 = 6 \cdot 16 + 3$. Logo, $d = 16$. Portanto, os seis números de dois algarismos cujo MDC é o maior possível são 16, 32, 48, 64, 80 e 96. O MDC desses seis números é 16.

166. ***Quantidade de água na Terra*** – Denotemos $V = 1\,360\,000\,000$. Lembre que $1\% = 1/100$, portanto, 1% de V é igual a $1\,360\,000\,000/100 = 13\,600\,000$. Segue que:

- $97\% = \dfrac{97}{100} = 0{,}97$ e 97% de V vale $97 \times 13\,600\,000 = 1\,319\,200\,000$;

- $\dfrac{40\,000\,000}{1\,360\,000\,000} = 0{,}0294 = 2{,}94 \times \dfrac{1}{100} = 2{,}94\%$;

- $1{,}8\% = \dfrac{1{,}8}{100} = 0{,}018$ e $1{,}8\%$ de V vale

$$1{,}8 \times 13\,600\,000 = 24\,480\,000;$$

- $0{,}0096 = 0{,}96 \times \dfrac{1}{100} = 0{,}96\%$ e $0{,}96\%$ de V vale

$$0{,}96 \times 13\,600\,000 = 13\,056\,000;$$

- $\dfrac{250\,000}{1\,360\,000\,000} = 0{,}00018 = 0{,}018 \times \dfrac{1}{100} = 0{,}018\%$;

- $0{,}00001 = 0{,}001 \times \dfrac{1}{100} = 0{,}001\%$ e $0{,}001\%$ de V vale

$$0{,}001 \times 13\,600\,000 = 13\,600.$$

Assim, a tabela completa é a seguinte.

Especificações	Volume de água em km^3	Percentual	Forma decimal do percentual
Água salgada	1 319 200 000	97%	0,97
Água doce	40 000 000	2,94%	0,0294
Gelo	24 480 000	1,8%	0,018
Água subterrânea	13 056 000	0,96%	0,0096
Lagos e rios	250 000	0,018%	0,00018
Vapor de água	13 600	0,001%	0,00001

167. ***Balas*** – Primeiramente, precisamos saber de quantas maneiras podemos obter 14 como soma de três parcelas inteiras, cada uma delas maior do que ou igual a 3, isto é,

$$14 = \underbrace{\ldots}_{\geq 3} + \underbrace{\ldots}_{\geq 3} + \underbrace{\ldots}_{\geq 3}.$$

As parcelas possíveis são $\left\{\begin{array}{ccccccc} 14 & = & 3 & + & 3 & + & 8 \\ 14 & = & 3 & + & 4 & + & 7 \\ 14 & = & 3 & + & 5 & + & 6 \\ 14 & = & 4 & + & 4 & + & 6 \\ 14 & = & 4 & + & 5 & + & 5 \end{array}\right.$

Agora, para cada uma dessas possibilidades, podemos fazer diferentes distribuições entre as três crianças, conforme a tabela seguinte. Observe que, quando as três parcelas são diferentes, temos seis possibilidades e, quando duas são iguais, temos apenas três possibilidades.

	1ª criança	2ª criança	3ª criança
$14 = 3+3+8$	3	3	8
	3	8	3
	8	3	3
$14 = 3+4+7$	3	4	7
	3	7	4
	4	3	7
	4	7	3
	7	3	4
	7	4	3
$14 = 3+5+6$	3	5	6
	3	6	5
	5	3	6
	5	6	3
	6	3	5
	6	5	3
$14 = 4+4+6$	4	4	6
	4	6	4
	6	4	4
$14 = 4+5+5$	4	5	5
	5	4	5
	5	5	4

Assim, temos $3+6+6+3+3=21$ maneiras diferentes de distribuir as balas entre as três crianças.

168. ***Minutos*** – Observemos primeiramente que

$$\frac{5}{6}\,\mathrm{h} = \frac{5}{6} \times 60\,\mathrm{min} = 50\,\mathrm{min},$$

de modo que a prova durou 4h50min. Somando as horas e os minutos, obtemos

$$12\text{h}35\text{min} + 4\text{h}50\text{min} = 16\text{h}85\text{min}.$$

Mas, 85 min = 1h25min. Logo, a prova termina às 16h85min = 17h25min.

169. ***Menor número*** – Um número só é divisível por 4 se o número formado pelos seus dois últimos algarismos for divisível por 4. Assim, usando apenas os algarismos 1, 2, 3, 4 e 9, as únicas possibilidades são 12, 24, 32 ou 92. Como 9 é o maior algarismo, devemos colocá-lo “o mais à direita possível”, de modo que 9 deve ser o algarismo da casa das dezenas, ou seja, nosso número termina com 92. Os outros algarismos 1, 3 e 4, devem aparecer em ordem decrescente à esquerda de 92, ou seja, os três primeiros algarismos do número devem ser 134. Portanto, o número procurado é 13 492.

170. ***Contas do papagaio***

(a) Temos $8 \xrightarrow{\times 5} 40 \xrightarrow{+14} 54 \xrightarrow{\div 6} 9 \xrightarrow{-1} 8$. Logo, o papagaio grita 8.

(b) Devemos fazer a operação inversa daquela que o papagaio fez, começando da última operação, ou seja, somar 1 ao número, multiplicar o número por 6, depois subtrair 14 e dividir por 5 o resultado:

$$3 \xrightarrow{+1} 4 \xrightarrow{\times 6} 24 \xrightarrow{-14} 10 \xrightarrow{\div 5} 2.$$

Logo, Antônio soprou 2 no ouvido do papagaio.

(c) Observe que $7 \xrightarrow{+1} 8 \xrightarrow{\times 6} 48 \xrightarrow{-14} 34 \xrightarrow{\div 5} 6{,}8$. Como 6,8 não é um número inteiro, Antônio não vai soprá-lo ao ouvido do papagaio e, mesmo que soprasse, o papagaio não saberia realizar a primeira operação, que seria multiplicar $6{,}8 \times 5$.

(d) Quando Antônio sopra um número n, o papagaio faz as operações

$$n \xrightarrow{\times 5} 5n \xrightarrow{+14} 5n+14 \xrightarrow{\div 6} \frac{5n+14}{6} \xrightarrow{-1} \frac{5n+14}{6} - 1.$$

O papagaio só saberá calcular a resposta se $5n + 14$ for divisível por 6, ou seja, se for da forma $6k$, com k inteiro não-negativo. Se $5n + 14 = 6k$, então $5n + 2 = 6(k - 2)$ e, multiplicando ambos os lados por 5, resulta $25n + 10 = 6(5k - 10)$, donde $n + 24n = 25n = 6(5k - 10) - 12 + 2$, ou seja, $n = 6(5k - 12) + 2 - 24n = 6(5k - 12 - 4n) + 2$. Assim, se Antônio sopra um número n da forma $6m + 2$, o papagaio faz as operações

$$6m+2 \xrightarrow{\times 5} 30m+10 \xrightarrow{+14} 30m+24 \xrightarrow{\div 6} 5m+4 \xrightarrow{-1} 5m+3$$

e grita o número $5m + 3$. Se n não for dessa forma, o papagaio permanece mudo. Logo, Antônio só pode soprar os números

$$2, 8, 14, 20, 26, 32, 38, \ldots$$

e o papagaio só pode responder, respectivamente,

$$3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, \ldots.$$

171. ***Soma maior que 34*** – O maior número de quatro algarismos é 9 999, cuja soma dos algarismos é $4 \times 9 = 36$. Os números de quatro algarismos cuja soma dos algarismos é 35 são 8 999, 9 899, 9 989 e 9 998. Logo, temos cinco números de quatro algarismos com soma dos seus algarismos maior do que 34, que são os números 8 999, 9 899, 9 989, 9 998 e 9 999.

172. ***Nenhum 1*** – Fatorando 111 111, obtemos $111\,111 = 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$. Segue daí que é possível, sim, escrever o número 111 111 como um produto de dois fatores, nenhum deles terminando em 1. Por exemplo, $111\,111 = 3 \times 37\,037$. Mas existem outras possibilidades, como, por exemplo, $111\,111 = 7 \times 15\,873$.

Na verdade, é possível listar todas as possibilidades. São elas

$$3 \times 37\,037, \quad 7 \times 15\,873, \quad 13 \times 8\,547, \quad 33 \times 3\,367, \quad 37 \times 3\,003,$$

$$39 \times 2\,849, \quad 77 \times 1\,443, \quad 143 \times 777, \quad 259 \times 429 \quad \text{e} \quad 273 \times 407.$$

Logo, Roberto tem 10 opções para escrever 111 111 na forma desejada.

173. ***Números equilibrados*** – Note que se um número equilibrado tem os três algarismos distintos, diferentes de zero, então, com os mesmos algarismos, obtemos seis números equilibrados. Para isso, basta trocar os algarismos de posição. Por exemplo, 123, 132, 213, 231, 312 e 321.

Se um dos três algarismos do número equilibrado for 0, então com esses algarismos obtemos apenas quatro números equilibrados, pois o 0 não pode estar na casa da centena. Por exemplo, 102, 120, 201 e 210.

Assim, vamos variar apenas os algarismos da centena e da dezena. Como o algarismo da unidade é a média desses dois algarismos, esses dois algarismos devem ser ambos pares ou ambos ímpares. Listamos os possíveis números equilibrados a partir do algarismo das centenas.

							total de números equilibrados
$1 :\rightsquigarrow$	111	132	153	174	195	$\rightsquigarrow$	$1+4\times 6=25$
$2 :\rightsquigarrow$	201	222	243	264	285	$\rightsquigarrow$	$4+1+3\times 6=23$
$3 :\rightsquigarrow$		333	354	375	396	$\rightsquigarrow$	$1+3\times 6=19$
$4 :\rightsquigarrow$		402	444	465	486	$\rightsquigarrow$	$4+1+2\times 6=17$
$5 :\rightsquigarrow$			555	576	597	$\rightsquigarrow$	$1+2\times 6=13$
$6 :\rightsquigarrow$			603	666	687	$\rightsquigarrow$	$4+1+6=11$
$7 :\rightsquigarrow$				777	798	$\rightsquigarrow$	$1+6=7$
$8 :\rightsquigarrow$				804	888	$\rightsquigarrow$	$4+1=5$
$9 :\rightsquigarrow$					999	$\rightsquigarrow$	1

Somando, temos 121 números equilibrados de três algarismos.

174. ***Números primos*** – Os números primos entre 70 e 110 são

$$71, \quad 73, \quad 79, \quad 83, \quad 89, \quad 97, \quad 101, \quad 103, \quad 107 \quad \text{e} \quad 109.$$

Subtraindo 1 de todos esses números, obtemos a lista

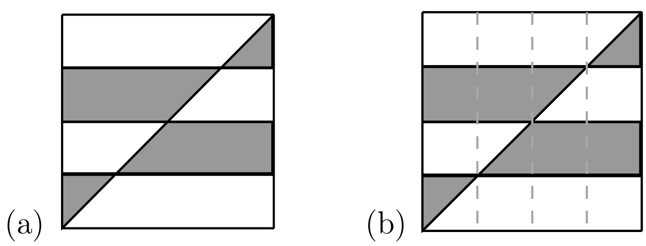
$$70, \quad 72, \quad 78, \quad 82, \quad 88, \quad 96, \quad 100, \quad 102, \quad 106 \quad \text{e} \quad 108.$$

Dessa lista, os múltiplos de 3 são 72, 78, 96, 102 e 108. Logo, os números procurados são

$$24=72\div 3,\ 26=78\div 3,\ 32=96\div 3,\ 34=102\div 3 \text{ e } 36=108\div 3.$$

De fato, temos $24\times 3+1=73, 26\times 3+1=79, 32\times 3+1=97, 34\times 3+1=103$ e $36\times 3+1=109$.

175. ***Quadro moderno***



A figura (a) mostra como foi pintado o quadrado nas duas cores, mas ainda não sabemos qual dessas partes é azul ou verde. Para isso, dividimos o quadrado em quatro faixas verticais, como na figura (b), com o que o quadrado ficou dividido em 16 quadradinhos iguais. A parte não hachurada compreende

$$\underbrace{\text{4 meios quadrados}}_{\text{2 quadrados}} + 8 \ \text{ quadrados} = 10 \text{ quadrados}.$$

Logo, a parte não hachurada corresponde a 10/16 do quadro, ou 5/8 e, portanto, a parte hachurada corresponde a

$$\frac{16}{16}-\frac{10}{16}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}.$$

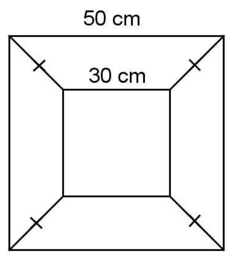
Assim, a parte hachurada da figura é a que foi pintada de azul e corresponde a 3/8 do quadro.

176. ***Encontro de amigos*** – Eu chegarei quando meu relógio marcar 10h05min, uma vez que penso que meu relógio está adiantado cinco minutos. Como ele está atrasado dez minutos, chegarei, na verdade, às 10h15min. Meu amigo chegará quando seu relógio marcar 10h, pois ele pensa que o relógio dele está correto, mas, na realidade, serão 09h55min. Logo, meu amigo chegará vinte minutos antes de mim.

177. ***Trabalho comunitário*** – A resposta correta é (b).

O número total de alunos dessa classe é $22+18=40$, dos quais 60% foram prestar trabalho comunitário, isto é, $0{,}6\times 40=24$. O número mínimo de alunas que participaram desse trabalho é obtido quando o número de alunos que participaram é máximo, ou seja, quando todos os 22 alunos se envolverem no trabalho, restando o mínimo de duas vagas para as alunas.

178. ***Área de trapézios*** – A resposta correta é (e).



Unindo os quatro trapézios, formamos um quadrado de 50 cm de lado e, portanto, de 2 500 cm^2 de área. Como o "buraco" quadrado tem 30 cm de lado, sua área é de $30\times 30=900$ cm^2. Assim, a área de cada um dos quatro trapézios, em cm^2, é dada por $(2\,500-900)\div 4=1\,600\div 4=400$.

179. ***Adivinhação*** – Já de início sabemos que o maior dos dois números

- é par, por ser o dobro do menor, mas não termina em zero, porque o maior e o menor número não possuem algarismos em comum;
- seu algarismo das dezenas é 2, no mínimo, porque sua metade é um número com dois algarismos e
- a soma de seus algarismos é 9, no máximo, porque essa soma é um dos algarismos do menor número.

Logo, o menor candidato a maior dos dois números é 22 e o maior é 72. Depois de 22, o número par seguinte é 24, que desconsideramos porque sua metade é 12, que repete o algarismo 2. Já 26 é candidato nesse critério, mas 28 não é, por ter soma de algarismos igual a 10. Continuando até 72, obtemos todos os candidatos, indicados na tabela seguinte.

maior	22	26	32	34	36	44	54	62	72
menor	11	13	16	17	18	22	27	31	36

Por verificação, temos que 34 e 17 é a única solução, tendo sido os dois números em que pensei.

180. ***Dezoito números consecutivos*** – Uma sequência de dezoito números consecutivos sempre possui dois termos que são múltiplos de 9. A soma dos algarismos de um múltiplo de 9 sempre é um múltiplo de 9. Logo, toda sequência de dezoito números consecutivos sempre possui dois termos que são divisíveis por 9 e cuja soma de seus algarismos também é divisível por 9. Agora, cada um desses dois números têm três algarismos, portanto, os únicos múltiplos de 9 que podem ser a soma dos algarismos são 9, 18 e 27. No entanto, 999 é o único número de três algarismos cuja soma dos algarismos é 27 e a única sequência de dezoito números consecutivos de três dígitos que o inclua é a sequência de 982 a 999, que não inclui número de três algarismos com soma de algarismos igual a 9 e um único com essa soma igual a 27. Assim, as únicas possibilidades para as somas dos algarismos dos dois múltiplos de 9 da sequência são

(i) 9 e 9; (ii) 9 e 18; (iii) 18 e 18; (iv) 18 e 27.

Vejamos alguns exemplos de cada um desses quatro casos.

(i) 9 e 9: um dos números é 144 e o outro é $135 = 144 - 9$ ou $153 = 144 + 9$. Duas possíveis sequências são

$$\underbrace{130}_{1^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{2^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{3^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{4^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{5^{\underline{o}}}, \underbrace{135}_{6^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{7^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{8^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{9^{\underline{o}}},$$
$$\underbrace{\quad}_{10^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{11^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{12^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{13^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{14^{\underline{o}}}, \underbrace{144}_{15^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{16^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{17^{\underline{o}}}, \underbrace{147}_{18^{\underline{o}}};\ \text{e}$$
$$\underbrace{141}_{1^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{2^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{3^{\underline{o}}}, \underbrace{144}_{4^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{5^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{6^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{7^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{8^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{9^{\underline{o}}},$$
$$\underbrace{\quad}_{10^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{11^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{12^{\underline{o}}}, \underbrace{153}_{13^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{14^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{15^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{16^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{17^{\underline{o}}}, \underbrace{158}_{18^{\underline{o}}}.$$

(ii) 9 e 18: um dos números é 900 e o outro é 891 ou 909. Duas possíveis sequências são

$$\underbrace{887}_{1^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{2^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{3^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{4^{\underline{o}}}, \underbrace{891}_{5^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{6^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{7^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{8^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{9^{\underline{o}}},$$
$$\underbrace{\quad}_{10^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{11^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{12^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{13^{\underline{o}}}, \underbrace{900}_{14^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{15^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{16^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{17^{\underline{o}}}, \underbrace{904}_{18^{\underline{o}}};\ \text{e}$$
$$\underbrace{898}_{1^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{2^{\underline{o}}}, \underbrace{900}_{3^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{4^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{5^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{6^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{7^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{8^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{9^{\underline{o}}},$$
$$\underbrace{\quad}_{10^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{11^{\underline{o}}}, \underbrace{909}_{12^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{13^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{14^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{15^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{16^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{17^{\underline{o}}}, \underbrace{915}_{18^{\underline{o}}}.$$

(iii) 18 e 18: um dos números é 828 e o outro é 819 ou 837. Duas possíveis sequências são

$$\underbrace{811}_{1^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{2^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{3^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{4^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{5^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{6^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{7^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{8^{\underline{o}}}, \underbrace{819}_{9^{\underline{o}}},$$

$$\underbrace{\quad}_{10^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{11^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{12^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{13^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{14^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{15^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{16^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{17^{\underline{o}}}, \underbrace{828}_{18^{\underline{o}}}; \text{ e}$$

$$\underbrace{823}_{1^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{2^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{3^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{4^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{5^{\underline{o}}}, \underbrace{828}_{6^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{7^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{8^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{9^{\underline{o}}},$$

$$\underbrace{\quad}_{10^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{11^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{12^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{13^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{14^{\underline{o}}}, \underbrace{837}_{15^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{16^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{17^{\underline{o}}}, \underbrace{840}_{18^{\underline{o}}}.$$

(iv) 18 e 27: um dos números é 999 e temos uma única opção para a sequência, a saber,

$$\underbrace{982}_{1^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{2^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{3^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{4^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{5^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{6^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{7^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{8^{\underline{o}}}, \underbrace{990}_{9^{\underline{o}}},$$

$$\underbrace{\quad}_{10^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{11^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{12^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{13^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{14^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{15^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{16^{\underline{o}}}, \underbrace{\quad}_{17^{\underline{o}}}, \underbrace{999}_{18^{\underline{o}}}.$$

Analisemos, agora, cada caso. Nos casos (i) e (ii), um dos números é divisível por 9, que é a soma de seus algarismos. No caso (iv), um dos números é 999, que é divisível por 27. Finalmente, no caso (iii), um dos dois múltiplos de 9 necessariamente é par, pois são dois múltiplos consecutivos de 9. Logo, esse número é um múltiplo de 2 e de 9, portanto é um múltiplo da soma de seus algarismos, que é 18.

181. ***Completar uma tabela*** – Observe que em cada quadrado formado por quatro quadradinhos, o número que está na parte inferior, à direita, é a soma dos outros três números. Assim, preenchemos a tabela.

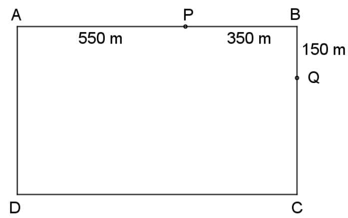
0	1	2	3	4
1	2	5	10	$3+4+10=17$
2	$1+2+2=5$	$2+5+5=12$	$5+10+12=27$	$10+17+27=54$
3	10	27	66	147
4	17	54	147	**A**

Logo:

$$\mathbf{A} = 66 + 147 + 147 = 360.$$

182. ***Procurando múltiplos de 9*** – Sempre existe uma diferença que é um múltiplo de 9. De fato, quando dividimos um número por 9, podemos encontrar nove restos diferentes, a saber, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ou 8. Logo, entre os dez números do conjunto, pelo menos dois deles têm mesmo resto quando divididos por 9, já que temos, no máximo, nove restos diferentes. Quando tomamos a diferença desses dois números que têm o mesmo resto, obtemos um número com resto zero, ou seja, divisível por 9.

183. ***Correndo numa praça*** – A distância que o atleta percorre a cada volta completa é igual ao perímetro da praça, de $2 \times 900 + 2 \times 600 = 3\,000$ m.
Como 15,5 km $= 15\,500$ m e $5 \times 3\,000 + 500 = 15\,500$ m, o atleta dá cinco voltas completas (partindo de P e retornando a P) e ainda corre mais 500 m. Portanto, ele para no ponto Q, 150 m além do vértice B, indicado na figura.



184. ***Ovos para um bolo*** – Como os 43 bolos têm a mesma receita, o número de ovos que a doceira precisa é um múltiplo de 43. Por outro lado, esse número também é um múltiplo de 2, 3, 4, 5 e 6, acrescido de 1. O MMC de 2, 3, 4, 5 e 6 é 60, mas $60 + 1 = 61$ não é múltiplo de 43. Precisamos, então, encontrar um número com essas duas propriedades:

- é um múltiplo de 43;
- acrescido de 1 é múltiplo de 2, 3, 4, 5 e 6.

Lembre, também, que como a receita gasta menos do que nove ovos, o número que estamos procurando é menor do que $43 \times 9 = 387$. Temos:

$$\begin{array}{ll} 60 \times 2 + 1 = 121 & \text{não é múltiplo de 43;} \\ 60 \times 3 + 1 = 181 & \text{não é múltiplo de 43;} \\ 60 \times 4 + 1 = 241 & \text{não é múltiplo de 43;} \\ 60 \times 5 + 1 = 301 & \text{é múltiplo de 43;} \\ 60 \times 6 + 1 = 361 & \text{não é múltiplo de 43.} \end{array}$$

Podemos parar por aqui, porque os próximos números serão maiores do que 387. Logo, a doceira comprou exatamente 301 ovos.

185. ***Cortando uma cartolina*** – Os lados do retângulo final obtido após os cortes são, cada um, a metade dos lados da cartolina original. Assim, o perímetro do retângulo original é o dobro do perímetro do retângulo final. Logo, o perímetro da cartolina antes do corte media $2 \times 129 = 258$ cm.

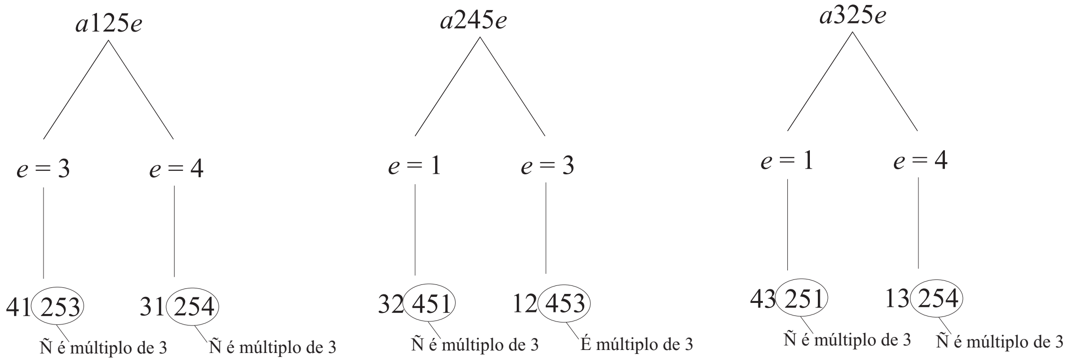
Observação: Ao fazer um corte paralelo a um dos lados do triângulo e pelo ponto médio desse lado, o outro corte que formará o retângulo só pode ocorrer no ponto médio do outro lado, em vista da semelhança desses triângulos. Assim, o enunciado contém um dado a mais, desnecessário para quem reconhece semelhança de triângulos e suas propriedades.

186. ***A soma errada*** – À primeira inspeção, podemos admitir que os três algarismos à direita dos números estejam corretos, isto é, estão corretos os algarismos 0, 1, 3, 4, 5, 6 e 8. Portanto, dentre os algarismos 2, 7 e 9, um deles está errado. O algarismo 9 está correto, pois se o mudarmos, a soma com 2 não estará certa. Assim, sobram 2 e 7. Se o 7 estivesse errado, então o 2 estaria correto, mas isso não é possível, pois $1 + 4 + 2 = 7$. Logo, é o 2 que está errado e deve ser substituído. Olhando novamente para a soma $1+4+2$, vemos que o resultado é um número com o algarismo da unidade igual a 1. Logo, o algarismo 2 deve ser substituído quatro vezes pelo 6. Fazendo essa substituição, verificamos que a soma fica correta.

187. ***Número de cinco algarismos*** – Para que $a\,b\,c$ seja divisível por 4, seus dois últimos algarismos devem formar um número divisível por 4. Como os algarismos são 1, 2, 3, 4 e 5, as únicas possibilidades são $b\,c = 12$, $b\,c = 24$, $b\,c = 32$ e $b\,c = 52$. Por outro lado, os números divisíveis por 5 terminam em 0 ou 5. Como 0 não está incluído, segue que $d = 5$, pois $b\,c\,d$ é divisível por 5. Isso exclui a possibilidade $bc = 52$, porque não podemos repetir o 5. Até agora temos três possibilidades, a saber,

$$a\,1\,2\,5\,e, \quad a\,2\,4\,5\,e \quad \text{e} \quad a\,3\,2\,5\,e\,.$$

Examinemos esses três casos para escolher os algarismos a e e, lembrando que não pode haver repetição.



Logo, o número é 12 453.

188. ***Tabela misteriosa*** – Observemos que:

- na última coluna estarão os múltiplos de 9, porque essa coluna está em branco e nenhum dos números que aparecem na tabela é múltiplo de 9;
- na 5ª linha estarão os múltiplos de 12, pois é nessa linha que aparece o único múltiplo de 12 da tabela (a saber, 24);
- na 4ª coluna estarão os múltiplos de 10, pois 40 é o único múltiplo de 10 na tabela;
- na 5ª coluna teremos múltiplos de 7, pois 42 e 49 são os únicos múltiplos de 7 na tabela;
- na 2ª linha estarão os múltiplos de 7, porque 1 e 7 são os únicos divisores de 49 menores do que 12;
- na 3ª coluna aparecerão os múltiplos de 2, pois 2 é o único divisor comum de 22 e 24 diferente de 1;
- na 3ª linha aparecerão os múltiplos de 11, pois $22 = 2 \times 11$ e os múltiplos de 2 já estão na 3ª coluna;
- na 6ª linha aparecerão os múltiplos de 6, pois os divisores de $42 = 2 \times 3 \times 7$ menores do que 12 e diferentes de 1 são 2, 3, 6 e 7. Os múltiplos de 2 e 7 já estão em seus respectivos lugares. Faltam os múltiplos de 3 e 6. Os únicos múltiplos de 6 na tabela são 24 e 42, e 24 já aparece na 5ª linha;
- na 2ª coluna e na 4ª linha aparecerão os múltiplos de 3 ou 5, pois $15 = 3 \times 5$;
- na 1ª coluna e na 1ª linha aparecerão os múltiplos de 4 ou 8, pois os divisores comuns de 32 e 40, menores do que 12 e diferentes de 1, são 2, 4 e 8, mas os múltiplos de 2 já estão na 3ª coluna.

Até aqui, a situação é a seguinte.

	4 ou 8	3 ou 5	2	10	7	9
4 ou 8	32			40		
7			14	70	49	63
11			22	10	77	99
3 ou 5		15				
12			24	120	84	108
6			12	60	42	54

Examinemos agora as possibilidades que se apresentam.

I - Repetição de ambos 30 e 60

	8	5	2	10	7	9
4	32	20	8	40	28	36
7	56	35	14	70	49	63
11	88	55	22	110	77	99
3	24	15	6	**30**	21	27
12	96	**60**	24	120	84	108
6	48	**30**	12	**60**	42	54

II - Três números repetidos

	4	5	2	10	7	9
8	32	40	16	80	56	72
7	28	35	14	70	49	63
11	44	55	22	110	77	99
3	12	15	6	**30**	21	27
12	48	**60**	**24**	120	84	108
6	**24**	**30**	12	**60**	42	54

III - Repetição de ambos 12 e 40

	8	3	2	10	7	9
4	32	**12**	8	**40**	28	36
7	56	21	14	70	49	63
11	88	33	22	110	77	99
5	**40**	15	10	50	35	45
12	96	36	24	120	84	108
6	48	18	**12**	60	42	54

IV - Apenas um número repetido

	4	3	2	10	7	9
8	32	**24**	16	80	56	72
7	28	21	14	70	49	63
11	44	33	22	110	77	99
5	20	15	10	50	35	45
12	48	36	**24**	120	84	108
6	**24**	18	12	60	42	54

Logo, a única solução é a da tabela IV.

189. ***Habitantes e esporte*** – O total de habitantes desta cidade é praticamente 30 000 e é divisível por 9 e 15. Logo, deve terminar em 0 ou 5 e a soma de seus algarismos deve ser um múltiplo de 9. Como 29 970 é o maior número que é menor do que 30 000 e tem fatores 9 e 15, podemos supor que essa seja a população total da cidade. Logo,

$$\frac{2}{15} \times 29\,970 = 3\,996 \quad \text{e} \quad \frac{2}{9} \times 29\,970 = 6\,660$$

é o número de mulheres e de homens, respectivamente, que praticam esporte somente nos fins de semana. A tabela dada indica que $8\,563 + 7\,582 = 16\,145$ pessoas não praticam esporte. Logo, a cidade tem $16\,145 \div 5 = 3\,229$ pessoas que praticam esporte regularmente e, portanto, $3\,229 - 1\,252 = 1\,977$ pessoas do sexo feminino praticam esporte regularmente. A tabela completa é a seguinte.

Não praticam esporte		Praticam esporte somente nos fins de semana		Praticam esporte regularmente		População
fem.	masc.	fem.	masc.	fem.	masc.	total
8 563	7 582	3 996	6 600	1 977	1 252	29 970

190. ***Botões luminosos*** – A resposta correta é (c).

A tabela mostra a cor de cada botão em cada etapa.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
início	azul	azul	azul	azul	azul	azul	azul	azul
apertando botão 1	verde	verde	azul	azul	azul	azul	azul	verde
apertando botão 3	verde	azul	verde	verde	azul	azul	azul	verde
apertando botão 5	verde	azul	verde	azul	verde	verde	azul	verde

Logo, os botões que ficaram com luzes verdes acesas no final são 1, 3, 5, 6 e 8, o que nos dá um total de cinco botões.

191. ***Qual é o número?*** – O problema é determinar os algarismos b, c, d, e e f tais que o número $b\,c\,d\,e\,f\,1$ seja o triplo de $1\,b\,c\,d\,e\,f$.

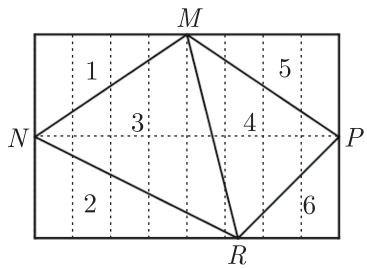
$$\boxed{\begin{array}{r} 1\,b\,c\,d\,e\,f \\ \times\ 3 \\ \hline b\,c\,d\,e\,f\,1 \end{array}}$$

De início vemos que $f = 7$ e, a partir daí, podemos ir descobrindo cada um dos algarismos, como segue.

$$\boxed{\begin{array}{r} 1\,b\,c\,d\,e\,7 \\ \times\ 3 \\ \hline b\,c\,d\,e\,7\,1 \end{array}} \rightsquigarrow \boxed{\begin{array}{r} 1\,b\,c\,d\,5\,7 \\ \times\ 3 \\ \hline b\,c\,d\,5\,7\,1 \end{array}} \rightsquigarrow \boxed{\begin{array}{r} 1\,b\,c\,8\,5\,7 \\ \times\ 3 \\ \hline b\,c\,8\,5\,7\,1 \end{array}} \rightsquigarrow \boxed{\begin{array}{r} 1\,b\,2\,8\,5\,7 \\ \times\ 3 \\ \hline b\,2\,8\,5\,7\,1 \end{array}}$$

Portanto, $b = 4$ e o número de partida é $142\,857$.

192. ***Jardim variado*** – Os triângulos 1, 2, 5 e 6 são retângulos, de modo que, para calcular suas áreas, vamos "enxergar" cada um deles como metade de um retângulo. Para que a nossa estratégia funcione, precisamos saber dividir o terreno retangular em retângulos menores.



Subdividimos o terreno em dezesseis retângulos de 15 por 40 m, como mostra a figura, cada um com uma área de $15 \times 40 = 600$ m^2. Então temos que

- a área do triângulo 1 = área do triângulo 5 = $\dfrac{1}{2} \times 4 \times 600 = 1\,200$ m^2;
- a área do triângulo 2 = $\dfrac{1}{2} \times 6 \times 600 = 1\,800$ m^2 e

- a área do triângulo 6 $= \dfrac{1}{2} \times 2 \times 600 = 600$ m^2.

Observe que a área do triângulo 4 é igual à área do terreno todo, subtraída das áreas dos triângulo 5 e 6 e da área da região à esquerda de MR. Contando retângulos, vemos que essa área mede $10 \times 600 = 6\,000$ m^2. Logo, a área do triângulo 4 é dada por

$$120 \times 80 - \Big(1\,200 + 600 + 6\,000\Big) = 9\,600 - 7\,800 = 1\,800 \text{ m}^2.$$

Finalmente, a área do triângulo 3 é a área total do terreno subtraída da soma das áreas já calculadas dos outros cinco triângulos, ou seja,

$$120 \times 80 - (2 \times 1\,200 + 2 \times 1\,800 + 600) = 9\,600 - 6\,600 = 3\,000 \text{ m}^2.$$

Para que o gasto seja o menor possível, as flores mais caras devem ser plantadas nas regiões menores. Como a menor região é a 6, nela deve ser plantada a flor mais cara, a rosa, gastando $3{,}50 \times 600 = 2\,100$ reais. A maior região é a 3, onde deve ser plantada a flor mais barata, o bem-me-quer, gastando $0{,}80 \times 3\,000 = 2\,400$ reais.

Nas regiões 1 e 5, com áreas iguais a $1\,200$ m^2, devem ser plantadas bromélias e cravos, contribuindo com $(3{,}00 + 2{,}20) \times 1\,200 = 6\,240$ reais. Nas regiões 2 e 4, com áreas iguais a $1\,800$ m^2, devem ser plantadas margarida e violeta, contribuindo com $(1{,}20 + 1{,}70) \times 1\,800 = 5\,220$ reais.

Temos, então, quatro diferentes maneiras de formar o jardim, mantendo o mesmo gasto mínimo de $2\,100 + 2\,400 + 6\,240 + 5\,220 = 15\,960$ reais. Apresentamos a seguir uma das quatro possibilidades de escolhas das flores com esse orçamento mínimo.

Região	Área m^2	Flor	Preço m^2	Total por flor
1	1 200	bromélia	3,00	$3{,}00 \times 1\,200 = 3\,600$
2	1 800	margarida	1,20	$1{,}20 \times 1\,800 = 2\,160$
3	3 000	bem-me quer	0,80	$0{,}80 \times 3\,000 = 2\,400$
4	1 800	violeta	1,70	$1{,}70 \times 1\,800 = 3\,060$
5	1 200	cravo	2,20	$2{,}20 \times 1\,200 = 2\,640$
6	600	rosa	3,50	$3{,}50 \times 600 = 2\,100$
				TOTAL: 15 960

193. ***O algarismo* 3** – Vejamos todas as vezes que Luis escreveu o algarismo 3:

- $3 \rightsquigarrow 1$;
- $\underbrace{13,\ 23}_{2},\ \underbrace{30,\ 31,\ 32,\ 33,\ \ldots,\ 39}_{11},\ \underbrace{43,\ \ldots,\ 93}_{6} \rightsquigarrow 2 + 11 + 6 = 19.$

Até aqui, ele escreveu vinte vezes o algarismo 3. Daí temos

$$\underbrace{103}_{21^{\underline{a}}},\ \underbrace{113}_{22^{\underline{a}}},\ \underbrace{123}_{23^{\underline{a}}},\ \underbrace{130}_{24^{\underline{a}}},\ \underbrace{131}_{25^{\underline{a}}}.$$

Logo, ao escrever o número 131, ele escreveu o algarismo 3 pela 25ª vez.

194. ***Soma de potências*** – Existe um padrão para o algarismo das unidades de uma potência de 3: ele tem período 4, pois se repete de quatro em quatro vezes. De fato, temos

$$\begin{array}{ll} 3 & 3^5 = 243 \\ 3^2 = 9 & 3^6 = \ldots 9 \\ 3^3 = 27 & 3^7 = \ldots 7 \\ 3^4 = 81 & 3^8 = \ldots 1 \end{array}$$

Como 444 é múltiplo de 4, o algarismo das unidades de 3^{444} é 1.

Analogamente, o algarismo das unidades de potências de 4 tem período 2. De fato, temos

$$\begin{array}{ll} 4^1 = 4 & 4^3 = 64 \\ 4^2 = 16 & 4^4 = 256 \end{array}$$

Como 333 é ímpar, o algarismo das unidades de 4^{333} é 4. Portanto, o algarismo das unidades de $3^{444}+4^{333}$ é $1+4=5$, de modo que ele é divisível por 5.

> LEMBRETE: Todo número terminado em 0 ou 5 é divisível por 5.

195. ***Telefonemas*** – Como João telefona para seus pais a cada três dias, podemos montar uma tabela indicando os dias da semana em que ocorreram os quatorze primeiros telefonemas de João.

Domingo	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
1º	6º	4º	2º	7º	5º	3º
8º	13º	11º	9º	14º	12º	10º

Analisando a primeira linha dessa tabela, percebemos que são sete telefonemas, um em cada dia da semana e que, a partir do sétimo telefonema, os dias começam a se repetir. Isso implica que os números que aparecem na segunda linha da tabela são obtidos dos números que aparecem na primeira linha somando 7. Por exemplo, João telefonará para seus pais aos domingos nos telefonemas de números

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1+7=8 \\ 8+7=15 \\ 15+7=22 \\ 22+7=29 \\ 29+7=36 \\ \vdots \end{array}$$

ou seja, nos números que deixam resto 1 quando divididos por 7. Com esse raciocínio, podemos determinar o dia da semana em que cai uma ligação, analisando o resto da divisão do número do telefonema por 7.

Domingo	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
1	6	4	2	7	5	3
8	13	11	9	14	12	10
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
resto 1	resto 6	resto 4	resto 2	resto 0	resto 5	resto 3

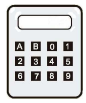
Dividindo 100 por 7, obtemos $100 = 7 \times 14 + 2$. Logo, o resto da divisão de 100 por 7 é 2 e segue que o centésimo telefonema ocorre numa quarta-feira.

196. ***O maior produto*** – Observe que obtemos o maior resultado possível se um dos números começar com o algarismo 5 e o outro com 4. Além disso, como só temos cinco algarismos, um dos dois números deve ter somente um ou dois algarismos. Vejamos as possibilidades que dão o maior produto.

- um dos fatores tem um algarismo:

  $5\,321 \times 4 = 21\,284$; $4\,321 \times 5 = 21\,605$.

É bom usar uma calculadora.



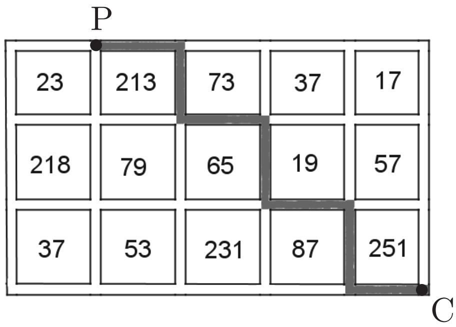
- um dos fatores tem dois algarismos:

$$532 \times 41 = 21\,812\,;\;\; 531 \times 42 = 22\,302\,;\;\; 521 \times 43 = 22\,403\,;$$

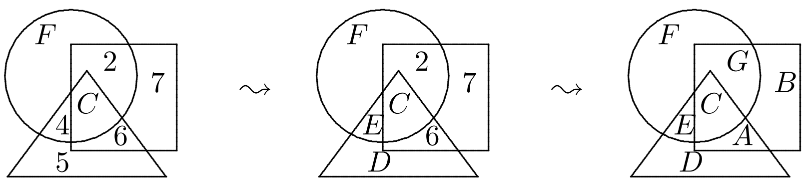
$$432 \times 51 = 22\,032\,;\;\; 431 \times 52 = 22\,412\,;\;\; 421 \times 53 = 22\,313.$$

Logo, o melhor resultado é $431 \times 52 = 22\,412$.

197. ***O caminho da Joaninha*** – Os números primos que aparecem na tabela são 23, 73, 37, 17, 79, 19, 37, 53 e 251. Logo, só há dois caminhos que Dona Joaninha pode percorrer. Um é o apresentado na figura. O outro é idêntico, exceto que o azulejo 87 fica à esquerda, passando entre 87 e 231 e, depois, seguindo horizontalmente.



198. ***O lugar dos amigos*** – Observe que 3 é o único número dentro das três figuras e 1 é o único que não está dentro de um polígono, logo Celina ⇝ 3 e Fábio ⇝ 1. Agora, 4 é o único número dentro do triângulo e do círculo, logo Elisa ⇝ 4. Nessa situação, 5 é o único dentro do triângulo, mas não do quadrado, assim Diana ⇝ 5. Finalmente, 7 é o único número dentro de uma única figura, logo Bento ⇝ 7. Resta, então, 2 dentro do círculo, portanto, Guilherme ⇝ 2 e Ana ⇝ 6.



199. ***Quadrado perfeito?*** – Lembre que um número é um quadrado perfeito se na sua decomposição em fatores primos os expoentes são todos pares. Por exemplo,

- $5^4 \times 7^6 \times 13^2$ é um quadrado perfeito, pois é igual a $(5^2 \times 7^3 \times 13)^2$.

Como nenhum número elevado ao quadrado termina em 3, segue que $N_1 = 333\ldots3$ não é um quadrado.

Temos que $N_2 = 666\ldots6 = 2 \times 333\ldots3$. Como $333\ldots3$ é ímpar, então na decomposição de N_2 em fatores primos aparece só um fator 2. Logo, N_2 não é um quadrado.

Vejamos a divisibilidade por 3. A soma dos algarismos desses números é

$$\begin{aligned} N_3 &\rightsquigarrow 50 \times 15 = 750 \\ N_4 &\rightsquigarrow 50 \times 21 = 1\,050 \\ N_5 &\rightsquigarrow 50 \times 27 = 1\,350 \end{aligned}$$

Como todas essas somas são divisíveis por 3, essas três somas também são divisíveis por 3. Logo, se algum deles fosse um quadrado perfeito, teria que ser divisível por 9.

A soma dos algarismos de N_3 e N_4 não é divisível por 9, logo esses dois números não são divisíveis por 9 e, consequentemente, não são quadrados perfeitos.

Como $1\,350$ é divisível por 9, então N_5 é divisível por 9. Temos

$$2727272727\ldots27 \div 9 = 303030\ldots03$$

e

$$303030\ldots03 \div 3 = 101010\ldots01,$$

portanto,

$$2727272727\ldots27 = 3^2 \times 303030\ldots03 = 3^3 \times 101010\ldots01.$$

Note que $101010\ldots01$ tem 49 algarismos, dos quais 25 são iguais a 1 e os outros iguais a 0. Logo, a soma de seus algarismos é 25 e, portanto, não é divisível por 3. Assim, $2727272727\ldots27$ é divisível por 3^3, mas não por 3^4. Assim, concluímos que tampouco N_5 é um quadrado perfeito.

200. ***Preenchendo quadradinhos*** – A operação é equivalente a

$$(\square + \square - \square) \times \square = 4 \times \square$$

portanto, o lado esquerdo da igualdade é um múltiplo de 4. Usando apenas os números 1, 2, 3, 5 e 6, é possível verificar que as únicas possibilidades são

$$(\square + \square - \square) \times \boxed{2} = 4 \times \boxed{1} \quad \text{ou} \quad (\square + \square - \square) \times \boxed{1} = 4 \times \boxed{2}$$

Daí, podemos concluir que

$$(\boxed{3} + \boxed{5} - \boxed{6}) \times \boxed{2} = 4 \times \boxed{1} \quad \text{ou} \quad (\boxed{6} + \boxed{5} - \boxed{3}) \times \boxed{1} = 4 \times \boxed{2}$$

são as únicas possibilidades de preenchimento.

201. ***Os três números*** – Como 13 983 termina em 3, a soma dos algarismos das unidades dos três números diferentes deve ser 13 ou 23. Como 23 não pode ser obtido na soma de 1, 2, 4 e 7, só temos uma opção, a saber, $2+4+7=13$.

			1	
				2
				4
				7
1	3	9	8	3

Agora, a soma dos algarismos das dezenas deve ser $8-1=7$ e, portanto, só pode ser $1+2+4=7$. Completamos os algarismos das dezenas, tendo o cuidado de não repetir o mesmo algarismo num mesmo número. Temos somente as três opções seguintes.

			1	
			1	2
			2	4
			4	7
1	3	9	8	3

			1	
			4	2
			1	4
			2	7
1	3	9	8	3

			1	
			4	2
			2	4
			1	7
1	3	9	8	3

Os algarismos das centenas devem somar 9, o que nos deixa duas possibilidades, $4+4+1$ ou $1+1+7$. Como nas três opções o algarismo 4 ocorre em dois dos três números, escolhemos a possibilidade $1+1+7$ para a centena, para que não apareça repetido o algarismo 4. Também precisamos cuidar para que não apareçam repetidos o 1 e o 7, o que elimina a terceira opção acima e nos leva a duas opções para as centenas, como segue.

			1	
		7	1	2
		1	2	4
		1	4	7
1	3	9	8	3

			1	
		1	4	2
		7	1	4
		1	2	7
1	3	9	8	3

Finalmente, os algarismos das unidades de milhar devem somar 13 e é fácil escolhê-los. Assim, Sofia pode chegar a 13 983 de duas maneiras, como segue.

			1	
	4	7	1	2
	7	1	2	4
	2	1	4	7
1	3	9	8	3

			1	
	7	1	4	2
	2	7	1	4
	4	1	2	7
1	3	9	8	3

202. ***Preencher uma tabela*** – Existem várias maneiras de preencher a tabela, dependendo da casa que escolhemos para ser preenchida, o que pode ser feito de várias maneiras.

Vejamos um exemplo de como preencher a tabela. Inicialmente, temos quatro casas que podem ser preenchidas, todas marcadas com X. Escolhemos uma delas e preenchemos de acordo com a segunda regra. Repetimos esse processo até a tabela estar completamente preenchida.

X	X	X	
1	**2**	X	

1	**2**	2	

$\leadsto$

3			
1	**2**	2	

$\leadsto$

3		4	
1	**2**	2	

$\leadsto$

3		4	
1	**2**	2	6

Mas, para colocar em cada casa o maior número possível, a idéia é, a cada vez, examinar todas as casas que podem ser preenchidas e <u>só</u> preencher a casa em que podemos colocar o maior número. Se em duas dessas casas o número a ser colocado for o mesmo, preencheremos a que tem o menor número de casas vizinhas já preenchidos. Vamos lá!

3			
1	**2**		

$\leadsto$

3	6		
1	**2**		

$\leadsto$

9			
3	6		
1	**2**		

$\leadsto$

9	18		
3	6		
1	**2**		

$\leadsto$

27	54		
9	18		
3	6		
1	**2**		

$\leadsto$

27	54	72	
9	18		
3	6		
1	**2**		

$\leadsto$

27	54	72	
9	18	144	
3	6		
1	**2**		

$\leadsto$

27	54	72	216
9	18	144	
3	6		
1	**2**		

$\leadsto$

27	54	72	216
9	18	144	432
3	6		
1	**2**		

$\leadsto$

27	54	72	216
9	18	144	432
3	6		576
1	**2**		

$\leadsto$

27	54	72	216
9	18	144	432
3	6	1178	576
1	**2**		

$\leadsto$

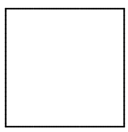
27	54	72	216
9	18	144	432
3	6	1 178	576
1	**2**		1 754

$\leadsto$

27	54	72	216
9	18	144	432
3	6	1 178	576
1	**2**	3 516	1 754

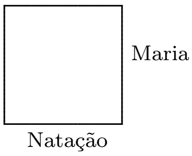
Logo, o maior número que pode ser escrito na tabela é 3 516.

203. ***Olimpíada de Pequim*** – Para iniciar, escolhemos um lugar para um dos atletas, digamos, para Maria.



Maria

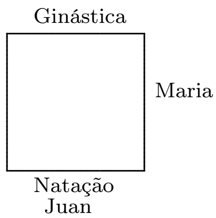
(a) Quem pratica natação está à esquerda de Maria. Logo, só podemos ter a configuração abaixo.



(b) Quem pratica ginástica está à frente de Juan. Existem duas únicas possibilidades: Maria pratica ginástica ou Maria não pratica ginástica.

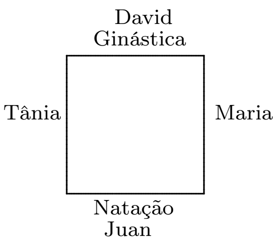
Maria pratica ginástica

Maria não pratica ginástica

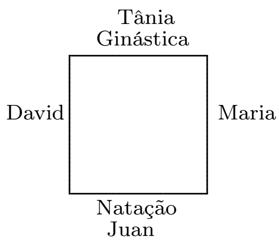


(c) Como Tânia e David sentaram-se juntos, então somente a segunda opção do item anterior – *Maria não pratica ginástica* – pode satisfazer essa condição. Ela gera as seguintes duas possibilidades.

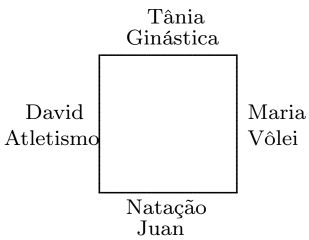
Maria não pratica ginástica

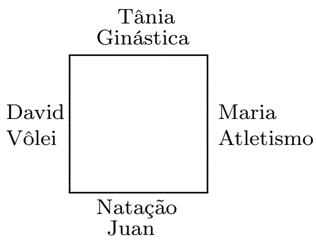


Maria não pratica ginástica



(d) Como uma mulher sentou-se ao lado de quem pratica vôlei, é a segunda opção acima que é a correta, e temos duas possibilidades para o atleta que pratica atletismo: David ou Maria.





204. ***Culturas diferentes***

(a) (i) 03/12 significa 12 de março para Ralph e 03 de dezembro para Jorge, portanto, é uma data ambígua.

(ii) 18/08 só pode ser mesmo 18 de agosto.

(iii) 05/05 só pode ser 05 de maio.

Logo, (i) é uma data em que eles não podem se escrever.

(b) A data só é ambígua quando o número do dia também puder representar o número do mês, logo quando é um número de 1 a 12. Por outro lado, nesses números não há ambiguidade quando o número do mês for igual ao número do dia. Por exemplo, 05/05 só pode ser 05 de maio. Por isso, em cada mês, eles devem evitar 11 dias. Logo, os períodos mais longos em que eles não podem se escrever ocorrem em 11 dias consecutivos de janeiro – de 02 a 12 de janeiro – e em dezembro – de 02 a 12 de dezembro. Observe que nos outros meses os períodos em que eles não podem se escrever são menores. Por exemplo,

- em abril eles não podem se escrever de 01/04 a 12/04, exceto em 04/04;
- em setembro eles não podem se escrever de 01/09 a 12/09, exceto em 09/09.

205. ***Uma liquidação*** – Na liquidação, exceto aos sábados, os produtos estão 50% mais baratos. Nos sábados, com o desconto adicional de 20%, os produtos estão custando 80% dos preços fora dos sábados, ou seja

$$80\% \text{ de } 50\% = \frac{80}{100} \times \frac{50}{100} = \frac{40}{100} = 40\% \text{ do preço original.}.$$

Logo, Roberta deixou de economizar 60%, que corresponde aos R\$ 50,40. Como

$$\begin{array}{lll} 60\% & \rightsquigarrow & 50{,}40, \\ 10\% & \rightsquigarrow & 50{,}40 \div 6 = 8{,}4 \text{ e} \\ 100\% & \rightsquigarrow & 8{,}4 \times 10 = 84{,}00, \end{array}$$

o preço da calça antes da liquidação era de R\$ 84,00.

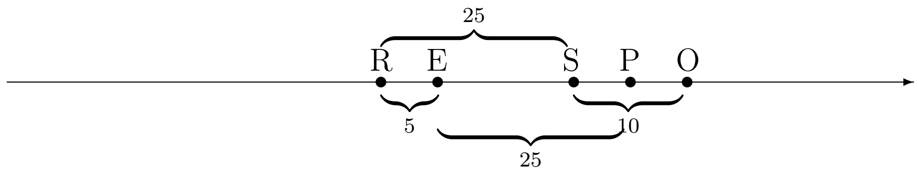
206. ***Número com muitos zeros*** – A resposta correta é (d).

Vamos comparar os cinco números sem efetuar cálculos. Temos

$$\begin{array}{rcl} 3+a & = & 3{,}000\ldots0001 \text{ é menor do que } 4; \\ 3-a & & \text{é menor do que } 3; \\ 3a & = & 0{,}000\ldots0003 \text{ é menor do que } 1; \\ \dfrac{3}{a} & = & \dfrac{3}{0{,}000\ldots0001} = \dfrac{3}{\dfrac{1}{10^{2010}}} = 3 \times 10^{2010} \text{ é maior do que 10 e} \\ \dfrac{a}{3} & = & \dfrac{0{,}000\ldots0001}{3} \text{ é menor do que } 0{,}000\ldots0001\,. \end{array}$$

Assim, $3/a$ representa o maior número.

207. ***Corrida das tartarugas*** – Vamos representar cada tartaruga numa reta, utilizando sua letra inicial. Os dados finais da corrida estão representados na figura dada.



Logo, Sininha está 20 m à frente de Elzinha e, portanto, Pulinha está 5 m à frente de Sininha. A ordem de chegada é O, P, S, E e R.

208. ***Que memória...*** – O número começa com 25 porque 5^2 é a única potência de 5 com dois algarismos.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 2 & 5 & & & \\ \hline\end{array}\,.$$

Os candidatos aos dois últimos algarismos são as potências de 2 com dois algarismos, a saber, 16, 32 e 64. Como 32 não serve, por apresentar o 2 repetido, temos as opções

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 2 & 5 & & 1 & 6 \\ \hline\end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 2 & 5 & & 6 & 4 \\ \hline\end{array}\,.$$

O algarismo do meio é um múltiplo de 3, portanto, só pode ser 3, 6 ou 9, mas o 6 não pode ser repetido. Para escolher entre as duas opções acima, basta lembrar que a soma dos cinco algarismos deve ser é ímpar e, como $2 + 5$ é ímpar, a soma dos três últimos deve ser par. Assim, a segunda opção acima fica descartada, pois não podemos completá-la com um múltiplo de 3, restando, apenas os números

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ \hline\end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 2 & 5 & 9 & 1 & 6 \\ \hline\end{array}\,.$$

O maior dos dois, $\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 2 & 5 & 9 & 1 & 6 \\ \hline\end{array}$, é o código bancário de Esquecinaldo.

209. ***Uma fração irredutível*** – Para que a fração seja irredutível, o numerador e o denominador não podem ter fator comum. Começamos calculando os fatores primos de $N = 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \cdots \times 10$, que são

$$2 \times 3 \times \underbrace{4}_{2^2} \times 5 \times \underbrace{6}_{2\times 3} \times 7 \times \underbrace{8}_{2^3} \times \underbrace{9}_{3^2} \times \underbrace{10}_{2\times 5}\,.$$

Logo, a decomposição de N em fatores primos é dada por

$$N = 2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7.$$

Podemos escolher diversas frações que satisfazem o problema, como segue.

(i) Se o numerador é 1, temos a fração $\dfrac{1}{2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7}$.

(ii) Se o numerador tem apenas um fator de N, temos as quatro frações

$$\frac{2^8}{3^4 \times 5^2 \times 7}\,; \quad \frac{3^4}{2^8 \times 5^2 \times 7}\,; \quad \frac{5^2}{2^8 \times 3^4 \times 7} \quad \text{e} \quad \frac{7}{2^8 \times 3^4 \times 5^2}\,.$$

(iii) Se o numerador tem dois fatores de N, temos as seis frações

$$\frac{2^8\times 3^4}{5^2\times 7}\,;\ \frac{2^8\times 5^2}{3^4\times 7}\,;\ \frac{2^8\times 7}{3^4\times 5^2}\,;\ \frac{3^4\times 5^2}{2^8\times 7}\,;\ \frac{3^4\times 7}{2^8\times 5^2}\quad \text{e}\quad \frac{5^2\times 7}{2^8\times 3^4}\,.$$

(iv) Se o numerador tem três fatores de N, temos as quatro frações

$$\frac{2^8\times 3^4\times 5^2}{7}\,;\quad \frac{2^8\times 3^4\times 7}{5^2}\,;\quad \frac{2^8\times 5^2\times 7}{3^4}\quad \text{e}\quad \frac{3^4\times 5^2\times 7}{2^8}.$$

(v) Se o numerador é N, temos a fração $\dfrac{2^8\times 3^4\times 5^2\times 7}{1}$.

Assim, ao todo, temos dezesseis dessas frações irredutíveis.

210. ***Transformar em decimal*** – Temos:

(a) $7\times\dfrac{2}{3}+16\times\dfrac{5}{12}=\dfrac{14}{3}+\dfrac{20}{3}=\dfrac{34}{3}=11+\dfrac{1}{3}=11{,}3333\ldots$

(b) $5-\left(2\div\dfrac{5}{3}\right)=5-\left(2\times\dfrac{3}{5}\right)=5-\dfrac{6}{5}=4-\dfrac{1}{5}=3,8$

(c) $1+\dfrac{2}{1+\frac{3}{1+4}}=1+\dfrac{2}{1+\frac{3}{5}}=1+\dfrac{2}{\frac{8}{5}}=1+2\times\dfrac{5}{8}=1+\dfrac{10}{8}=2+\dfrac{1}{4}=2{,}25$

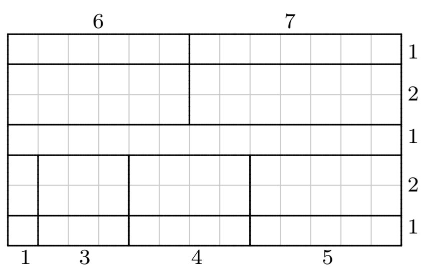
211. ***Uma sequência especial*** – Observe que:

- os números de 1 a 9 ocupam nove posições;
- os números de 10 a 99 ocupam $2\times 90=180$ posições;
- os números de 100 a 199 ocupam $3\times 100=300$ posições;
- os de 200 a 299 ocupam $3\times 100=300$ posições;
- os de 300 a 399 ocupam $3\times 100=300$ posições; etc.

$$\underbrace{100,\ldots 199}_{3\times 100=300},\ \underbrace{200,\ldots,299}_{3\times 100=300},\ \underbrace{300,\ldots,399}_{3\times 100=300},\ \underbrace{400,\ldots,499}_{3\times 100=300},\ \underbrace{500,\ldots,599}_{3\times 100=300},\ \underbrace{600,\ldots,699}_{3\times 100=300}$$

Assim, os algarismos usados para escrever de 1 a 699 ocupam $9+180+6\times 300=1\,989$ posições, logo faltam $2\,009-1\,989=20$ posições. Como $20=3\times 6+2$, precisamos ainda escrever de 700 a 706, obtendo 21 posições, com o algarismo 6 ocupando a posição 21. Logo, é o algarismo 0 que que ocupa a 2009ª posição.

212. ***Cortar um retângulo*** – Dividimos o retângulo em 13×7 quadradinhos de 1 cm de lado cada um. Agora, usamos que $13=1+3+4+5=6+7=0+13$ para obter a divisão em 13 retângulos diferentes. Você consegue encontrar outras formas de fazer essa divisão?



213. ***Medida de ângulo*** – A resposta correta é (b).

Temos que $A\widehat{O}C + C\widehat{O}E = 90^\circ$ e $C\widehat{O}E = D\widehat{O}Y$. Logo, $A\widehat{O}C = 90^\circ - D\widehat{O}Y$. Como $D\widehat{O}Y$ está entre 40° e 50°, segue que $A\widehat{O}C$ está entre $90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$ e $90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$.

214. ***Perímetros e áreas*** – A área do quadrado é $(\sqrt{3}+3)^2 = \sqrt{3}^2 + 2\times 3\sqrt{3} + 3^2 = 12 + 6\sqrt{3}$ e a do retângulo é

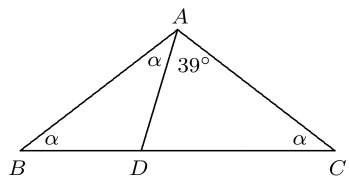
$$(\sqrt{72} + 3\sqrt{6}) \times \sqrt{2} = \sqrt{144} + 3\sqrt{12} = 12 + 6\sqrt{3}\,.$$

Logo, eles têm a mesma área. Vamos agora comparar os perímetros. O do quadrado é

$$4 \times (\sqrt{3} + 3) = 4\sqrt{3} + 12$$

e o do retângulo é $2 \times (\sqrt{72} + 3\sqrt{6} + \sqrt{2}) = 2 \times (6\sqrt{2} + 3\sqrt{6} + \sqrt{2}) = 6\sqrt{6} + 14\sqrt{2}$. Como $4\sqrt{3} < 6\sqrt{6}$ e, também, $12 < 14\sqrt{2}$, segue que $4\sqrt{3} + 12 < 6\sqrt{6} + 14\sqrt{2}$. Assim, o retângulo tem o maior perímetro.

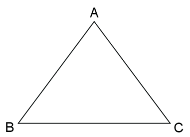
215. ***Cálculo de ângulo*** – Como $AB = AC$, o triângulo $\triangle ABC$ é isósceles, logo $A\widehat{B}C = A\widehat{C}B$. Sendo $AD = BD$, o triângulo $\triangle ABD$ também é isósceles, logo $A\widehat{B}D = B\widehat{A}D$. Temos, então,



$$A\widehat{C}B = A\widehat{B}C = A\widehat{B}D = B\widehat{A}D\,.$$

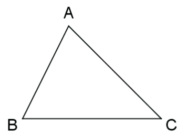
Na figura, esses três ângulos iguais estão representados pela letra α. Os ângulos internos de $\triangle ABC$ são $\alpha + 39^\circ, \alpha$ e α. Logo, $\alpha + 39^\circ + \alpha + \alpha = 180^\circ$, ou seja, $3\alpha = 180^\circ - 39^\circ = 141^\circ$. Assim, $B\widehat{A}D = \alpha = 47^\circ$.

LEMBRETE 1: Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais:



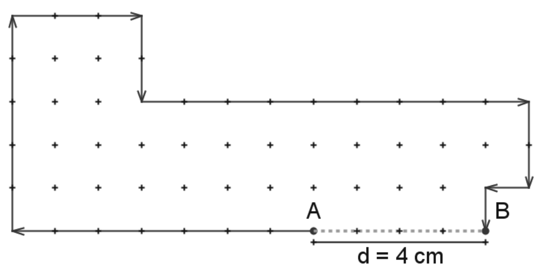
$\widehat{B} = \widehat{C}$ e $AB = AC$.

LEMBRETE 2: A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°:



$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$.

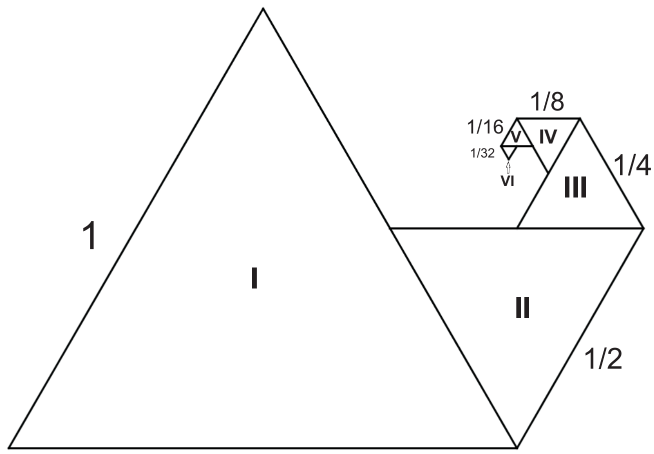
216. ***O caminho da formiga*** – A resposta correta é (c).



217. ***Menino mentiroso*** – Claramente, Pedrinho encontrou Joãozinho num dia em que ele mente. O sábado está descartado pois, caso contrário, ele estaria falando a verdade. Assim, o encontro entre eles foi numa terça ou quinta-feira. Não pode ter sido numa terça-feira, porque então o dia seguinte não poderia ser uma quarta. Logo, a única possibilidade para o dia do encontro dos dois é quinta-feira.

218. ***Encontre os quatro números*** – Como os números 1, 2, 3 e 6 satisfazem a propriedade, é fácil verificar que, dado qualquer número inteiro n, os múltiplos $n, 2n, 3n$ e $6n$ de n também satisfazem a propriedade. Como estamos procurando números de três algarismos e $999 \div 6 = 166{,}5$, basta considerar qualquer valor de n entre 100 e 166 para obter quatro números de três algarismos com a propriedade notável.

219. ***Colando seis triângulos***



O perímetro da figura é formada por treze segmentos, na sequência de formação dos triângulos, que podem ser descritos como segue.

- 2 segmentos de 1 cm e 1 segmento de $\dfrac{1}{2}$ cm no triângulo I,
- 1 segmento de $\dfrac{1}{2}$ cm e 1 segmento de $\dfrac{1}{4}$ cm no triângulo II,
- 1 segmento de $\dfrac{1}{4}$ cm e 1 segmento de $\dfrac{1}{8}$ cm no triângulo III,
- 1 segmento de $\dfrac{1}{8}$ cm e 1 segmento de $\dfrac{1}{16}$ cm no triângulo IV,
- 1 segmento de $\dfrac{1}{16}$ cm e 1 segmento de $\dfrac{1}{32}$ cm no triângulo V e
- 2 segmentos de $\dfrac{1}{32}$ cm no triângulo VI.

Solução 1: Contando os comprimentos de segmentos, podemos ver que o perímetro mede

$$\begin{aligned} & 2\times 1 + 2\times\frac{1}{2} + 2\times\frac{1}{4} + 2\times\frac{1}{8} + 2\times\frac{1}{16} + 3\times\frac{1}{32} \\ &= 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{3}{32} = 3 + \frac{16+8+4+3}{32} \\ &= 3 + \frac{31}{32} = \frac{127}{32}\ \text{cm}. \end{aligned}$$

Solução 2: O contorno da figura, começando no canto esquerdo e seguindo no sentido anti-horário, mede

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1$$

centímetros. A soma da PG de primeiro termo 1, razão $\frac{1}{2}$ e último termo $\frac{1}{32}$ é dada por

$$1-\frac{1}{64}\Big/1-\frac{1}{2}=2-\frac{1}{32}\,.$$

Logo, o perímetro da figura mede

$$\left[2-\frac{1}{32}\right]+\frac{1}{32}+\left[2-\frac{1}{32}\right]=4-\frac{1}{32}=\frac{127}{32}\ \text{cm}.$$

Solução 3: Observe que cada vez que agregamos um triângulo de lado a, trocamos um segmento de comprimento a do perímetro por dois segmentos de comprimento a, de modo que o perímetro aumenta em a.

Como o primeiro triângulo tem perímetro de 3 cm, agregando um triângulo de lado $\frac{1}{2}$ cm, a nova figura tem um perímetro de $3+\frac{1}{2}$ cm; se agregamos mais um triângulo de lado $\frac{1}{4}$ cm, a nova figura tem perímetro $3+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ cm. Seguindo esse processo, depois do sexto triângulo, a figura tem perímetro de

$$3+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=3+1-\frac{1}{32}=\frac{127}{32}\ \text{cm},$$

onde usamos a soma da PG de primeiro termo $\frac{1}{2}$, razão $\frac{1}{2}$ e último termo $\frac{1}{32}$, dada por

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{64}\Big/1-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{32}\,.$$

220. ***Os livros da Elisa*** – Seja N o número total de livros da Elisa. Como $N+1$ é um múltiplo de 9 e 4, temos que $N+1$ é um múltiplo de 36. Logo, $N+1$ é 36 ou 72, pois Elisa tem menos do que 100 livros. Se $N=35$, então o número de livros de matemática é $36\div 9-1=3$ e o número de livros de literatura é $36\div 4=9$. Mas, então, Elisa teria $24+3+9=36$ livros, o que é impossível, porque 36 é maior do que 35. Assim, $N=71$ e Elisa tem $72\div 9-1=7$ livros de matemática.

221. ***Substituindo pela soma*** – Sabemos que qualquer número e a soma de seus algarismos sempre deixam o mesmo resto quando divididos por 9. Assim, Márcio substitui o número inicial por outro, muito menor, com o mesmo resto na divisão por 9, e continua assim, até chegar num número de um único algarismo que, evidentemente, é igual ao resto da divisão de todos os números obtidos anteriormente – inclusive do primeiro – por 9. Assim, o que Márcio faz é, tão somente, um processo de um passo apenas, que consiste na substituição de números naturais por seus restos na divisão por 9.

(a) Como $3^{2\,009} = 3^{2\,008} \times 3 = (3^2)^{1\,004} \times 3 = 9^{1\,004} \times 3$, o resto da divisão de $3^{2\,009}$ por 9 é 0. Logo, o número final do processo de Márcio é 9.

(b) Observe que $17^2 = (18-1)^2 = 18^2 - 2 \cdot 9 + 1 =$ múltiplo de $9 + 1$. Logo,

$$17^{2\,008} = (17^2)^{1\,004} = \text{múltiplo de } 9 + 1$$

e, portanto, $17^{2\,009} =$ múltiplo de $9 + 17 =$ múltiplo de $9 + 8$. Logo, o número final do processo de Márcio é 8.

(c) Aplicando o processo aos números da lista dos números naturais 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ..., a lista final sempre é 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, 3, ... Como o resto da divisão do número 20 092 009 por 9 é 4, então o último número da lista final é 4 e os seis últimos algarismos da lista final são $\ldots, 8, 9, 1, 2, 3, 4$. Portanto, essa lista tem os quatro algarismos 1, 2, 3 e 4 uma vez a mais do que os algarismos 5, 6, 7, 8 e 9. Em particular, há mais 4 do que 5 na lista. O número de vezes que aparece o 9 na lista é o número de múltiplos de 9 que são menores do que ou iguais a 20 092 009. Como 20 092 005 é o maior múltiplo de 9 que é menor do que 20 092 009, temos que o algarismo 9 aparece $20\,092\,005 \div 9 = 2\,232\,445$ vezes na lista.

222. ***Uma brincadeira na sala de aula***

(a) O número 1 só pode ser obtido por divisão a partir do 2, com $1 = 2 \div 2$ e o 2 só pode ser obtido por divisão a partir do 4, com $2 = 4 \div 2$, mas o 4 pode ser obtido por soma a partir do 1, com $4 = 1 + 3$ ou por divisão a partir do 4, com $4 = 8 \div 2$. Logo, temos duas maneiras de obter o 1 depois de três operações, a partir de 1 e de 8: $\begin{cases} 1 \rightsquigarrow 4 \rightsquigarrow 2 \rightsquigarrow 1 \\ 8 \rightsquigarrow 4 \rightsquigarrow 2 \rightsquigarrow 1 \end{cases}$.

(b) Com uma operação a mais, vemos que o número 8 pode ser obtido a partir do 5 por soma, com $8 = 5 + 3$, ou do 16 por divisão, com $8 = 16 \div 2$. Logo, temos três maneiras de obter o 1 depois de quatro operações, a partir de 2, 5 e 16: $\begin{cases} 2 \rightsquigarrow 1 \rightsquigarrow 4 \rightsquigarrow 2 \rightsquigarrow 1 \\ 5 \rightsquigarrow 8 \rightsquigarrow 4 \rightsquigarrow 2 \rightsquigarrow 1 \\ 16 \rightsquigarrow 8 \rightsquigarrow 4 \rightsquigarrow 2 \rightsquigarrow 1 \end{cases}$.

(c) De maneira análoga, vemos que podemos obter o 1 depois de cinco operações, com $\begin{cases} 4 \rightsquigarrow 2 \rightsquigarrow 1 \rightsquigarrow 4 \rightsquigarrow 2 \rightsquigarrow 1 \\ 10 \rightsquigarrow 5 \rightsquigarrow 8 \rightsquigarrow 4 \rightsquigarrow 2 \rightsquigarrow 1 \\ 13 \rightsquigarrow 16 \rightsquigarrow 8 \rightsquigarrow 4 \rightsquigarrow 2 \rightsquigarrow 1 \\ 32 \rightsquigarrow 16 \rightsquigarrow 8 \rightsquigarrow 4 \rightsquigarrow 2 \rightsquigarrow 1 \end{cases}$, bastando começar com os números 4, 10, 13 e 32.

223. ***Calcule a idade*** – No próximo ano, Laura e sua avó estarão dois anos mais velhas do que no ano passado. Logo, suas idades no ano passado são múltiplos de 8 que, somados com 2, dão múltiplos de 7. Procuremos esses números.

$$\begin{array}{rccccccccccc} \text{múltiplos de } 7: & 7 & 14 & 21 & 28 & 35 & 42 & 49 & 56 & 63 & \ldots & 98 & \ldots \\ (\text{múltiplos de } 7) - 2: & 5 & 12 & 19 & 26 & 33 & \boxed{40} & 47 & 54 & 61 & \ldots & \boxed{96} & \ldots \end{array}$$

Note que 40 e 96 são os únicos múltiplos de 8 menores do que 100 que aparecem na segunda linha. Como Vovó Ana tem menos do que 100 anos, podemos concluir que ano passado ela tinha 96 anos e Laura 40. Logo, a idade atual de Laura é 41 anos.

224. ***Divisões e restos***

Solução 1: O dobro do número procurado é um múltiplo de 5 acrescido de 1. Como os múltiplos de 5 terminam em 0 ou 5, o dobro termina em 1 ou 6. Mas o dobro é um número par, logo termina em 6. Assim, o número termina em 3 ou 8 e, portanto, dividido por 5, deixa resto 3.

Solução 2: Sabemos que o número inteiro n procurado satisfaz $2n = 5m + 1$, para algum inteiro m. Então o produto $5m = 2n - 1$ de 5 por m é ímpar, o que implica que m é ímpar. Assim, $m = 2k + 1$, para algum inteiro k e, portanto,

$$2n = 5m + 1 = 5(2k + 1) + 1 = 10k + 6 = 2(5k + 3),$$

ou seja, $n = 5k + 3$ deixa resto 3 na divisão por 5.

225. ***Preenchendo o círculo*** – Sabemos que $\square = 423 \div 47 = 9$. Por outro lado, temos que

$$1\,448 = \underbrace{282 \times \boxminus}_{\text{múltiplo de 282}} + \underbrace{\boxdot\,\boxtimes}_{\text{número de 2 algarismos}}$$

Como 282 tem três algarismos, concluímos que $\boxdot\,\boxtimes$ só pode ser o resto da divisão de $1\,448$ por 282. Efetuando essa divisão, obtemos $1\,448 = 282 \times 5 + 38$. Logo, $\boxdot = 3$ e $\boxtimes = 8$. Obtemos, também, que $\boxminus = 5$. Finalmente, obtemos

$$423 \times \frac{\boxplus}{3} = 282, \text{ ou seja, } 141 \times \boxplus = 282, \text{ portanto, } \boxplus = 2\,.$$

A sequência completa é a seguinte.

$$47 \xrightarrow{\times 9} 423 \xrightarrow{\times 2/3} 282 \xrightarrow{\times 5} 1410 \xrightarrow{+\,38} 1448$$

Soluções do Nível 2

1. ***População*** – A opção correta é (a).

   Como 1 milhão $= 1\,000\,000$, temos 30,3 milhões $= 30{,}3 \times 1\,000\,000 = 30\,300\,000$.

2. ***Réguas em 15 minutos*** – A opção correta é (e).

   Se a máquina produz oito réguas em um minuto, em 15 minutos ela produzirá $8 \times 15 = 120$ réguas.

3. ***Alturas iguais*** – A opção correta é (e).

   Usaremos a notação $a < b$, que significa que a é menor do que b ou, equivalentemente, que b é maior do que a. Assim, $a < b < c$ significa que a é menor do que b e b é menor do que c. Para simplificar, vamos denotar a altura de cada um dos irmãos pela letra inicial de seu nome.

   Do enunciado temos:

   (i) L é maior do que A (L > A ou, equivalentemente, A < L);

   (ii) M é menor do que L (M < L);

   (iii) A é maior do que J (A > J ou, equivalentemente, J < A);

   (iv) J é menor do que M (J < M).

   De (i) e (iii) segue que J < A < L. Portanto, os irmãos de mesma altura não estão entre Júlio, Antônio e Luíza. De (ii) e (iv) segue que J < M < L. Portanto, os irmãos de mesma altura não estão entre Júlio, Maria e Luíza. Logo, a única opção é que Antônio e Maria tenham a mesma altura.

4. ***Unidade*** – A opção correta é (c).

   O produto dado tem um de seus fatores igual a 5, portanto, é um múltiplo de 5, que sempre tem o algarismo da unidade igual a 0 ou 5. Além disso, como todos os fatores são números ímpares, o produto é um número ímpar. Assim, seu algarismo da unidade é 5.

5. ***Em que fio?*** – A opção correta é (d).

   Observe que a aranha utiliza oito fios de apoio, numerados a partir do fio A, iniciando em 0. Logo,

   - sobre o fio A aparecem os múltiplos de 8;
   - sobre o fio B aparecem os (múltiplos de 8)+1;
   - sobre o fio C aparecem os (múltiplos de 8)+2;
   - sobre o fio D aparecem os (múltiplos de 8)+3;
   - sobre o fio E aparecem os (múltiplos de 8)+4;
   - sobre o fio F aparecem os (múltiplos de 8)+5;
   - sobre o fio G aparecem os (múltiplos de 8)+6;

- sobre o fio H aparecem os (múltiplos de 8)+7.

Na divisão de 118 por 8 encontramos resto 6, o que significa que 118 é dado por (múltiplos de 8) + 6. Assim, 118 está sobre o fio G.

6. ***Pontos ganhos*** – A opção correta é (c).

   Segundo as regras da Copa do Mundo, uma vitória vale três pontos e um empate vale só um ponto. Como a seleção do Senegal tem uma vitória e dois empates, ela obteve $1 \times 3 + 2 \times 1 = 5$ pontos.

7. ***Gols sofridos*** – A opção correta é (d).

   Numa tabela de jogos, o número total de gols marcados é sempre igual ao número total de gols sofridos. Denotando por x o número de gols que sofreu a seleção do Uruguai, vemos que $5+5+4+0 = 2+4+x+3$, portanto, $14 = 9+x$, e temos que $x = 5$, ou seja, a seleção do Uruguai sofreu 5 gols.

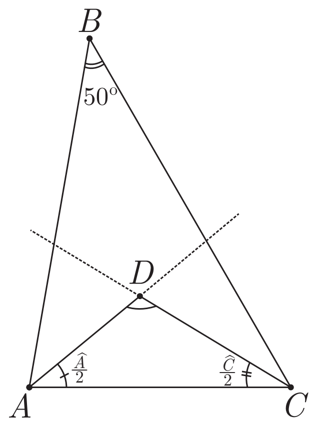
8. ***Qual é o ângulo?*** – A opção correta é (c).

   Nesta questão usaremos um importante teorema da Geometria Plana, como segue.

   Teorema: *A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°.*

   Pelo teorema, temos $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$ e, como $\widehat{B} = 50°$, segue que $\widehat{A} + 50° + \widehat{C} = 180°$, ou seja, $\widehat{A} + \widehat{C} = 130°$. Como AD e CD são as bissetrizes dos ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$, respectivamente, o teorema aplicado ao triângulo $\triangle ADC$ dá a relação

   $$\frac{1}{2}\widehat{A} + \frac{1}{2}\widehat{C} + A\widehat{D}C = 180°.$$

   Mas $\frac{1}{2}\widehat{A} + \frac{1}{2}\widehat{C} = \frac{1}{2}\big(\widehat{A} + \widehat{C}\big) = \frac{1}{2}130° = 65°$, portanto, da igualdade acima decorre que $A\widehat{D}C = 180° - 65° = 115°$.

9. ***Basquete*** – A opção correta é (a).

   Analisando o gráfico, verificamos que os jogadores marcaram as seguintes quantidades de pontos: Daniel – 7, Ramon – 8, Ian – 2, Bernardo – 11, Tiago – 6, Pedro – 12, Ed – 1 e André – 7. O total é 54 pontos.

10. ***Telefone*** – A opção correta é (a).

    Vejamos a despesa em janeiro. Como 10 horas são gratuitas e Geni utilizou o telefone por 15 horas e 17 minutos, ela deve pagar a tarifa fixa mensal de 18 reais mais o custo de apenas 5 horas e 17 minutos. Como o preço é dado em minutos, passamos o tempo a pagar para minutos. Sabemos que 1 hora = 60 minutos, portanto, 5 horas $= 5 \times 60 = 300$ minutos. Logo, 5h17min $= 300 + 17 = 317$. Assim, a conta telefônica de Geni em janeiro foi de $18 + 317 \times 0{,}03 = 18 + 9{,}51 = 27{,}51$ reais.

Em fevereiro, Geni usou seu telefone por menos do que 10 horas, portanto nesse mês ela só precisa pagar a tarifa fixa mensal de 18 reais. Logo, a despesa de Geni com telefone nesses dois meses foi de 27,51+18 = 45,51 reais.

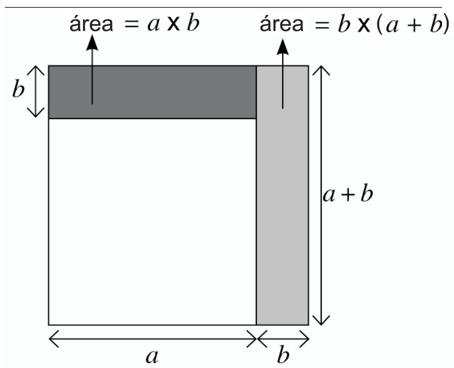
11. ***Área*** – A opção correta é (e).

Solução 1: A área de um quadrado de lado l é l^2 e a área da região cinza é a diferença entre as áreas dos quadrados maior e menor. O lado do quadrado maior é $a+b$, portanto sua área é $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Já o lado do quadrado menor é a, portanto sua área é a^2. Assim, a área da região cinza é $(a+b)^2 - a^2 = a^2 + 2ab + b^2 - a^2 = 2ab + b^2$.

Solução 2: A área de um retângulo é o produto da largura pelo comprimento. Pelos dados do problema, a largura da região cinza é $(a+b) - a = b$.

Dividindo a região cinza em dois retângulos, um de largura b e comprimento a e o outro de largura b e comprimento $a+b$ (ver figura), vemos que a área da região cinza é a soma das áreas desses dois retângulos, ou seja,

$$\begin{aligned} a \times b + b \times (a+b) &= ab + ab + b^2 \\ &= 2ab + b^2. \end{aligned}$$



Portanto, a área da região cinza é $2ab + b^2$.

Solução 3: A região cinza é formada por dois retângulos de dimensões $a \times b$ e um quadrado de lado b. Logo, sua área é $2ab + b^2$.

12. ***Comprando sorvete*** – A opção correta é (d).

Se comprar no supermercado A, Joana gastará $2 \times 24 = 48$ reais. Se comprar no supermercado B, ela gastará $3 \times 14 = 42$ reais. Portanto, no supermercado B ela economizará 6 reais em relação ao A.

13. ***Cartolina e barbante*** – A opção correta é (e).

Observando a frente da cartolina, verificamos que o barbante entra e sai pelos furos da primeira linha. A opção (e) não é possível, pois no verso esses dois furos aparecem como consecutivos ao percorrer o barbante, o que impede o barbante de continuar pelos demais furos.

14. ***Amigos e frações*** – A opção correta é (b).

Como cada amigo deu a Daniel a mesma quantia, digamos que Daniel tenha recebido x reais de cada um de seus três amigos. Inicialmente, então, Adriano tinha $5x$ reais, Bruno tinha $4x$ reais e César tinha $3x$ reais. Segue que o total de dinheiro inicial dos três amigos era de $5x + 4x + 3x = 12x$ reais. Como cada um de seus três amigos lhe deu x reais, Daniel tem agora $3x$ reais, o que representa a quarta parte do total de $12x$. Logo, ele agora possui $1/4$ da quantia que seus três amigos juntos possuíam inicialmente.

15. ***Escolhendo sorvetes*** – A opção correta é (d).

Vamos denotar cada sabor de sorvete pela sua letra inicial, ou seja, a – açaí, b – baunilha, c – cajá. Para enumerar todas as possibilidades de compra do sorvete com quatro bolas, devemos considerar os seguintes casos:

- quatro bolas do mesmo sabor (1ª coluna ao lado);
- três bolas do mesmo sabor e uma de sabor diferente (2ª coluna ao lado);
- duas bolas de um mesmo sabor e duas de outro sabor (3ª coluna ao lado);
- duas bolas de um mesmo sabor e as outras duas dos outros dois sabores (4ª coluna ao lado).

aaaa	*aaab*	*aabb*	*aabc*
bbbb	*aaac*	*aacc*	*bbac*
cccc		*bbcc*	*ccab*
	bbba		
	bbbc		
	ccca		
	cccb		

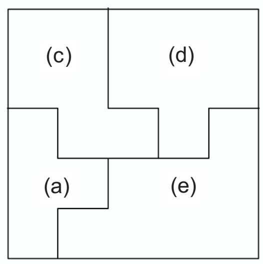
Assim, obtemos 15 modos de fazer essa compra de sorvete.

16. ***Peças de um quadrado*** – A opção correta é (b).

Para que seja possível montar o quadrado, o número total de quadradinhos deve ser um quadrado perfeito. Um número inteiro é um *quadrado perfeito* se ele é igual ao quadrado de algum número inteiro. Por exemplo, 1, 4, 9, 16 e 25 são quadrados perfeitos, pois $1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $16 = 4^3$ e $25 = 5^2$. Observe que esses cinco inteiros são os únicos quadrados perfeitos menores do que 30.

Contando o total de quadradinhos apresentados nas cinco opções de resposta obtemos $4+5+6+7+8 = 30$. Portanto, devemos eliminar uma peça com 5 quadradinhos, para restar 25, um quadrado perfeito, ou eliminar uma peça com 14 quadradinhos, para restar 16, outro quadrado perfeito, ou eliminar uma com 21, para restar 9, ou eliminar uma com 26, para restar 4, ou eliminar uma com 29 quadradinhos, para restar um único. Ocorre que não há peças com 14, 21, 26 ou 29 quadradinhos, restando a única opção de eliminar a peça (b), com 5 quadradinhos.

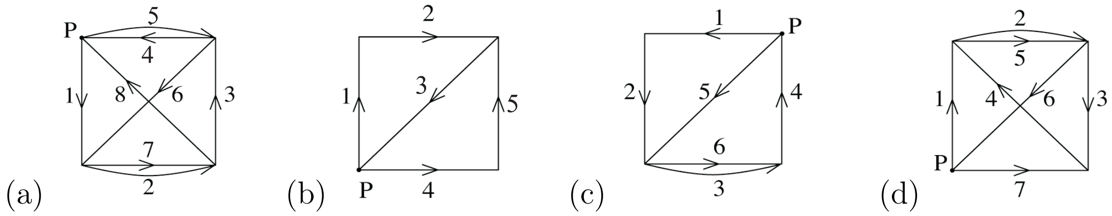
O único quadrado que Pedro poderia ter montado com quatro peças é não usando a peça (b). Isto não significa que seja possível montar um quadrado com as quatro peças restantes. Mas, sabendo que devemos montar um quadrado de lado 5 com as cinco peças (a), (c), (d) e (e), o problema já fica bem mais fácil. A figura mostra como isso pode ser feito.



17. ***Paradas de ônibus*** – A opção correta é (b).

Como a distância entre a terceira e a sexta paradas é 3 300 m, a distância entre duas paradas consecutivas é $3\,300 \div 3 = 1\,100$ m. Portanto, a distância entre a primeira e a última paradas é de $1\,100 \times 11 = 12\,100$ metros, ou seja, 12,1 quilômetros.

18. ***Desenho*** – A opção correta é (e).



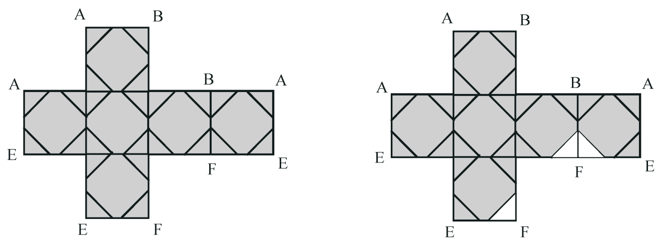
Nas ilustrações (a), (b), (c) e (d) dadas, vemos que, iniciando o desenho no ponto P e seguindo as setas de acordo com a ordem numérica, é possível completar cada um desses desenhos sem tirar o lápis do papel.

Observe que, excetuando-se o vértice de início do traçado e o vértice de finalização, os demais vértices do desenho devem possuir obrigatoriamente um número par de linhas chegando até eles, pois a cada vez que se chega a um desses vértices por uma linha, deixa-se esse mesmo vértice por outra linha.

Assim, é impossível fazer o traçado da opção (e) do enunciado, que não pode ser construído sem tirar o lápis do papel, já que seus quatro vértices externos possuem três linhas chegando a cada um deles.

19. ***Qual é o cubo?*** – A opção correta é (e).

Ao cortar um canto do cubo, eliminamos um de seus vértices. Como cada vértice se liga a três arestas do cubo, uma representação do cubo cortado deve mostrar três cortes ao redor de um mesmo vértice.



20. ***Quadrado mágico*** – A soma dos números de uma diagonal é $4 + 0 + (-4) = 0$, portanto, o valor da soma dos números de cada linha, de cada coluna e da outra diagonal também deve ser 0. Assim, obtemos de imediato os números que faltam nas casas cinza no primeiro tabuleiro, a saber, 16, 8 e 12, porque $(-12) + 16 + (-4) = 0$ na primeira linha, $(-12) + 8 + 4 = 0$ na primeira coluna e $(-12) + 0 + 12 = 0$ na diagonal.

–12		–4
4		

→

–12	16	–4
8	0	
4		12

→

–12	16	–4
8	0	–8
4	–16	12

Agora, o número que falta na segunda linha do segundo tabuleiro é -8, porque $8 + 0 + (-8) = 0$. Para a terceira linha, obtemos -16, pois $-4 + (-16) - 12 = 0$.

21. ***Torneio*** – Denotemos as sete equipes pela sua letra inicial.

(a) Na primeira rodada do Grupo 1 foram disputadas três partidas, A×B, B×C e C×A.

(b) Na primeira rodada do Grupo 2 foram disputadas seis partidas, D×E, D×F, D×G, E×F, E×G e F×G.

(c) Na segunda rodada, cada equipe do Grupo 1 jogou quatro partidas, uma com cada uma das equipes do Grupo 2. Como o Grupo 1 tem três equipes, na segunda rodada foram disputadas $3 \times 4 = 12$ partidas.

22. ***Truque numérico***

(a) Vamos fazer o experimento com os números 0, 5 e -4.

$$0 \xrightarrow[\times 6]{} 0 \xrightarrow[-21]{} -21 \xrightarrow[\div 3]{} -7 \xrightarrow[-(0\times 2)=0]{} -7$$

$$5 \xrightarrow[\times 6]{} 30 \xrightarrow[-21]{} 9 \xrightarrow[\div 3]{} 3 \xrightarrow[-(5\times 2)=-10]{} -7$$

$$-4 \xrightarrow[\times 6]{} -24 \xrightarrow[-21]{} -45 \xrightarrow[\div 3]{} -15 \xrightarrow[-(-4\times 2)=+8]{} -7$$

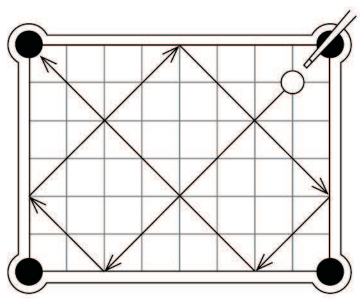
O resultado final é sempre -7.

(b) É razoável, então, conjecturar que, para qualquer número inicial escolhido, o resultado final desse procedimento será sempre -7. Seja x o número inicial. Temos, então, as operações seguintes.

$$x \xrightarrow[\times 6]{} 6x \xrightarrow[-21]{} 6x-21 \xrightarrow[\div 3]{} \frac{6x-21}{3} \xrightarrow[-2x]{} 2x-7-2x=-7$$

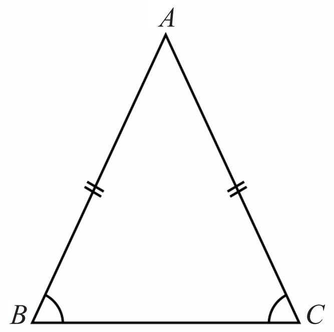
Portanto, o resultado dessa "mágica" sempre será igual a -7, qualquer que seja o número inicialmente escolhido.

23. ***Jogando sinuca*** – A bola muda a direção de sua trajetória cada vez que bate numa das beiradas da mesa. Como a trajetória faz sempre um ângulo de 45° com a beirada, a trajetória dessa bola, tacada a partir de um canto, seguirá sempre as diagonais dos quadrados que ela cruzar. Traçando essa trajetória, concluímos que (b) a bola baterá cinco vezes nas beiradas da mesa antes de (a) cair na caçapa superior esquerda.



Contando quadrados atravessados, vemos que (c) ela atravessará 23 quadrados pela diagonal.

24. ***Triângulo isósceles*** – Por definição, um triângulo é *isósceles* se tiver dois lados iguais. O terceiro lado é chamado *base* do triângulo isósceles, e os ângulos formados entre a base e os dois lados iguais são os *ângulos da base*.



A figura mostra um triângulo isósceles $\triangle ABC$, cujos lados iguais são AB e AC e a base é BC. Denotamos os ângulos $A\widehat{B}C$ e $A\widehat{C}B$ da base por $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$, respectivamente. Demonstra-se que num triângulo isósceles os ângulos da base são sempre iguais. No triângulo da figura temos, portanto, $\widehat{B} = \widehat{C}$.

Passando à resolução desta questão, observe que $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$, já que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é $180°$. Pelos dados do problema, $\widehat{A} = 20^{\text{o}}$ e o triângulo é isósceles, de modo que $\widehat{B} = \widehat{C}$. Logo, $180° = 20° + \widehat{B} + \widehat{C} = 20° + 2\widehat{B}$ e, portanto, $\widehat{B} = \widehat{C} = 80°$.

O triângulo $\triangle CBD$ também é isósceles, pois é dado que $CB = DB$. Como a base desse triângulo é CD, seus ângulos de base são $C\widehat{D}B = \widehat{C}$, portanto, $C\widehat{D}B = 80°$. Considerando a soma dos ângulos internos desse triângulo $\triangle CBD$, obtemos $C\widehat{B}D + C\widehat{D}B + \widehat{C} = 180°$. Substituindo os valores já obtidos, vemos que $C\widehat{B}D + 80° + 80° = 180°$, de modo que $C\widehat{B}D = 20°$. Assim, $D\widehat{B}E = \widehat{B} - 20° = 80° - 20° = 60°$.

O triângulo $\triangle DBE$ também é isósceles, porque também $DB = BE$. A base desse triângulo é DE e os ângulos iguais da base BE são $E\widehat{D}B = D\widehat{E}B$. Como

$$180° = B\widehat{D}E + D\widehat{E}B + D\widehat{B}E = 2 \times B\widehat{D}E + 60°,$$

concluímos que $B\widehat{D}E = 60°$.

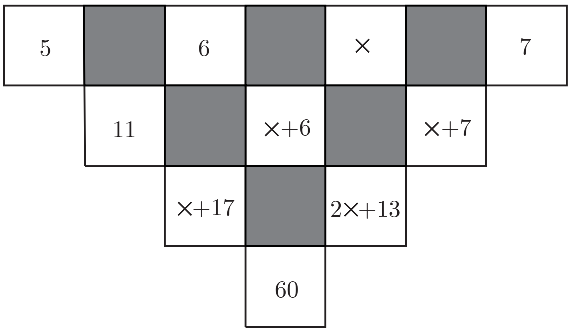
25. ***Pesando moedas*** – Sejam A, B, C e D as quatro moedas aparentemente iguais. Comparamos as moedas A e B na balança, colocando uma em cada prato. Dois casos podem ocorrer: a balança fica em equilíbrio ou a balança não fica em equilíbrio. Vamos analisar separadamente cada caso. Observe que, em ambos casos, só utilizamos a balança duas vezes.

1º Caso: A balança fica equilibrada. Podemos concluir que A e B têm o mesmo peso, portanto, são verdadeiras. Vamos então comparar A com C. Para isso, mantemos A na balança e colocamos C no lugar de B. Se houver equilíbrio novamente, é porque A e C têm o mesmo peso e são, portanto, verdadeiras. Assim, A, B e C são verdadeiras e a única opção é que D seja a moeda falsa. Se não houver equilíbrio, C é a moeda falsa.

2º Caso: A balança não fica equilibrada. Logo uma das duas moedas, A ou B é a falsa. Substituímos A por C na balança. Se houver equilíbrio, A é a moeda falsa. Se não houver equilíbrio, a moeda falsa é B.

26. ***Números binomiais*** – A opção correta é (e).

Preenchendo o tabuleiro de acordo com as regras do problema, segue que $60 = (\times + 17) + (2 \times +13) = 3 \times +30$, donde $\times = 10$.



27. ***Costuras da bola*** – A opção correta é (c).

Se somarmos os números de lados de todos os polígonos (20 hexágonos e 12 pentágonos) que compõem a superfície da bola, obteremos um valor que é duas vezes o número de costuras, pois cada costura é lado comum de exatamente dois polígonos. Assim, temos que $2 \times$ número de costuras $= 12 \times 5 + 20 \times 6 = 180$, donde o número de costuras é 90.

28. ***Razão de áreas*** – A opção correta é (a).

A grade é um quadrado de lado igual a 5 cm, logo sua área é igual a 25 cm^2. A parte sombreada da grade é formada por quatro triângulos, sendo que dois deles têm base 1 cm e altura 2 cm e os outros dois têm base 1 cm e altura 3 cm. Logo a área sombreada é igual a $2 \times \frac{1}{2}(1 \times 2) + 2 \times \frac{1}{2}(1 \times 3) = 5$ cm^2 e a área não sombreada é igual a $25 - 5 = 20$ cm^2. Assim, a razão pedida é $5/20 = 1/4$.

29. ***Só sorvete*** – A opção correta é (c).

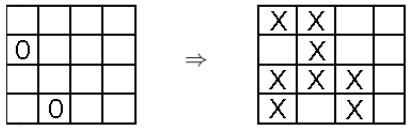
Vamos primeiro analisar a informação contida na diagonal da tabela indicada pelos números dentro dos quadradinhos.

		TARDE			
		Abacaxi	Banana	Chocolate	Doce de leite
M	Abacaxi	$\boxed{1}$	8	0	3
A	Banana	6	$\boxed{2}$	7	5
N	Chocolate	3	3	$\boxed{0}$	5
H Ã	Doce de Leite	2	9	9	$\boxed{1}$

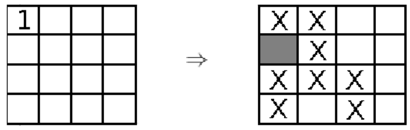
Esses números indicam quantas foram as crianças que tomaram sorvetes com o mesmo sabor pela manhã e pela tarde: um tomou sorvetes de abacaxi, dois de banana, nenhum de chocolate e um de doce de leite. Todos os outros estudantes comeram sorvetes de sabores diferentes pela manhã e à tarde, num total de $64 - (1 + 2 + 0 + 1) = 60$.

30. ***Brincando com tabuleiro*** – A opção correta é (b).

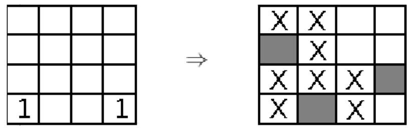
Notamos primeiro que se uma casa tem o algarismo 0, então nenhuma das casas vizinhas pode estar pintada. Logo, as casas marcadas com um $\times$ na figura à direita não foram pintadas.



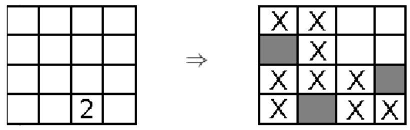
Consideremos, agora, a casa do canto superior direito, na qual aparece o número 1. Ela tem três vizinhas, e já sabemos que duas delas não foram pintadas.



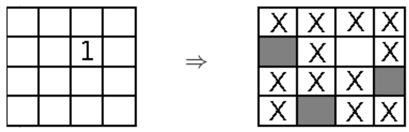
Logo, a vizinha que sobra (a casa imediatamente abaixo) foi pintada. Podemos aplicar o mesmo argumento às casas do canto inferior esquerdo e do canto inferior direito.



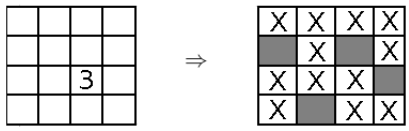
Olhamos agora para o 2 na última linha. Como esta casa já tem duas vizinhas pintadas, todas suas outras vizinhas não foram pintadas.



Argumento idêntico se aplica à casa da segunda linha e terceira coluna, pois nela aparece um 1 e já temos uma de suas vizinhas pintadas. Logo, as suas outras três vizinhas não foram pintadas.



Finalmente, usamos o 3 que aparece na casa da terceira linha e terceira coluna. Esta casa já tem duas vizinhas pintadas, logo deve haver mais uma de suas vizinhas pintada.



Esta vizinha só pode ser a casa em branco na figura acima, e podemos completar a tabela. Concluímos que o número de casas pintadas é 4.

31. ***Cartões numerados*** – A opção correta é (b).

A formação de um número de 6 algarismos é ilustrada a seguir.

centena de milhar	dezena de milhar	unidade de milhar	centena	dezena	unidade

Para se obter o menor número possível, os menores algarismos devem estar o mais à esquerda possível (na casa do milhar) e para se obter o maior número possível os maiores algarismos devem também estar o mais à esquerda possível (na casa do milhar).

Jorge joga primeiro: Para obter o menor número possível, ele coloca o menor algarismo que ele possui, que é o 2, na casa da centena de milhar. Se ele não fizesse isso, Larissa colocaria seu 5 nesta casa na próxima jogada e obteria, assim, um número maior.

2	dezena de milhar	unidade de milhar	centena	dezena	unidade

Agora é a vez de Larissa: Para obter o maior número possível, ela coloca o maior algarismo que ela possui, que é o 5, na casa das dezenas de milhar, pois a casa das centenas de milhar já está ocupada.

2	5	unidade de milhar	centena	dezena	unidade

Agora, Jorge tem os algarismos 4 e 6, e Larissa 1 e 3. Logo, os algarismos de Larissa são menores do que os de Jorge, o que determina a estratégia de Jorge: ele deve tentar colocar seus algarismos o mais à direita possível, com o 6 à direita do 4. Por sua vez, Larissa deve tentar colocar seus algarismos o mais à esquerda possível, com o 3 à esquerda do 1.

Jorge joga: Ele coloca o algarismo 6 na casa das unidades.

2	5	unidade de milhar	centena	dezena	6

Larissa joga: Ela coloca seu 1 na casa das dezenas.

2	5	unidade de milhar	centena	1	6

Agora, Jorge tem apenas o algarismo 4 e Larissa o 3. Ele então coloca o 4 na casa das centenas e Larissa coloca o 3 na casa das unidades de milhar, acabando o jogo.

2	5	3	4	1	6

Assim, o número final, obtido se os dois jogadores forem espertos, é 253 416.

32. ***Faltam balas*** – A opção correta é (a).

Dividindo 237 por 37, obtemos $237 = 7 \times 31 + 20$. Logo, 237 não é divisível por 31. Isso quer dizer que a professora realmente vai ter que comprar mais balas para que todos os alunos recebam o mesmo número de balas. Devemos adicionar à expressão $7 \times 31 + 20$ o menor inteiro positivo x tal que $7 \times 31 + 20 + x$ seja múltiplo de 31. Como $20 + 11 = 31$, basta que a professora compre 11 balas adicionais.

33. ***Artesãos de braceletes*** – A opção correta é (d).

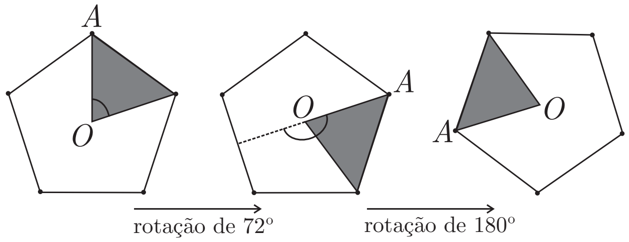
O artesão produz 6 braceletes a cada 20 minutos. Como 1 hora = 60 minutos = 3×20 minutos, o artesão produz $6 \times 3 = 18$ braceletes em uma hora. Como ele trabalhou 12 horas − 8 horas = 4 horas, o número de braceletes feitos pelo artesão é $18 \times 4 = 72$. O auxiliar produz 8 braceletes a cada meia hora, portanto em 1 hora ele produz 16 braceletes. Para produzir 72 braceletes ele precisará de $72/16 = 4{,}5$ horas = 4 horas e 30 minutos. Como ele inicia seu trabalho às 9 horas, ele terminará seu trabalho às $9 + 4{,}5 =$ 13h30min.

34. ***Girando um pentágono*** – A opção correta é (b).

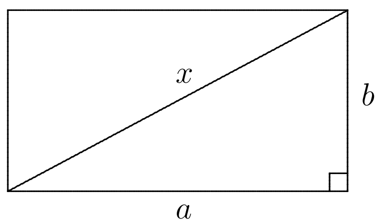
O pentágono tem 5 lados. Logo, seu ângulo central mede $\dfrac{1}{5}\,360° = 72°$.

Solução 1: Dividindo 252 por 72, obtemos $252 = 3 \times 72 + 36$. Como $36 = 72 \div 2$, concluímos que uma rotação do pentágono de 252° em torno do seu centro corresponde a uma rotação de um ângulo igual a três vezes e meia o ângulo central.

Solução 2: Como $252° = 72° + 180°$, podemos pensar na rotação de $252°$ como uma rotação de $72°$ seguida de outra de $180°$, conforme ilustrado na figura dada, em que O é o centro do polígono.



35. ***Área em função da diagonal*** – A opção correta é (c).



A área A de um retângulo é o produto do comprimento pela largura. Sejam a e b o comprimento e a largura do retângulo. Assim, $A = ab$. O perímetro desse retângulo é dado por $2a+2b$. Como o perímetro é 100, temos que $2a + 2b = 100$, portanto, $a + b = 50$. Elevando ao quadrado ambos os lados dessa última igualdade, obtemos $a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2 = 50^2 = 2\,500$. Se x denota o comprimento da diagonal, o Teorema de Pitágoras afirma que $x^2 = a^2 + b^2$, portanto, $x^2 + 2A = x^2 + 2ab = 2\,500$. Concluímos que $2A = 2\,500 - x^2$, ou seja, $A = 1\,250 - \frac{1}{2}x^2$ é a expressão da área do retângulo em função da diagonal x.

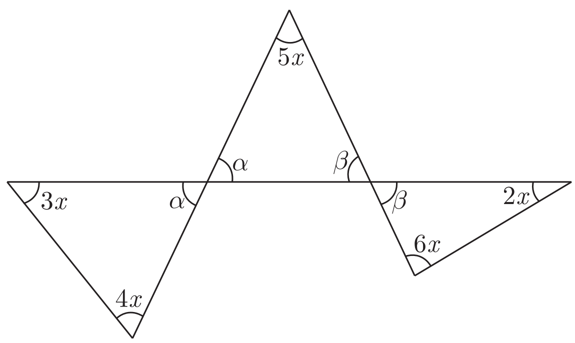
36. ***Valor de uma quadrática*** – A opção correta é (d).

Elevando ao quadrado ambos os lados da igualdade $x + y = 8$, obtemos $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 = 8^2 = 64$. Como $xy = 15$, concluímos que

$$x^2 + 6xy + y^2 = (x^2 + 2xy + y^2) + 4xy = 64 + 4 \times 15 = 124.$$

37. ***Ângulos em função de*** x – A opção correta é (c).

Completamos a figura marcando os ângulos α e β, lembrando que ângulos opostos pelo vértice são iguais. Lembremos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Olhando para o triângulo mais à esquerda, vemos que



$$3x + 4x + \alpha = 180°.$$

Segue que $\alpha = 180° - 7x$. Considerando o triângulo do meio, temos

$$(180° - 7x) + 5x + \beta = 180°.$$

Concluímos que $\beta = 2x$. Finalmente, do triângulo da direita, temos que $\beta + 2x + 6x = 180°$, ou seja, $2x + 2x + 6x = 180°$. Assim, $x = 18°$.

38. ***Operação diferente*** – A opção correta é (c).

Pela definição, obtemos $\dfrac{22\nabla 26}{4\nabla 6} = \dfrac{22+23+24+25+26}{4+5+6} = \dfrac{120}{15} = 8.$

39. ***Taxi caro*** – A opção correta é (c).

Como a bandeirada é fixa, temos 10,00 − 2,50 = 7,50 reais a serem gastos apenas com os metros rodados. Cada trecho de 100 metros rodado custa R\$ 0,10, então com R\$ 7,50 posso fazer uma corrida de (7,50)/(0,10) = 750/10 = 75 trechos de 100 metros cada um, ou seja, $75 \times 100 = 7\,500$ metros. Como 1 quilômetro tem 1 000 metros, segue que, com R\$ 10,00, posso pagar uma corrida de até 7 500 metros, ou 7,5 quilômetros.

40. ***Múltiplos de 3 ou 4*** – A opção correta é (d).

Para encontrar o número de múltiplos de 3 compreendidos entre 1 e 601, basta usar o algoritmo da divisão e observar que $601 = 200 \times 3 + 1$. Isso mostra que 3×1, 3×2, $\ldots$, 3×200 são os múltiplos de 3 entre 1 e 601, ou seja, temos 200 desses múltiplos. Do mesmo modo, vemos que existem 150 múltiplos de 4 entre 1 e 601. Nesse total de $200 + 150 = 350$, alguns números aparecem contados duas vezes, pois são múltiplos de 3 e de 4 ao mesmo tempo; por exemplo, foram incluídos 12, 36 e 60 nos 200 múltiplos de 3 e também nos 150 múltiplos de 4. Lembre que os múltiplos de 3 e de 4 são, também, múltiplos de 12. O mesmo argumento usado acima mostra que temos 50 múltiplos de 12 entre 1 e 601. Logo, o número de múltiplos de 3 ou 4 entre 1 e 601 é $350 - 50 = 300$.

41. ***Lados de um paralelepípedo*** – A opção correta é (b).

Solução 1: De $xyz = 240$, segue que $xy = \dfrac{240}{z}$. Substituindo em $xy+z = 46$, obtemos $\dfrac{240}{z} + z = 46$, ou seja, $z^2 - 46z + 240 = 0$. As raízes dessa equação são números cuja soma é 46 e cujo produto é 240, e é fácil verificar que essas raízes são e 6 e 40. Logo, $z = 6$ ou $z = 40$. De maneira completamente análoga, a substituição de $yz = \dfrac{240}{x}$ em $x + yz = 64$ nos leva a $x = 4$ ou $x = 60$.

Agora, de $xyz = 240$, segue que $y = \dfrac{240}{xz}$. Como y é um número inteiro, então xz é um divisor de 240. De $x = 4$ ou $x = 60$ e $z = 6$ ou $z = 40$ segue que as possibilidades para xz são

$$\underbrace{4}_{x} \times \underbrace{6}_{z} = 24, \underbrace{4}_{x} \times \underbrace{40}_{z} = 160, \underbrace{60}_{x} \times \underbrace{6}_{z} = 360, \underbrace{60}_{x} \times \underbrace{40}_{z} = 2\,400.$$

Vemos que só podemos ter $x = 4$ e $z = 6$, pois em qualquer outro caso o produto xz não é um divisor de 240. Segue que $y = \dfrac{240}{xz} = \dfrac{240}{4 \times 6} = 10$, donde

$$x + y + z = 4 + 10 + 6 = 20.$$

Solução 2: Somando $xy + z = 46$ e $x + yz = 64$, obtemos

$$(x+z)(y+1) = (x+z)y + (x+z) = xy + z + x + yz = 46 + 64 = 110$$

e vemos que $y+1$ é um divisor de 110. Logo, temos as possibilidades

$$y+1 = 1, 2, 5, 10, 11, 22, 55 \text{ e } 110,$$

ou seja, $y = 0, 1, 4, 9, 10, 21, 54$ e 109. Por outro lado, y é um divisor de 240, porque $xyz = 240$ e, além disso, y é positivo, que nos deixa com as únicas possibilidades $y = 1, 4$ e 10. Examinemos cada caso de y.

- Se $y = 1$, então $110 = (x+z)(y+1) = (x+z)\times 2$, portanto, $x+z = 55$. Como também $46 = xy + z = x + z$, esse caso $y = 1$ não é possível.
- Se $y = 4$, então $110 = (x+z)(y+1) = (x+z)\times 5$, portanto, $x+z = 22$. Mas $240 = xyz = 4xz$, portanto, $xz = 60$. Podemos verificar (por exemplo, com uma lista de divisores de 60 ou, então, resolvendo a equação $w^2 - 22w + 60 = 0$) que não há valores inteiros positivos de x e z que verifiquem essas duas condições $x+z = 22$ e $xz = 60$. Logo, esse caso $y = 4$ também não é possível.
- Se $y = 10$, então $110 = (x+z)(y+1) = (x+z)\times 10$, portanto, $x+z = 11$. Mas $240 = xyz = 10xz$, portanto, $xz = 24$. Podemos verificar (por exemplo, com uma lista de divisores de 24 ou, então, resolvendo a equação $w^2 - 11w + 24 = 0$) que os únicos valores inteiros positivos de x e z que verifiquem essas duas condições $x+z = 11$ e $xz = 24$ são $x = 4$ e $z = 6$.

Assim, a única possibilidade é $x = 4, y = 10$ e $z = 6$, com o que $x+y+z = 20$.

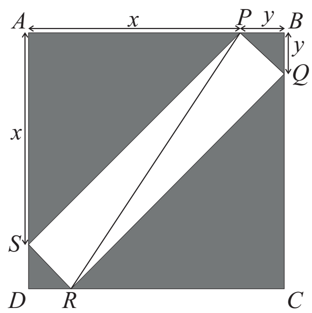
42. ***Pontos da reta*** – A opção correta é (b).

Notamos que a e b são números maiores do que $1/2$ e menores do que 1. Portanto, $a+b$ é um número maior do que 1 e menor do que 2. Logo, $a+b$ só pode ser representado por m. Como $a < b$, segue que $a-b$ é negativo e, portanto, só pode ser representado por q. Quanto ao produto ab, notamos primeiro que, como a e b são positivos, seu produto é positivo. Por outro lado, temos $b < 1$ e $a > 0$, donde $ab < a$. Assim, o único número que pode representar ab é p.

43. ***Velocidades*** – A opção correta é (d).

O menor tempo de percurso é obtido quando se percorre o maior trecho com a maior velocidade e o menor trecho com a menor velocidade. Já o maior tempo é obtido quando se percorre o maior trecho com a menor velocidade e o menor trecho com a maior velocidade. Assim, o tempo total gasto pelo piloto nos três trechos é de, no mínimo, $\dfrac{240}{40} + \dfrac{300}{75} + \dfrac{400}{80} = 15$ horas e de, no máximo, $\dfrac{240}{800} + \dfrac{300}{75} + \dfrac{400}{400} = 17$ horas.

44. ***Comprimento de diagonal*** – A opção correta é (b).



Primeiro notamos que os triângulos $\triangle APS$ e $\triangle CQR$ são congruentes, pois têm os três ângulos iguais (um deles sendo reto) e também um de seus lados ($PS = QR$). Do mesmo modo, os triângulos $\triangle BPQ$ e $\triangle DRS$ também são congruentes. Sejam $AP = x$ e $BP = y$. Então a área do triângulo $\triangle APS$ é $\frac{1}{2}x^2$ e a do triângulo $\triangle BPQ$ é $\frac{1}{2}y^2$ e a área cortada foi de $2\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2\right) = x^2 + y^2$.

Assim, estabelecemos que $x^2 + y^2 = 200$. Agora notamos que PR é a hipotenusa do triângulo retângulo $\triangle PSR$. Para calcular PR, basta saber o comprimento dos catetos PS e RS. Mas PS é a hipotenusa do triângulo retângulo $\triangle APS$ e do Teorema de Pitágoras segue que $(PS)^2 = (AS)^2 + (AP)^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$. Do mesmo modo, obtemos $(RS)^2 = 2y^2$. Logo,

$$(PR)^2 = (PS)^2 + (RS)^2 = 2x^2 + 2y^2 = 2(x^2 + y^2) = 2 \times 200 = 400,$$

ou seja, $PR = \sqrt{400} = 20$ m.

45. ***Divisão de números grandes*** – É claro que com números tão grandes, o objetivo da questão não é efetuar a divisão. Em vez disso, decompomos o número em partes convenientes.

$$\begin{aligned} 123\,456\,123\,456 &= 123\,456\,000\,000 + 123\,456 = 123\,456 \times 1\,000\,000 + 123\,456 \\ &= 123\,456 \times (1\,000\,000 + 1) = 123\,456 \times 1\,000\,001 \end{aligned}$$

Logo, $123\,456\,123\,456 \div 1\,000\,001 = 123\,456$.

46. ***Refrigerante no cinema*** – A opção correta é (c).

A economia teria sido equivalente a seis refrigerantes, permitindo a Joãozinho mais um cinema e mais um refrigerante. Logo, o ingresso do cinema é cinco vezes o valor do refrigerante.

47. ***Divisão de potências*** – A opção correta é (c).

Solução 1: $\dfrac{50^{50}}{25^{25}} = \dfrac{(2 \times 5^2)^{50}}{(5^2)^{25}} = \dfrac{2^{50} \times 5^{100}}{5^{50}} = 2^{50} \times 5^{50} = (2^2 \times 5^2)^{25} = 100^{25}$.

Solução 2: $\dfrac{50^{50}}{25^{25}} = \dfrac{(2 \times 25)^{50}}{25^{25}} = \dfrac{2^{50} \times 25^{50}}{25^{25}} = 2^{25} \times 2^{25} \times 25^{25} = 100^{25}$.

48. ***Palitos de dois tamanhos*** – A opção correta é (a).

A quantidade de palitos é mínima quando o número de palitos de 7 cm utilizado é o maior possível. O segmento mede 200 cm. Dividindo 200 por 7, obtemos $200 = 28 \times 7 + 4$. Portanto, se tentássemos utilizar apenas palitos de 7 cm, deveríamos utilizar 29 palitos, mas ainda sobrariam 3 cm. Para que não sobrem esses 3 cm, basta substituir 3 dos 29 palitos de 7 cm por palitos de 6 cm. Temos $26 \times 7 + 3 \times 6 = 200$. Logo, o número mínimo de palitos é $26 + 3 = 29$. Devemos utilizar 26 palitos de 7 cm e 3 palitos de 6 cm.

Observação: Observe que a solução equivale a encontrar números inteiros x e y tais que $200 = \underbrace{7y}_{\text{múltiplo de 7}} + \underbrace{6x}_{\text{múltiplo de 6}}$ e y seja o maior possível, onde y denota o número de palitos de 7 cm e x o de palitos de 6 cm.

49. ***Maior raiz*** – A opção correta é (d).

Solução 1: Usando a fatoração $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, temos

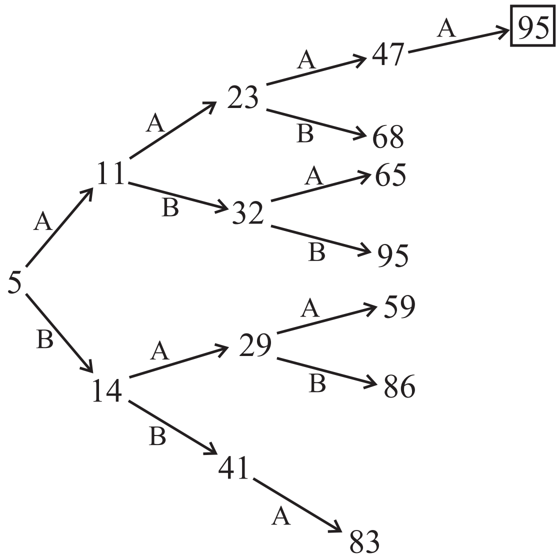
$$0 = (x - 37)^2 - 169 = (x - 37)^2 - 13^2 = (x - 37 - 13)(x - 37 + 13) = (x - 50)(x - 24).$$

Logo, as raízes são 24 e 50.

Solução 2: Extraindo a raiz quadrada em ambos os lados de $(x-37)^2 = 13^2$, temos $x - 37 = 13$, ou $x - 37 = -13$. Assim, $x = 50$ ou $x = 24$.

50. ***Máquina com visor*** – A opção correta é (d).

O diagrama a seguir mostra os resultados de dois algarismos que podem ser obtidos a partir do número 5, apertando cada uma das duas teclas.



51. ***Quadrado mágico parcial*** – A opção correta é (e).

De acordo com a regra de quadrado mágico, temos que a soma dos números da diagonal que contém y é igual à soma dos números da coluna que contém y, ou seja, $26 + 14 + y = y + x + 13$. Segue que $26 + 14 = x + 13$, donde $x = 13$.

		y
1	14	x
26		13

52. ***Área do retângulo*** – A opção correta é (e).

Solução 1: Observemos, primeiro, que a razão entre as áreas de dois retângulos que têm a mesma base é igual à razão entre suas alturas. De fato, na figura à esquerda, estão representados dois retângulos que têm a mesma base b e alturas h_1 e h_2.

Suas áreas S_1 e S_2 são dadas por $S_1 = b\,h_1$ e $S_2 = b\,h_2$, portanto,

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{bh_1}{bh_2} = \frac{h_1}{h_2}\,.$$

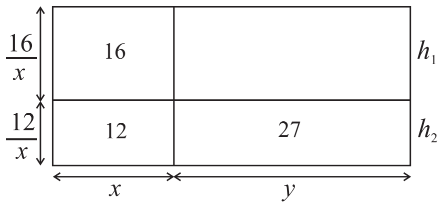
Aplicando essa observação aos dois pares de retângulos dados (ver figura acima, à direita) e denotando por S a área do quarto retângulo, temos

$$\frac{S}{27} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3},$$

de modo que $S = \frac{1}{3}(27 \times 4) = 36$. Assim, a área do retângulo $ABCD$ é

$$12 + 16 + 27 + 36 = 91.$$

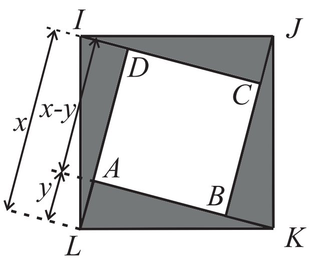
Solução 2: Sejam x e y lados dos retângulos de áreas 12 e 27, respectivamente, como indicado na figura. Logo os outros lados desses retângulos são $12/x$ (retângulo de área 12), $16/x$ (retângulo de área 16) e $27/y$ (retângulo de área 27), como indicado na figura.

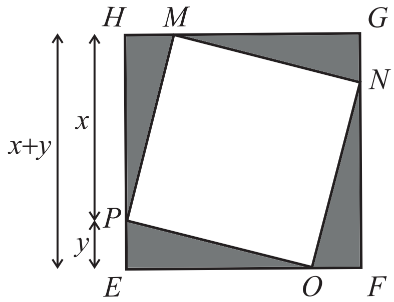


Assim, o comprimento do retângulo $ABCD$ é $x+y$ e sua largura $\dfrac{16}{x} + \dfrac{12}{x} = \dfrac{28}{x}$. Claramente, $\dfrac{12}{x} = \dfrac{27}{y}$, de modo que $\dfrac{y}{x} = \dfrac{27}{12} = \dfrac{9}{4}$. A área de um retângulo é o produto do comprimento pela largura. Logo, a área de $ABCD$ é $A = (x+y) \times \dfrac{28}{x} = 28 + \dfrac{28y}{x} = 28 + 28\dfrac{y}{x}$. Assim, $A = 28 + 28 \times \dfrac{9}{4} = 28 + 7 \times 9 = 91$.

53. ***Lado do quadrado***

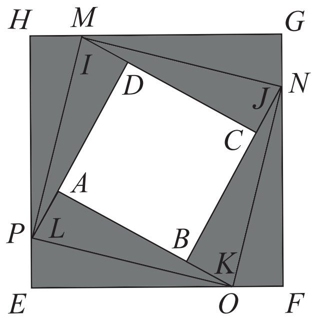
Solução 1: Sejam x e y o maior e o menor catetos, respectivamente, do triângulo retângulo. Como o lado do quadrado $ABCD$ mede 3 cm, temos $x - y = 3$. Por outro lado, como o lado de $EFGH$ mede 9 cm, temos $x + y = 9$. Resolvendo o sistema, encontramos $x = 6$ e $y = 3$. Logo, o lado do quadrado $IJKL$, que é a hipotenusa do triângulo retângulo, mede $\sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ cm, pelo Teorema de Pitágoras.





Solução 2: Os quadrados $IJKL$ e $MNOP$ têm como lados as hipotenusas dos triângulos retângulos dados, logo têm a mesma área.

Superpondo-se as duas figuras e fazendo esses dois quadrados coincidirem, encontramos oito triângulos e concluímos que $8 \times$ a área do triângulo é igual à área de $EFGH$ menos a área de $ABCD$, ou seja, é igual a $9^2 - 3^2 = 72$. Logo, a área de cada triângulo é 9 cm^2. Da figura, temos que a área de $IJKL$ é igual a $4 \times$ a área do triângulo mais a área de $ABCD$, ou seja, é igual a $4 \times 9 + 9 = 45$.



Logo, o lado do quadrado $IJKL$ mede $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ cm.

54. ***Maior número*** – A opção correta é (d).

Lembre que, se num produto, um dos fatores é zero, então o produto também é zero. Temos $2 \times 0 \times 2\,006 = 0$, $2 \times 0 + 6 = 0 + 6 = 6$, $2 + 0 \times 2\,006 = 2 + 0 = 2$, $2 \times (0 + 6) = 2 \times 6 = 12$ e $2\,006 \times 0 + 0 \times 6 = 0 + 0 = 0$. Logo, o maior número é $2 \times (0 + 6) = 12$.

55. ***Operação*** $\odot$ – A opção correta é (e).

Temos que descobrir qual é a regra dessa operação. Note que

$$2 \odot 4 = 10 = 2 \times 4 + 2, 3 \odot 8 = 27 = 3 \times 8 + 3, 4 \odot 27 = 112 = 4 \times 27 + 4$$

e $5 \odot 1 = 10 = 5 \times 1 + 5$.

Uma hipótese plausível é que a regra que define a operação $\odot$ seja $a \odot b = a \times b + a$. Segundo essa regra, temos

$$4 \odot (8 \odot 7) = 4 \odot (8 \times 7 + 8) = 4 \odot 64 = 4 \times 64 + 4 = 260.$$

56. ***Terceiro lado*** – A opção correta é (e).

Lembre que, num triângulo, a soma de dois lados quaisquer deve ser maior que o terceiro lado. Como 1 + 5 não é maior do que 7, o terceiro lado não pode medir 1 cm.

57. ***Asterisco*** – A opção correta é (e).

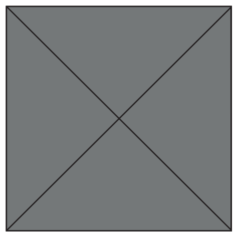
$$\frac{1}{6} = \frac{*}{24} - \frac{3}{8} - \frac{2}{3} = \frac{*}{24} - \left(\frac{3}{8} + \frac{2}{3}\right) = \frac{*}{24} - \frac{25}{24} = \frac{* - 25}{24}.$$

Logo, $\dfrac{* - 25}{24} = \dfrac{1}{6} = \dfrac{4}{24}$, donde $* - 25 = 4$, ou seja, $* = 29$.

58. ***Expressões algébricas*** – Note que a figura é um retângulo formado por um quadrado de lado a e um retângulo de lados 1,5 e a. Logo, a^2 é a área do quadrado e $1{,}5\,a$ é a área do retângulo. Assim, $a^2 + 1{,}5\,a$ representa a soma dessas duas áreas, ou seja, a área total da figura. Já $4\,a + 3 = 3\,a + 1{,}5 + a + 1{,}5$ é o perímetro da figura.

59. ***Faixa decorativa*** – A opção correta é (d).

Solução 1: O comprimento da hipotenusa de cada um dos cinco triângulos retângulos isósceles da faixa mede $30 \div 5 = 6$ cm. O quadrado formado por quatro desses triângulos tem lado igual a 6 cm, portanto, sua área é 36 cm^2. Logo, cada um dos triângulos tem $36 \div 4 = 9$ cm^2 de área. Portanto, a área da parte sombreada mede $9 \times 5 = 45$ cm^2.


6 cm

Solução 2: O comprimento da hipotenusa de cada um dos cinco triângulos retângulos isósceles da faixa mede $30 \div 5 = 6$ cm. Denotando os catetos desses triângulos por x, o Teorema de Pitágoras fornece $36 = x^2 + x^2 = 2x^2$, ou seja, $x^2 = 18$, de modo que a área de cada um dos cinco triângulos da faixa mede 9 cm^2. Assim, a área da parte sombreada mede $5 \times 9 = 45$ cm^2.

60. ***Bicicleta e chocolate*** – A opção correta é (c).

Como $\begin{cases} \text{2 barras dá 3 h} \\ \text{12 bombons dá 2 h} \end{cases}$, segue que $\begin{cases} \text{1 barra dá 1,5 h} = \text{1 h 30 min} \\ \text{3 bombons dá 0,5 h} = \text{30 min} \end{cases}$.

Assim, Tião me emprestará a bicicleta por 1 h 30 min + 30 min = 2 horas.

61. ***Retas paralelas?***

Solução 1: No triângulo $\triangle BCE$, temos $B\widehat{E}C = 180° - (42° + 48°) = 90°$. No triângulo $\triangle AFD$, temos $A\widehat{F}D = 180° - (28° + 62°) = 90°$. Logo, as retas EC e FD são perpendiculares à reta AB, de modo que são paralelas.

Solução 2: No triângulo $\triangle ABC$, temos $B\widehat{C}A = 180° - (48° + 62°) = 70°$. Portanto, $E\widehat{C}A = 70° - 42° = 28° = F\widehat{D}A$. Logo, as retas EC e FD são paralelas, pois cortam a reta AD segundo o mesmo ângulo.

62. ***Menor número*** – A opção correta é (b).

Como $x > 5$, temos $0 < x - 1 < x < x + 1$. Portanto, $\dfrac{5}{x+1} < \dfrac{5}{x} < \dfrac{5}{x-1}$. Também temos $\dfrac{5}{x} < 1 < \dfrac{x}{5} < \dfrac{x+1}{5}$, pois $5 < x < x + 1$. Assim, dentre os números $5/x$, $5/(x+1)$, $5/(x-1)$, $x/5$ e $(x+1)/5$, o menor é $5/(x+1)$.

63. ***Área de quadrado*** – A opção correta é (a).

Denotemos por C e L o comprimento e a largura, respectivamente, de cada um dos quatro retângulos. O perímetro de cada retângulo é dado por $2(C + L)$. Como esse perímetro mede 40 cm, obtemos $C + L = 20$ cm. Observe, na figura dada, que o lado do quadrado $STUV$ é dado por $C + L$. Assim, sua área é de $(C+L)^2 = 20^2 = 400$ cm^2.

64. ***Operando frações***

(a) $1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$, $\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{12}$, $\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{20}$, $\dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{30}$.

(b) $\underbrace{\dfrac{1}{2}}_{1-\frac{1}{2}} + \underbrace{\dfrac{1}{6}}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} + \underbrace{\dfrac{1}{12}}_{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} + \underbrace{\dfrac{1}{20}}_{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}} + \underbrace{\dfrac{1}{30}}_{\frac{1}{5}-\frac{1}{6}} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6}$;

cancelando as parcelas iguais de sinais opostos, resulta que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

(c) Para calcular a soma $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{30} + \dfrac{1}{42} + \cdots + \dfrac{1}{999\,000}$, começamos observando que todos os denominadores são produtos de números consecutivos, iniciando em 1; usando a decomposição de cada parcela dada no item (a), obtivemos, no item (b), que

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\frac{1}{5\times 6}=1-\frac{1}{6}\,.$$

Mais geralmente, podemos provar que

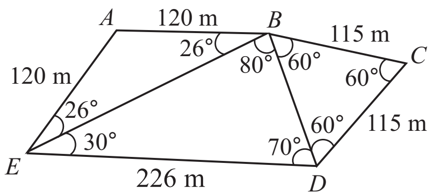
$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\frac{1}{5\times 6}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}\,.$$

Assim,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\cdots+\frac{1}{999\,000}=1-\frac{1}{1\,000}=\frac{999}{1\,000}=0{,}999.$$

65. ***Ângulos e perímetro*** – O triângulo $\triangle BCD$ é isósceles, porque tem dois lados iguais, $BD=BC$, logo $B\widehat{D}C=B\widehat{C}D$.

Mas $D\widehat{B}C=B\widehat{C}D$, portanto os três ângulos desse triângulo são iguais, cada um valendo $180^\circ\div 3=60^\circ$, e o triângulo $\triangle BCD$ é equilátero. Assim, $BD=BC=CD=115$ m.



O triângulo $\triangle ABE$ também é isósceles, porque tem dois ângulos iguais, logo os lados AE e AB são iguais, portanto $AB=AE=120$ m. Assim, o perímetro da figura mede $120\times 2+115\times 2+226=696$ m.

66. ***Desigualdade racional*** – A opção correta é (c).

Temos $\dfrac{1}{x-2}<4 \iff \dfrac{1}{x-2}-4<0 \iff \dfrac{1-4(x-2)}{x-2}<0 \iff \dfrac{9-4x}{x-2}<0.$

Para que uma fração seja negativa, o numerador e o denominador devem ter sinais contrários.

1º Caso: $9-4x>0$ e $x-2<0$. Devemos ter $x<(9/4)$ e $x<2$. Portanto, $x<2$, pois sendo menor do que 2, automaticamente x será menor do que $9/4$. Concluímos que todo $x<2$ satisfaz a desigualdade.

2º Caso: $9-4x<0$ e $x-2>0$. Devemos ter $x>(9/4)$ e $x>2$. Portanto, $x>(9/4)$, pois sendo maior do que $9/4$, automaticamente x será maior do que 2. Concluímos que todo $x>(9/4)$ satisfaz a desigualdade.

Juntando os dois casos, concluímos que x satisfaz a desigualdade se, e só se, $x<2$ ou $x>(9/4)$.

67. ***Desigualdade dupla*** – A opção correta é (e).

Como os números que aparecem são todos positivos, podemos elevá-los ao quadrado mantendo o sentido das desigualdades, obtendo

$$2\,000\times 2\,000=2\,000^2<n(n+1)<2\,005^2=2\,005\times 2\,005.$$

Observe que n e $n+1$ são inteiros consecutivos, portanto, as únicas opções são as seguintes.

- $2\,000^2 < 2\,000 \times 2\,001 < 2\,005^2$
- $2\,000^2 < 2\,001 \times 2\,002 < 2\,005^2$
- $2\,000^2 < 2\,002 \times 2\,003 < 2\,005^2$
- $2\,000^2 < 2\,003 \times 2\,004 < 2\,005^2$
- $2\,000^2 < 2\,004 \times 2\,005 < 2\,005^2$

Logo, temos cinco possibilidades para n, a saber, 2 000, 2 001, 2 002, 2 003 e 2 004.

68. ***Diâmetro do círculo*** – Observe que OC é um raio do círculo. Temos que $OC = AB = 5$ cm, por serem as diagonais do retângulo $OACB$. Logo, o diâmetro mede 10 cm.

69. ***Falta um ângulo*** – A opção correta é (d).

Lembre que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Do triângulo $\triangle STU$, temos que $T\widehat{S}U = 180° - (75° + 30°) = 75°$. Logo, esse triângulo é isósceles (por ter dois ângulos iguais) e, portanto, $TU = SU$. Como $TU = SV$, segue que $SU = SV$. Assim, o triângulo $\triangle SUV$ também é isósceles e, portanto,

$$S\widehat{V}U = \frac{1}{2}(180° - 50°) = 65°.$$

70. ***Café, bolo e gato*** – Vamos listar os eventos ocorridos e contar o tempo gasto em cada um. A primeira atividade foi colocar o gato fora da casa, logo nossa lista começa com essa atividade e o tempo é contado a partir dela.

Atividade	Tempo depois que o gato foi posto fora de casa
Gato fora de casa	0 minutos
Bolo no forno	10 minutos
Fazer o café	$10 + 6 = 16$ minutos
Despertador toca	$35 + 10 = 45$ minutos
Gato entra em casa	$45 - 5 = 40$ minutos
Acabar de tomar o café	$40 + 3 = 43$ minutos
Telefone toca	$16 + (40 - 16) \div 2 = 28$ minutos
Desligar o telefone	$28 + 5 = 33$ minutos

Podemos, agora, dar as respostas.

(a) Às 3h59min desliguei o telefone, o que ocorreu 33 minutos depois de colocar o gato fora de casa. Como $59 - 33 = 26$, coloquei o gato para fora às 3h26min.

(b) O despertador toca 45 minutos após colocar o gato fora de casa.

(c) O gato já estava fora de casa por 28 minutos quando o telefone tocou.

Podemos saber exatamente a hora em que ocorreu cada atividade, conforme a tabela seguinte.

Atividade	Tempo depois que o gato foi posto fora de casa	Horário
Gato fora de casa	0 min	$59-33=3$h26min
Bolo no forno	10 min	$26+10=3$h36min
Fazer o café	$10+6=16$ min	$26+16=3$h42min
Despertador toca	$35+10=45$ min	$26+45=4$h11min
Gato entra em casa	$45-5=40$ min	$26+40=4$h06min
Acabar de tomar o café	$40+3=43$ min	$26+43=4$h09min
Telefone toca	$16+(40-16)\div 2=28$ min	$26+28=3$h54min
Desligar o telefone	$28+5=33$ min	$26+33=3$h59min

71. ***Muitos ângulos*** – Na figura I, temos $63^\circ+18^\circ+95^\circ=176^\circ$, que é menor do que 180°. Logo, esta figura está errada.

    Na figura II, temos $112^\circ+72^\circ=184^\circ$, que é maior do que 180°. Logo, esta figura está errada.

    Na figura III, temos $44^\circ+45^\circ+62^\circ+29^\circ=180^\circ$. Esta figura está correta.

72. ***Sinal de produto e de quociente***

    - Como $\dfrac{a}{5}>0$ e $5>0$, obtemos $a>0$.
    - Como $a>0$, temos $7a>0$. Como $\dfrac{-b}{7a}>0$, segue que $-b>0$, portanto, $b<0$.
    - Como $\dfrac{11}{abc}>0$ e $11>0$, obtemos $abc>0$. Como $b<0<a$, segue que $c<0$.
    - Como $\dfrac{-18}{abcd}>0$ e $-18<0$, obtemos $abcd<0$. Como $abc>0$, segue que $d<0$.

73. ***Sinais e radicais*** – Temos $3\sqrt{11}=\sqrt{9\times 11}=\sqrt{99}$. Como $100>99$, obtemos $10=\sqrt{100}>\sqrt{99}=3\sqrt{11}$, portanto, $10-3\sqrt{11}>0$ e $3\sqrt{11}-10<0$. Analogamente, temos $10\sqrt{26}=\sqrt{100\times 26}=\sqrt{2\,600}$. Como $2\,601>2\,600$, obtemos

    $$51=\sqrt{2\,601}>\sqrt{2\,600}=10\sqrt{26},$$

    portanto, $51-10\sqrt{26}>0$ e $10\sqrt{26}-51<0$. Finalmente, $18^2=324<325=25\times 13$ garante que $18<5\sqrt{13}$, de modo que $18-5\sqrt{13}<0$.

    Os números negativos são (b) $3\sqrt{11}-10$, (c) $10\sqrt{26}-51$ e (e) $18-5\sqrt{13}$.

74. ***Ângulos entre retas*** – Temos $80^\circ+y=180^\circ$, portanto, $y=100^\circ$. Como as retas r e s são paralelas, segue que $60^\circ+x+80^\circ=180^\circ$, donde $x=40^\circ$.

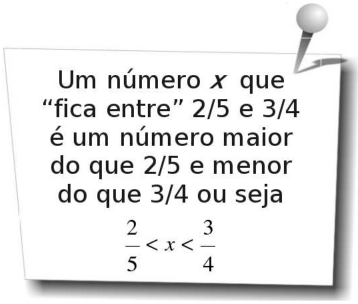
75. ***Variação de temperatura*** – A variação de temperatura é a diferença entre a máxima e a mínima. Completamos a tabela dada com as variações, como segue.

Dia	Temperatura máxima, em °C	Temperatura mínima, em °C	Variação da temperatura, em °C
2ª-feira	7	-12	$7-(-12)=7+12=19$
3ª-feira	0	-11	$0-(-11)=0+11=11$
4ª-feira	-2	-15	$-2-(-15)=15-2=13$
5ª-feira	9	-8	$9-(-8)=9+8=17$
6ª-feira	13	-7	$13-(-7)=13+7=20$

Logo, a maior variação da temperatura ocorreu na sexta-feira.

76. ***Ordenando frações*** – A opção correta é (d).

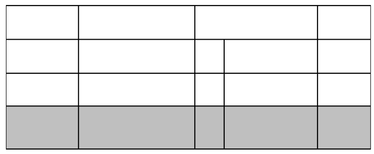
Lembre que a ordem entre frações constituídas de inteiros positivos é determinada pelo produto cruzado dos inteiros, ou seja, $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ equivale à afirmação $a \times d < b \times c$. Desse modo, temos



$$\frac{1}{6} < \frac{1}{4} < \frac{2}{5} < \frac{4}{7} < \frac{3}{4} < 1 < \frac{4}{3} < \frac{5}{2},$$

já que $4 < 6$, $5 < 8$, $14 < 20$, $16 < 21$, $3 < 4$ (duas vezes) e $8 < 15$, respectivamente. Assim, $1/6$ e $1/4$ ficam à esquerda de $2/5$, $4/3$ e $5/2$ ficam à direita de $3/4$ e só $4/7$ fica entre $2/5$ e $3/4$.

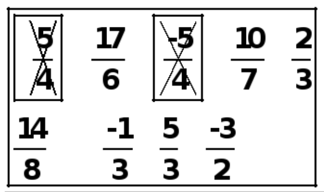
77. ***Fração de área*** – Observe que a região em cinza na figura dada tem a mesma área que a do enunciado. Como todos os retângulos têm a mesma largura, o retângulo maior está dividido em quatro partes iguais por segmentos paralelos ao seu comprimento.



Assim, a região cinza representa uma quarta parte do retângulo maior.

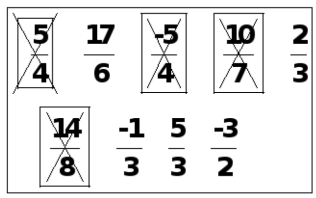
78. ***Uma a mais!***

(a) duas frações cuja diferença é $\frac{5}{2}$:



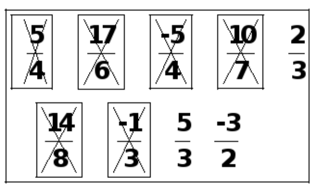
$$\frac{5}{4} - \left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{4} + \frac{5}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$

(b) duas frações cujo produto é $\frac{5}{2}$:



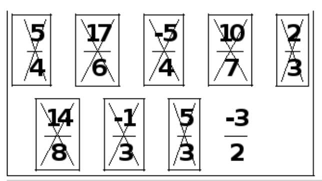
$$\frac{10}{7} \times \frac{14}{8} = \frac{10}{7} \times \frac{7}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$

(c) duas frações cuja soma é $\frac{5}{2}$:



$$\frac{17}{6} + \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{17}{6} - \frac{1}{3} = \frac{17}{6} - \frac{2}{6} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}.$$

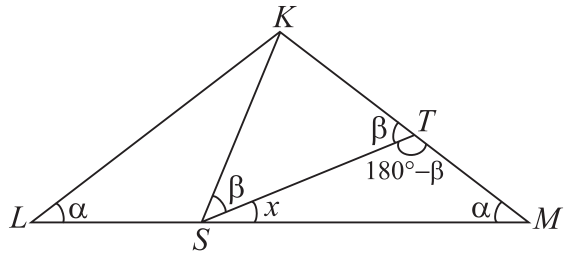
(d) duas frações cujo quociente é $\frac{5}{2}$:



$$\frac{5}{3} \div \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{5}{2}.$$

Logo, a fração que está sobrando é $-\dfrac{3}{2}$.

79. ***Qual é o ângulo?*** – A opção correta é (b).

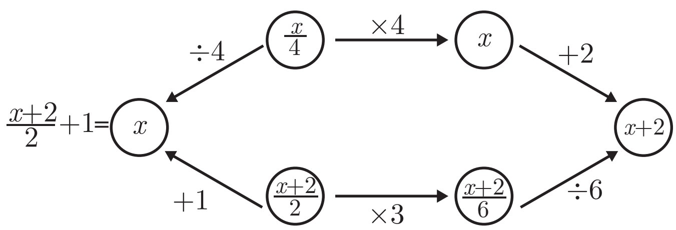


Sejam $T\widehat{S}M = x$, $S\widehat{K}T = y$, $K\widehat{L}S = \alpha$, $K\widehat{T}S = \beta$. O triângulo $\triangle KLM$ é isósceles porque tem dois lados iguais; consequentemente, seus ângulos da base são iguais, isto é, $K\widehat{M}S = K\widehat{L}S = \alpha$. Analogamente, o triângulo $\triangle KST$ também é isósceles e, portanto, $K\widehat{S}T = K\widehat{T}S = \beta$. Usaremos, agora, que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Acompanhe na figura:

- No triângulo $\triangle SMT$ temos $x + \alpha + 180° - \beta = 180°$, portanto, $x = \beta - \alpha$.
- No triângulo $\triangle KLM$ temos $\alpha + \alpha + 30° + y = 180°$, portanto, $y = 150° - 2\alpha$.
- No triângulo $\triangle KST$ temos $\beta + \beta + 150° - 2\alpha = 180°$, portanto, $\beta - \alpha = 15°$.

Assim, $x = 15°$.

80. ***Operação circular*** – Colocando x num dos círculos e aplicando a sucessão de operações obtemos $x = \dfrac{x+2}{2} + 1$, donde $x = 4$.



81. ***Pratos e copos*** – Sejam c e p o número de copos e pratos que Iara pode comprar. Observe que certamente c e p são números inteiros e além disso, como ela quer comprar, no mínimo, quatro pratos e seis copos, temos $p \geq 4$ e $c \geq 6$. Como cada copo custa R\$ 2,50 e cada prato custa R\$ 7,00, o custo de c copos e p pratos é $2{,}5\,c + 7\,p$. Mas Iara só dispõe de R\$ 50,00, portanto, $2{,}5\,c + 7\,p \leq 50$. Assim, devemos encontrar dois números inteiros c e p que satisfaçam $p \geq 4$, $c \geq 6$ e $2{,}5\,c + 7\,p \leq 50$.

- Se Iara comprar quatro pratos, sobram $50 - 4 \times 7 = 22$ reais para os copos. Como $22 = 8 \times 2{,}50 + 2$, ela pode comprar mais oito copos (sobrando R\$ 2,00).
- Se Iara comprar cinco pratos, sobram $50 - 5 \times 7 = 15$ reais para os copos. Como $15 = 6 \times 2{,}50$, ela pode comprar mais seis copos.

- Se Iara comprar seis pratos, sobram $50 - 6 \times 7 = 8$ reais para os copos, o que lhe permite comprar apenas três copos, que não é o que ela quer.

Logo, Iara pode comprar quatro pratos e oito copos, ou cinco pratos e seis copos.

82. ***Desigualdades de inteiros*** – A opção correta é (c).

Somando 1 aos três membros das duas desigualdades $-5 < x - 1 \leq 5$ obtemos $-5 + 1 < x - 1 + 1 \leq 5 + 1$, ou seja, $-4 < x \leq 6$. Os valores inteiros de x que satisfazem essas duas desigualdades são $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ e 6.

83. ***Nove quadrados*** – A opção correta é (d).

O lado de A mede $\sqrt{1} = 1$ cm e o de B mede $\sqrt{81} = 9$ cm. Agora temos:

- Lado de G = lado de de B − lado de $A = 9 - 1 = 8$ cm.
- Lado de C = lado de B + lado de $A = 1 + 9 = 10$ cm.
- Lado de F = lado de G − lado de $A = 8 - 1 = 7$ cm.
- Lado de H = lado de G + lado de $F = 8 + 7 = 15$ cm.
- Lado de B + lado de C = lado de G + lado de F + lado de E, portanto, $9 + 10 = 8 + 7 +$ lado de E, ou seja, lado de E = 4 cm.
- Lado de D = lado de C + lado de $E = 10 + 4 = 14$ cm.
- Lado de I = lado de E + lado de $D = 18$ cm.

Finalmente, a área de I mede $18^2 = 324$ cm^2.

84. ***Muitas medalhas*** – Denotemos por A, B, C e D o número de medalhas ganhas por André, Bruno, Celina e Dalva, respectivamente. Então A, B, C e D são inteiros não negativos e $A + B + C + D = 21$. Temos que

- Bruno ganhou o dobro de Celina, ou seja, $B = 2C$.
- Dalva ganhou três a mais do que Bruno, ou seja, $D = B + 3 = 2C + 3$.

Assim, atribuindo qualquer valor a C, automaticamente sabemos os valores de B e D. Mas $A + 2C + C + 2C + 3 = A + B + C + D = 21$. Logo, $A + 5C = 18$ e, portanto, podemos expressar também A em termos de C, com $A = 18 - 5C$. Observe que $C \leq 3$, pois se $C = 4$, então $A = 18 - 20 = -2$, o que é impossível.

Como C é um inteiro maior do que ou igual a 0 e menor do que 4, temos apenas as possibilidades seguintes.

C	A	B	D
0	18	0	3
1	13	2	5
2	8	4	7
3	3	6	9

Como André foi o que recebeu mais medalhas, $C = 3$ não serve. O problema tem, então, três possíveis soluções, listadas a seguir.

A	B	C	D
18	0	0	3
13	2	1	5
8	4	2	7

85. ***As somas são quadrados*** – Com números de 1 a 15, a soma de dois adjacentes é, no mínimo, 3 e, no máximo, 29. Os quadrados de números inteiros de 3 a 29 são, apenas, 4, 9, 16 e 25. Verifiquemos quais são os números de 1 a 15 que podem ser adjacentes, ou "vizinhos".

Números	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Vizinhos	3	7	1	5	4	3	2	1	7	6	5	4	3	2	1
possíveis	8	14	6	12	11	10	9			15	14	13	12	11	10
	15		13												

Os números 8 e 9 só têm, cada um, apenas um possível vizinho, logo eles devem ser colocados no início e no fim da fila, seguidos de seus únicos vizinhos.

8	1	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	7	9

Sobram os números 2, 3, 4, 5, 6, 10,11 12, 13, 14 e 15. Na "tabela de vizinhos", vemos que, ao lado do 7, só podemos colocar o 2 e, ao lado do 2, só o 14. Temos, então,

8	1	?	?	?	?	?	?	?	?	?	14	2	7	9

Consultando a "tabela de vizinhos" e os números que sobram, chegamos à resposta.

8	1	15	10	6	3	13	12	4	5	11	14	2	7	9

Veja, a seguir, a solução passo a passo.

Formação da linha em cada etapa															Sobram
8	1	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	7	9	2, 3, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 13, 14, 15
8	1	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	2	7	9	3, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 13, 14, 15
8	1	?	?	?	?	?	?	?	?	?	14	2	7	9	3, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 13, 15
8	1	?	?	?	?	?	?	?	5	11	14	2	7	9	3, 4, 6, 10, 12, 13, 15
8	1	?	?	?	?	?	?	4	5	11	14	2	7	9	3, 6, 10, 12, 13, 15
8	1	?	?	?	?	?	12	4	5	11	14	2	7	9	3, 6, 10, 13, 15
8	1	?	?	?	?	13	12	4	5	11	14	2	7	9	3, 6, 10, 15
8	1	?	?	?	3	13	12	4	5	11	14	2	7	9	6, 10, 15
8	1	15	10	6	3	13	12	4	5	11	14	2	7	9	Resposta

86. ***Área de uma região*** – Lembre que a área de um triângulo é

$$\frac{1}{2}\text{ base} \times \text{altura},$$

onde a altura é relativa à base escolhida. No triângulo $\triangle AEB$, temos base $= AB =$ comprimento do retângulo e a altura relativa a essa base é $BC =$ largura do retângulo. Logo, $\frac{1}{2} AB \times BC = 24$ e $AB \times BC = 48$. Logo, a área do retângulo é 48 cm^2. Assim, a área pedida é $48 - (24 + 13) = 48 - 37 = 11$ cm^2.

87. ***Potências de* 10** – A opção correta é (c).

$$\begin{aligned}\frac{0{,}00001 \times (0{,}01)^2 \times 1\,000}{0{,}001} &= \frac{10^{-5} \times (10^{-2})^2 \times 10^3}{10^{-3}} = \frac{10^{-5} \times 10^{-4} \times 10^3}{10^{-3}} \\ &= \frac{10^{-5+(-4)+3}}{10^{-3}} = \frac{10^{-6}}{10^{-3}} = 10^{-6-(-3)} = 10^{-3}\end{aligned}$$

88. ***Diferença de quadrados*** – A opção correta é (d).

Como $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ e $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$, temos

$$20 = (x+y)^2 - (x-y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2 = 4xy,$$

portanto $xy = 5$.

89. ***Um quadrilátero*** – Para que $ABCD$ seja um paralelogramo, seus lados devem ser dois a dois paralelos, isto é, $AB||CD$ e $AD||BC$. Como $D\widehat{A}B + A\widehat{B}C = 180°$, as retas AD e BC são paralelas. Também as retas AB e DC são paralelas, pois temos dois ângulos alternos internos de 45° entre essas retas. Assim, $ABCD$ é um paralelogramo.

90. ***Sexta-feira treze*** – Como os dias da semana se repetem a cada 7 dias, a diferença entre os dias da semana é dada pelo resto ao dividir o número de dias transcorridos por 7. Na tabela abaixo, temos

(a) na primeira linha, o número de dias entre o dia 13 de um mês e o dia 13 do mês seguinte;

(b) na segunda linha, o resto obtido quando dividimos esse número por 7;

(c) na terceira linha, o resto obtido quando dividimos por 7 o número de dias entre o 13 de janeiro e o 13 do mês correspondente; assim, esse número é obtido somando os resultados obtidos na primeira linha, desde janeiro até o mês correspondente, calculando, depois, o resto da divisão por 7.

J-F	F-M	M-A	A-M	M-J	J-J	J-A	A-S	S-O	O-N	N-D
31	28	31	30	31	30	31	31	30	31	30
3	0	3	2	3	2	3	3	2	3	2
3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5

Os valores iguais na última linha, significam que, nesses meses, o dia 13 caiu no mesmo dia da semana. Em particular, a última linha nos diz que 13 de fevereiro, 13 de março e 13 de novembro correspondem ao mesmo dia da semana. Assim, no máximo, temos três sextas-feiras treze.

No caso de três sextas-feiras treze num mesmo ano, o 13 de janeiro ocorreu 3 dias antes de sexta-feira, isto é, numa terça-feira, e o dia 10 de janeiro aconteceu 3 dias antes, isto é, num sábado.

Observação: Note que uma sexta-feira 13 ocorre apenas quando o primeiro dia do mês cair num domingo. Assim, uma outra maneira, talvez mais simples, de resolver o problema é determinar o número máximo de vezes em que o primeiro dia do mês caia num domingo num ano que não seja bissexto.

91. ***Triângulos com lados inteiros*** – A opção correta é (b).

Para que três números a, b e c sejam os comprimentos dos lados de um triângulo, cada um deles deve ser maior do que a diferença e menor do que a soma dos outros dois. Sejam $a \leq b \leq c$ os comprimentos dos lados do triângulo, de modo que $c < a + b$. Agora, somando c a ambos os membros, temos $2c < a + b + c = 12$, ou seja, $2c < 12$, de modo que $c < 6$. Além disso, como $3c \geq a + b + c = 12$, temos que $c \geq 4$, de modo que $4 \leq c < 6$.

No caso $c = 5$, temos que $a + b = 7$ e os possíveis valores de a e b são $a = 2$ e $b = 5$, ou $a = 3$ e $b = 4$. No caso $c = 4$, temos que $a + b = 8$ e, portanto, a única solução é $a = b = 4$. Conclusão: temos 3 possíveis triângulos.

92. ***Festa de aniversário*** – Denotemos por m o número de maçãs e por p o número de peras que Ana compra, de modo que o peso que ela leva na sacola é $300m+200p$ gramas. Como a sacola aguenta, no máximo, 7 000 gramas, temos $300m + 200p \leq 7\,000$, que equivale a $3m+2p \leq 70$. Como as peras pesam menos, Ana deve levar uma quantidade maior de peras e, portanto, uma menor de maçãs. Como Ana quer fazer tortas de ambas frutas, precisa levar pelo menos 1 maçã.

Se ela levar uma maçã, temos $2p \leq 70 - 3 = 67$, portanto $p \leq 33{,}5$, o que significa que Ana pode levar mais 33 peras, num total de 34 frutas. Se ela levar duas maçãs, temos $2p \leq 70 - 6 = 64$, portanto $p \leq 32$, o que significa que Ana pode levar mais 32 peras, novamente num total de 34 frutas. Se ela levar três maçãs, temos $2p \leq 70 - 9 = 61$, portanto $p \leq 30{,}5$, o que significa que Ana só pode levar mais 30 peras, num total de 33 frutas.

Nas contas feitas, vemos que, a cada maçã que Ana levar a mais, ela precisa comprar 1,5 peras a menos. Assim, se levar mais do que duas maçãs, nunca poderá levar mais do que 30 peras, num total sempre inferior a 34 frutas.

Conclusão: o número máximo de frutas que Ana pode levar é 34 frutas (ou uma maçã e 33 peras, ou duas maçãs e 32 peras).

93. ***Os dois quadrados*** – Se a é a medida do lado do quadrado maior e b a medida do lado do quadrado menor, então sabemos do enunciado que $a^2 = b^2 + 2\,001$. Logo $2\,001 = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ e, como a e b são números inteiros, temos que $a + b$ e $a - b$ são divisores de 2 001. Mas, $2\,001 = 3 \times 23 \times 29$, portanto, temos 4 possíveis formas de fatorar 2 001 em dois fatores, a saber,

$$(a + b)(a - b) = 2\,001 \times 1 = 667 \times 3 = 87 \times 23 = 69 \times 29.$$

Como $(a + b) + (a - b) = 2a$, resulta

(a) $a + b = 2\,001$ e $a - b = 1$, caso em que $a = \dfrac{2\,001 + 1}{2} = 1\,001$;

(b) $a + b = 667$ e $a - b = 3$, caso em que $a = \dfrac{667 + 3}{2} = 335$;

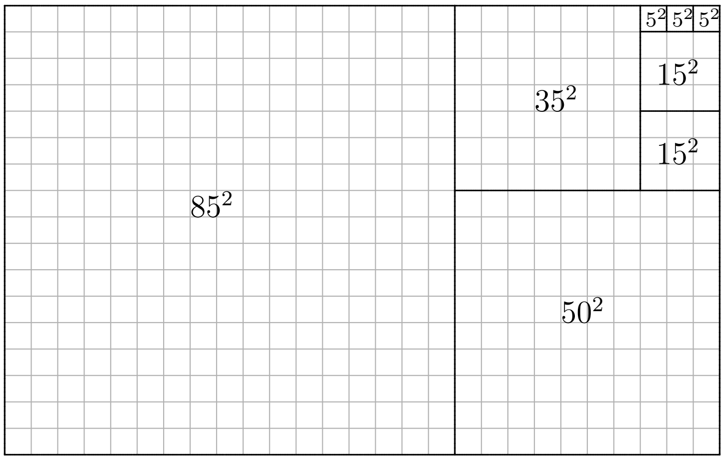
(c) $a + b = 87$ e $a - b = 23$, caso em que $a = \dfrac{87 + 23}{2} = 55$;

(d) $a + b = 69$ e $a - b = 29$, caso em que $a = \dfrac{69 + 29}{2} = 49$.

Assim, as possibilidades para o lado maior são 1 001, 335, 55 e 49 cm.

94. ***A multiplicação*** – O maior quadrado no retângulo de 85×135 é aquele de 85×85. Sobra, então, um retângulo de 50×85, em que o maior quadrado mede 50×50. Continuando assim, obtemos

$$85 \times 135 = 85^2 + 50^2 + 35^2 + 15^2 + 15^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2.$$



95. ***Expressão fracionária*** – A opção correta é (c).

Solução 1: Temos $\dfrac{x-y}{x} = \dfrac{x}{x} - \dfrac{y}{x} = 1 - \dfrac{y}{x}$ e, como $\dfrac{x}{y} = 2$, resulta que $\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{2}$ e, portanto,

$$\frac{x-y}{x} = \frac{x}{x} - \frac{y}{x} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Solução 2: Se $\dfrac{x}{y} = 2$, então $x = 2y$ e, portanto, $\dfrac{x-y}{x} = \dfrac{2y-y}{2y} = \dfrac{y}{2y} = \dfrac{1}{2}$.

96. ***Diferença e soma de quadrados***

(a) Como $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, temos

$$1\,678^2 - 1\,677^2 = (1\,678 + 1\,677)(1\,678 - 1\,677) = 3\,355.$$

(b) Como $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, temos

$$\begin{aligned} 1\,001^2 + 1\,000^2 &= (1\,000+1)^2 + 1\,000^2 = 1\,000^2 + 2\,000 + 1 + 1\,000^2 = \\ &= 2 \times 1\,000^2 + 2\,001 = 2\,002\,001. \end{aligned}$$

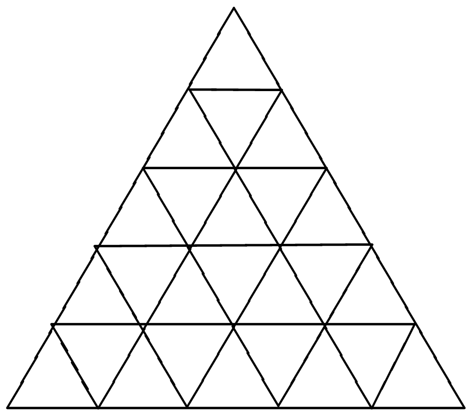
(c) Como $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, temos

$$\begin{aligned} 19\,999^2 &= (20\,000 - 1)^2 = (2 \times 10^4)^2 - 4 \times 10^4 + 1 = \\ &= 4 \times 10^8 - 4 \times 10^4 + 1 = 399\,960\,001. \end{aligned}$$

(d) Colocando em função de 2 000, temos

$$\begin{aligned} 2\,001^2 + 2\,002^2 + 2\,003^2 &= (2\,000+1)^2 + (2\,000+2)^2 + (2\,000+3)^2 = \\ &= 3 \times 2\,000^2 + 12 \times 2\,000 + 14 = 12\,024\,014. \end{aligned}$$

97. ***Um queijo triangular*** – Para dividir o queijo em 5 partes iguais, é suficiente dividi-lo em $5k$ partes iguais e dar k partes a cada um. Observe que se dividirmos cada lado para servir de base de dois triângulos equiláteros menores, obtemos $4 = 2^2$ triângulos menores no total; dividindo cada lado para servir de base de três ou quatro triângulos equiláteros menores, obtemos $9 = 3^2$ ou $16 = 4^2$ triângulos no total. Dessa maneira, a menor divisão em $5k$ triângulos menores é alcançada quando $5k$ é um quadrado, ou seja, quando $k = 5$. Essa partição é mostrada na figura, em que o queijo foi partido em $25 = 5^2 = 5k$ triângulos.



98. ***Notas de Matemática*** – Devemos encontrar os valores dos símbolos na soma

$$\begin{array}{rccc} & & \blacksquare & \bigstar \\ + & & \bigstar & \divideontimes \\ \hline & \divideontimes & \square & \boxplus \end{array}$$

As duas notas são números de dois algarismos e a soma deles têm três algarismos, de modo que a soma precisa ser maior do que 100 e menor do que 200. Assim, temos que $\divideontimes = 1$. Mas, Cláudia obteve 13 pontos a mais do que João, portanto,

$$\begin{array}{rcc} & \blacksquare & \bigstar \\ + & 1 & 3 \\ \hline & \bigstar & 1 \end{array}$$

Agora, como a soma de $\bigstar$ e 3 termina em 1, temos que $\bigstar = 8$ e, portanto, $\blacksquare = 6$. Assim, as notas de Cláudia e João são, respectivamente, 81 e 68.

99. ***Operação com raiz quadrada*** – A opção correta é (c).

Observe que, denotando por A a expressão dada, temos

$$\begin{aligned}
A^2 &= \left[(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-2)\sqrt{\sqrt{3}+2}\,\right]^2 \\
&= (\sqrt{6}+\sqrt{2})^2(\sqrt{3}-2)^2\left(\sqrt{\sqrt{3}+2}\,\right)^2 \\
&= (\sqrt{6}+\sqrt{2})^2(\sqrt{3}-2)^2(\sqrt{3}+2) \\
&= (\sqrt{6}+\sqrt{2})^2(\sqrt{3}-2)\left[(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)\right] \\
&= (6+2\sqrt{12}+2)(\sqrt{3}-2)\big((\sqrt{3})^2-2^2\big) \\
&= (6+2\sqrt{12}+2)(\sqrt{3}-2)(-1) \\
&= (8+4\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 4(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) \\
&= 4(2^2-(\sqrt{3})^2) = 4\times 1 = 4.
\end{aligned}$$

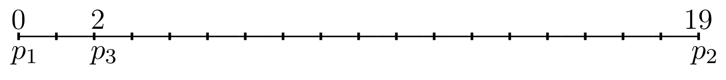
Assim, $A^2 = 4$ e, portanto, A pode ser 2 ou -2. Como $\sqrt{3}-2$ é negativo e os outros dois fatores de A são positivos, temos que A deve ser negativo, ou seja, $A=-2$.

100. ***Para a escola de bicicleta*** – Seja t o tempo que Cátia gasta pedalando a 20 km/h. Pedalando a 10 km/h, ela faz o percurso no dobro do tempo que pedalando a 20 km/h, isto é $2t$. No entanto, como ela demora 45 minutos a mais, temos $2t-t=45$, de modo que $t=45$ min. Logo, diariamente, ela sai da escola 45 minutos antes das 16h30m, isto é, às 15h45m, e o percurso até sua casa, que é feito em 45 min a 20 km/h, tem $\frac{3}{4}\times 20 = 15$ km. Para sair da escola às 15h45m e chegar em casa às 17h, ela deve percorrer esses 15 km entre a escola e sua casa em 1h15m, o que corresponde a 5/4 de hora. Portanto, Cátia deve manter uma velocidade de

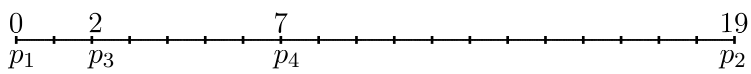
$$\frac{15\text{ km}}{5/4\text{ h}} = \frac{60}{5}\text{ km/h} = 12\text{ km/h}.$$

101. ***Distância na reta***

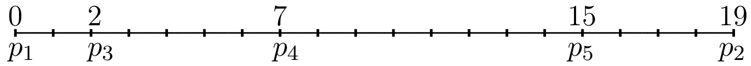
Solução 1: Como a maior distância entre dois pontos é 19 e a menor é 2, desenhamos uma reta numérica com os dois pontos 0 e 19 nas extremidades e o ponto 2 a duas unidades de 0, obtendo os primeiros três pontos na figura.



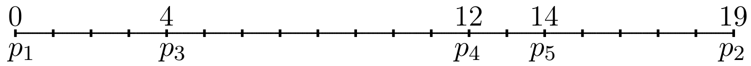
Em seguida, colocamos dois outros pontos, para tentar fechar as distâncias exigidas. Como precisamos ter distâncias 5 e 7, colocamos o ponto 7 na reta, o que nos dá distâncias que não são incompatíveis com os dados do problema, já que as distâncias entre esses 4 pontos são 2, 5, 7, 12, 17 e 19, conforme figura.



Desse modo, se nossa tentativa de colocar todos os pontos tiver êxito, necessariamente $k = 12$. Temos sorte pois, para obter as distâncias 4, 8, 13 e 15, basta colocar o ponto 15 na reta, obtendo todas as distâncias 2, 4, 5, 7, 8, 12, 13, 15, 17 e 19, conforme figura.



Escolhendo 4 como terceiro ponto, obtemos uma outra distribuição de pontos com as mesmas distâncias entre eles, como na figura seguinte, em que, novamente, $k = 12$.



Solução 2: Como a maior distância é 19 podemos, supor que um ponto é 0 e outro é 19. Se um terceiro ponto for igual a a, teremos as distâncias $a - 0 = a$ e $19 - a$ na lista de distâncias dada. Como nessa lista de distâncias aparecem os pares 2 e 17, bem como 4 e 15, podemos escolher o número $a = 2$ ou $a = 4$ como terceiro ponto. Escolhamos o ponto 2. Como 4 e 15 estão na lista das distâncias, temos que 4 ou 15 é outro ponto na reta; mas, 4 não pode ser um dos pontos porque a distância 2, entre 2 e 4, não aparece duas vezes. Logo, 15 é o quarto ponto na reta. Por último, o quinto ponto tem que estar a uma distância 5 de um dos pontos e 7 de outro. Assim, o ponto que falta é o ponto 7 e a distância desconhecida é $k = 19 - 7 = 12$.

Tomando 4 como terceiro ponto, obteríamos os pontos 12 e 14 como quarto e quinto pontos e, novamente, a distância desconhecida é $k = 12$.

102. ***Número ímpar*** – A opção correta é (c).

Lembremos que a soma ou diferença de números de mesma paridade é um número par:

$$\text{par} \pm \text{par} = \text{par} \qquad \text{e} \qquad \text{ímpar} \pm \text{ímpar} = \text{par}.$$

Observemos que n^2 e n^3 podem ser pares ou ímpares, portanto $n^2 + 5$ e $n^3 + 5$ podem ser ímpares ou pares, dependendo de n ser par ou ímpar. Restam as opções (a), (b) e (c).

Solução 1: Ambos $n^2 - n$ e $n^2 + n$ são soma e diferença de dois números que sempre têm a mesma paridade, portanto, esses números sempre serão pares, do mesmo modo que $n^2 - n + 2$ e $n^2 + n + 2$. Finalmente, a opção correta é (c), porque $n^2 + n + 5 = (n^2 + n) + 5$, que é soma de um par e um ímpar, sempre será um número ímpar, para todo valor inteiro de n.

Solução 2: Observemos que $n^2 - n = n(n-1)$ e $n^2 + n = n(n+1)$ são o produto de dois números consecutivos, portanto, são sempre pares, do mesmo modo que $n^2 - n + 2$ e $n^2 + n + 2$. Finalmente, a opção correta é (c), porque $n^2 + n + 5 = (n^2 + n) + 5$ é a soma de um par com um ímpar, que é sempre ímpar, para todo valor inteiro de n.

103. ***Quatro números inteiros*** – A opção correta é (e).

Como m, n, p e q são inteiros, também $7-m$, $7-n$, $7-p$ e $7-q$ são inteiros. Agora, $4 = 1 \times 2 \times 2$ e

$$4 = (-1) \times (-2) \times 1 \times 2$$

é a única decomposição de 4 em um produto de números inteiros distintos. Segue que

$$(7-m) + (7-n) + (7-p) + (7-q) = (-1) + (-2) + 1 + 2\,,$$

portanto, $m + n + p + q = 28$.

104. ***As páginas do dicionário*** – Observemos que:

(a) a cada dez números imprime-se uma vez o 1 nas unidades;

(b) a cada cem números imprime-se dez vezes o 1 nas dezenas;

(c) a cada mil números imprime-se cem vezes o 1 nas centenas.

Assim, de 1 até 999, imprime-se o algarismo 1 um total de 300 vezes, das quais 100 vezes nas unidades, 100 vezes nas dezenas e 100 vezes nas centenas.

De 1 000 até 1 999, imprime-se o algarismo 1 outras 300 vezes dentre unidades, dezenas e centenas, mais 1 000 vezes na posição do milhar, portanto, entre 1 e 1 999, o número de vezes que se imprime o 1 é $300 + 300 + 1\,000 = 1\,600$.

Agora, entre 2 000 e 2 999, imprime-se o 1 mais 300 vezes, completando $1\,600 + 300 = 1\,900$.

De 3 000 a 3 099, temos 20 algarismos 1, de 3 100 a 3 119, temos 32 algarismos 1 e, de 3 120 a 3 149, temos 32 algarismos 1, portanto, até 3 149, o número de vezes que se imprime o 1 é $1\,900 + 20 + 32 + 32 = 1\,984$. Como faltam 4 algarismos 1, o número de páginas do dicionário é 3 152.

105. ***Soma de potências de 2***

Solução 1: Observe que $2^8 + 2^{11} + 2^n = (2^4)^2 + 2 \times 2^4 \times 2^6 + (2^{\frac{n}{2}})^2$. Logo, para $n = 12$, temos $2^8 + 2^{11} + 2^{12} = (2^4 + 2^6)^2$. Assim, $n = 12$ é uma solução.

Solução 2: Se $2^8 + 2^{11} + 2^n = k^2$, então

$$\begin{aligned} 2^8 + 2^3 \times 2^8 + 2^n &= k^2 \\ 9 \times 2^8 + 2^n &= k^2 \\ 2^n &= k^2 - (3 \times 2^4)^2 \\ 2^n &= (k - 3 \times 2^4)(k + 3 \times 2^4). \end{aligned}$$

Logo, $(k - 3 \times 2^4)$ e $(k + 3 \times 2^4)$ são potências de 2, ou seja, $k + 3 \times 2^4 = 2^a$ e $k - 3 \times 2^4 = 2^b$, com $a + b = n$ e

$$2^a - 2^b = (k + 3 \times 2^4) - (k - 3 \times 2^4) = 3 \times 2^5 = 96.$$

Examinemos a lista das potências de 2:

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ 256,\ \ldots.$$

Constatamos que a diferença dessas potências só é 96 entre $128 = 2^7$ e $32 = 2^5$. Logo, $a = 7$ e $b = 5$. Assim, $n = 7 + 5 = 12$ é a única solução.

106. ***Reverso de um número*** – Lembremos que números ab de dois algarismos, em que a é o algarismos das dezenas e b o das unidades, são dados por $ab = a \times 10 + b$. Por exemplo, $47 = 4 \times 10 + 7$.

Seja ab um número de dois algarismos; seu reverso é, então, ba. Temos que

$$ab + ba = a \times 10 + b + b \times 10 + a = (a + b) \times 11.$$

Por outro lado, $a, b \leq 9$, de modo que $a + b \leq 18$. Como 11 é um número primo e $a + b \leq 18$, 11 não divide $a + b$ e, portanto, o produto $(a + b) \times 11$ só é um quadrado perfeito se $a + b = 11$. Assim, temos 8 números satisfazendo a condição do problema: 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 e 92.

107. ***Ângulos externos de um triângulo*** – Observemos que os ângulos y, $150°$ e $160°$ são ângulos externos de um triângulo, de modo que $y+150°+160° = 360°$. Assim, $y = 50°$. Pela mesma razão, concluímos que $z = 50°$. Como x, y e z são ângulos internos de um triângulo, temos $x + y + z = 180°$ e, portanto, $x = 80°$.

108. ***Uma brincadeira*** – Sejam a, b, c e d os números procurados. São dados os números

$$\frac{a+b+c}{3} + d, \quad \frac{a+b+d}{3} + c, \quad \frac{a+c+d}{3} + b \quad \text{e} \quad \frac{b+c+d}{3} + a,$$

mas não sabemos sua ordenação. No entanto,

$$\begin{aligned} 90 &= 17 + 21 + 23 + 29 \\ &= \frac{a+b+c}{3} + d + \frac{a+b+d}{3} + c + \frac{a+c+d}{3} + b + \frac{b+c+d}{3} + a \\ &= 2(a + b + c + d) \end{aligned}$$

e, portanto, $2(a + b + c + d) = 90$, ou seja, $a + b + c + d = 45$. Seja, agora, d o maior dentre os números a, b, c e d. Então

$$d = 29 - \frac{a+b+c}{3} = 29 - \frac{45-d}{3},$$

e concluímos que $d = 21$.

109. ***Ovos e maçãs*** – A opção correta é (b).

Como o enunciado e a resposta são percentuais podemos, nesse caso, estipular qualquer preço e qualquer unidade monetária, que a resposta será, sempre, a mesma. O mais simples, portanto, é supor que, inicialmente, uma dúzia de ovos custava 100 e, portanto, que 10 maçãs também custavam 100. Como o preço dos ovos subiu 10%, o novo valor dos ovos é 110. O preço das maçãs diminuiu 2%, portanto, o novo preço de 10 maçãs é 98. Assim, enquanto antes gastava-se 200 na compra de uma dúzia de ovos e 10 maçãs, agora gasta-se $110 + 98 = 208$. Daí, temos que o aumento foi de 8 em 200, o que corresponde ao percentual de

$$\frac{8}{200} = \frac{4}{100} = 4\%.$$

110. ***Dividir um cubo*** – A opção correta é (b).

Convertendo metros em milímetros, temos 1 m = 1 000 mm. Assim, o cubo ficou dividido em $1\,000 \times 1\,000 = 10^6$ cubinhos, cada um com uma aresta de 1 mm. Empilhando-se os 10^6 cubinhos sucessivamente um em cima do outro, obtemos uma coluna de $1\,000 \times 1\,000 = 10^6$ mm = 1 km de altura.

111. ***Uma expressão*** – A opção correta é (b).

$$\frac{a^{-2}}{a^5} \times \frac{4a}{(2^{-1}a)^{-3}} = a^{-2-5} \times \frac{2^2\,a}{2^3\,a^{-3}} = a^{-7} \times \frac{a^{1-(-3)}}{2} = a^{-7} \times \frac{a^4}{2}$$
$$= \frac{a^{-7+4}}{2} = \frac{a^{-3}}{2} = \frac{1}{2a^3}$$

112. ***Uma igualdade*** – Fatorando 96, temos $2^5 \times 3 \times a^2 = b^3$. Para que $2^5 \times 3 \times a^2$ seja um cubo, o número a deve ter, pelo menos, a fatoração $2^n \times 3^n$. Como queremos o menor valor de a, tomamos $a = 2^n \times 3^n$ e, assim,

$$2^5 \times 3 \times a^2 = 2^5 \times 3 \times (2^n \times 3^m)^2 = 2^{5+2n} \times 3^{1+2m}.$$

Logo, $5 + 2n$ e $1 + 2m$ são múltiplos de 3. Os menores valores de n e m são $n = 2$ e $m = 1$. Portanto, $a = 2^2 \times 3 = 12$.

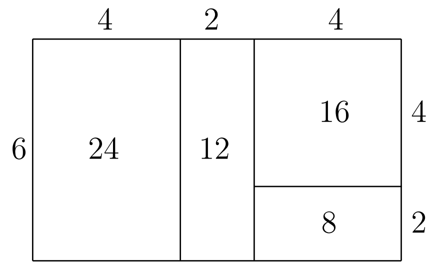
113. ***Somas de três em três*** – Somando de três em três quatro números a, b, c e d, obtemos os números $a + b + c$, $a + b + d$, $a + c + d$ e $b + c + d$, sendo

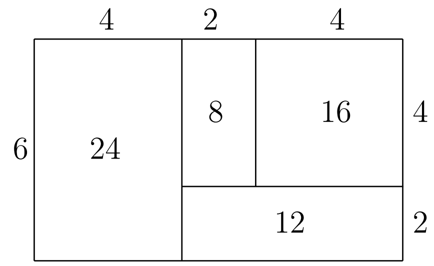
$$(a + b + c) + (a + b + d) + (a + c + d) + (b + c + d) = 3(a + b + c + d).$$

Como $30 = 6 + 7 + 8 + 9 = (a + b + c) + (a + b + d) + (a + c + d) + (b + c + d)$, resulta $30 = 3(a + b + c + d)$, donde $a + b + c + d = \dfrac{30}{3} = 10$. Como cada número é igual à diferença entre a soma dos quatro números e a soma dos outros três, os números procurados são

$$10 - 6 = 4\,,\;\; 10 - 7 = 3\,,\quad 10 - 8 = 2 \quad \text{e} \quad 10 - 9 = 1.$$

114. ***O retângulo do Luís*** – Faremos a divisão com retângulos. Observamos que $24 = 6 \times 4$ e $12 = 6 \times 2$, portanto, Luís pode fazer um primeiro corte a 4 cm no lado de 10 cm e outro corte a 2 cm do corte anterior. Depois desses cortes, resta um retângulo de tamanho 6×4. Por último, como $16 = 4 \times 4$, basta fazer mais um corte a 4 cm no lado que mede 6 cm. Duas opções de cortes estão ilustrados nas figuras seguintes, com indicação das dimensões dos lados e das áreas.





115. ***Uma fábrica de blusas*** – A opção correta é (c).

Denotemos por x o número de unidades produzidas. Então o custo de produção é $500 + 2x$ reais. Na venda, o fabricante está recebendo $2{,}5x$. Assim, ele terá lucro quando $2{,}5x > 500 + 2x$, isto é, $0{,}5x > 500$, ou $x > 1\,000$.

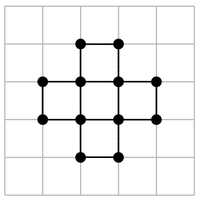
116. ***Existência de triângulos*** – A opção correta é (c).

A soma dos três ângulos internos de um triângulo é 180°. Logo, se um deles mede 90°, a soma dos outros dois é 90° e, por isso, não podem ser maiores do que 90°. Portanto, não existem triângulos retângulos obtusângulos. Os seguintes exemplos de comprimentos de lados mostram que cada um dos outros casos pode ocorrer:

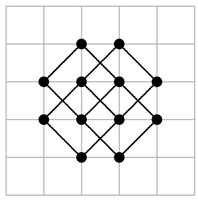
(a) 2, 3, 3; (b) 1, 1, $\sqrt{2}$; (d) 3, 4, 5; (e) 3, 4, 6.

117. ***Os doze pontos*** – No total, temos 11 possíveis quadrados, mostrados nas figuras seguintes.

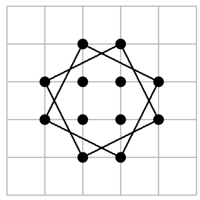
5 quadrados



4 quadrados



2 quadrados



118. ***O colar*** – Sejam g o número de pérolas grandes, p o de pequenas, a o peso (em gramas) de uma pérola grande e b o de uma pequena. Com essa notação, os dados são os seguintes.

(a) O número total de pérolas no colar é $g + p$ e temos $g + p < 500$.

(b) O peso das pérolas grandes é $g\,a$ e o das pequenas é $p\,b$.

(c) O peso total do colar é $g\,a + p\,b$.

Antes de equacionar o problema, equacionamos as duas hipóteses do problema.

(a) Ao substituirmos 70% das pérolas grandes pelas pequenas, o número total de pérolas no colar fica composto por

$$\underbrace{30\% \times g}_{\text{grandes}} + \underbrace{p + 70\% \times g}_{\text{pequenas}} = 0{,}3\,g + (p + 0{,}7\,g)$$

pérolas e seu peso fica sendo

$$\underbrace{0{,}3\,g \times a}_{\text{peso das grandes}} + \underbrace{(p + 0{,}7\,g) \times b}_{\text{peso das pequenas}} = \underbrace{0,4(g\,a + p\,b)}_{40\%\text{ do peso inicial}} .$$

(b) Analogamente, ao substituirmos 60% das pérolas pequenas pelas grandes, o número total de pérolas no colar fica composto por

$$\underbrace{g + 60\% \times p}_{\text{grandes}} + \underbrace{40\% \times p}_{\text{pequenas}} = (g + 0{,}6\,p) + 0{,}4\,p$$

pérolas e seu peso fica sendo

$$\underbrace{(g+0{,}6\,p)\times a}_{\text{peso das grandes}} + \underbrace{0{,}4\,p\times b}_{\text{peso das pequenas}} = \underbrace{1{,}7(g\,a+p\,b)}_{170\%\text{ do peso inicial}}.$$

Assim, as duas hipóteses podem ser resumidas no sistema

$$\begin{cases} (0{,}3)\,g\,a+(0{,}7)\,g\,b+p\,b &= 0{,}4(g\,a+p\,b)\,,\\ g\,a+(0{,}6)\,p\,a+(0{,}4)\,p\,b &= 1{,}7(g\,a+p\,b). \end{cases}$$

Para resolvê-lo, começamos multiplicando ambas equações por 10 e simplificamos, obtendo

$$\begin{cases} (7\,g+6\,p)\,b &= g\,a\,,\\ (7\,g-6\,p)\,a &= -13\,p\,b. \end{cases}$$

Eliminando as incógnitas a e b, podemos escrever $\dfrac{7\,g+6\,p}{g}=\dfrac{a}{b}=\dfrac{-13\,p}{7\,g-6\,p}$, resultando $49\,g^2-36\,p^2+13\,p\,g=0$. Para fatorar essa expressão, desdobramos

$$13\,p\,g=49\,p\,g-36\,p\,g$$

e obtemos

$$\begin{aligned} 0=49\,g^2+13\,p\,g-36\,p^2 &= 49\,g^2+49\,p\,g-36\,p^2-36\,p\,g\\ &= g\,(49\,g-36\,p)+p\,(49\,g-36\,p)\\ &= (g+p)(49\,g-36\,p)\,, \end{aligned}$$

de modo que $(g+p)(49\,g-36\,p)=0$, ou seja,

$$49\,g=36\,p\,.$$

Como 36 e 49 são primos entre si e p e g são inteiros positivos, segue que g é um múltiplo de 36 e p um de 49, isto é, $g=36\,k$ e $p=49\,k'$, para certos inteiros k e k' maiores do que 1. Decorre que $36\times 49\,k'=36\,p=49\,g=49\times 36k$, ou seja, $k=k'$, de modo que $g=36\,k$, $p=49\,k$ e $g+p=85\,k$. Como $g+p<500$, o colar só pode ter 85, 170, 255, 340 ou 425 pérolas.

119. ***Mulheres votantes*** – A opção correta é (b).

A fração de mulheres na população é $\dfrac{52}{100}$ e, delas, a fração que é votante é $\dfrac{40}{100}$. Logo, a fração de mulheres votantes é

$$\frac{52}{100}\times\frac{40}{100}\times 100\% = \frac{52}{250}\times 100\% = 0{,}208\times 100\% = 20{,}8\%.$$

120. ***Amigos do século XX*** – Os dois amigos nasceram no mesmo mês e no mesmo ano, com uma diferença de 7 dias, de modo que um nasceu no dia $d/m/a$ e o outro no dia $(d+7)/m/a$. Com essas datas formamos os números $(d)(m)(a)$ e $(d+7)(m)(a)$. Sabemos que

$$(d+7)(m)(a)=(d)(m)(a)+7\times 10^k\,,$$

onde k é o número de algarismos de $(m)(a)$. Observe que só podemos ter $k = 3$, se o mês m tem um algarismo, ou $k = 4$, se o mês m tem dois algarismos. Como também $(d + 7)(m)(a) = 6 \times (d)(m)(a)$, resulta

$$7 \times 10^k = 5(d)(m)(a).$$

No caso $k = 3$, decorre que o amigo mais velho nasceu em

$$(d)(m)(a) = \frac{7\,000}{5} = 1\,400,$$

isto é, 1º de abril de 1900. No caso $k = 4$, decorre $\dfrac{70\,000}{5} = 14\,000$, que não é uma data válida.

121. ***Operação em uma fração*** – Seja a/b uma fração qualquer e seja c um número qualquer tal que

$$\frac{a+c}{b+c} = \frac{b}{a}.$$

Esta igualdade é equivalente a $(a + c)a = (b + c)b$, ou seja, $a^2 + ac = b^2 + bc$ ou, ainda a $c(a - b) = b^2 - a^2 = (b - a)(a + b)$. Evidenciando $a - b$, vemos que o que se quer é um número c tal que

$$(a - b)(a + b + c) = 0.$$

Essa igualdade pode ser satisfeita de duas maneiras.

(a) Se $a = b$, temos simplesmente $1 = \dfrac{a}{b}$ e podemos somar qualquer número c aos dois termos da fração para obter 1 novamente.

(b) Se $a \neq b$, precisamos ter $a+b+c = 0$ e, nesse caso, só podemos somar $c = -(a+b)$ aos dois termos da fração a/b para obter b/a.

122. ***O número* 119** – Dados inteiros positivos d e r, dizemos que N dividido por d deixa resto r se existir um inteiro n tal que $N = nd+r$. Se M dividido por d deixar o mesmo resto r, então existe um inteiro m tal que $M = md + r$. Nesse caso, se $M > N$, resulta que $m = n + p$ para algum inteiro n e, portanto,

$$M = md + r = (n + p)d + r = nd + r + pq = N + pd,$$

de modo que $M - N = pd$ é um múltiplo de d. O mesmo ocorre se $M < N$.

Como 119 tem todas as propriedades arroladas, decorre que se N for algum número com essas mesmas propriedades então, necessariamente $119 - N$ é um múltiplo de 2, 3, 4, 5 e 6. Como o menor múltiplo comum de 2, 3, 4, 5 e 6 é 60, N tem as mesmas propriedades de 119 se, e só se, $119 - N$ for um múltiplo de 60. Assim, os únicos números N com as mesmas propriedades de 119 são da forma $N = 119 + 60 \times p$, para algum inteiro p. Para obter N positivo, precisamos tomar $p \geq -1$ e, para obter $N \leq 2\,007$, precisamos tomar $p \leq 31$, pois $119 + 60 \times 32 = 2\,039 > 2\,007$.

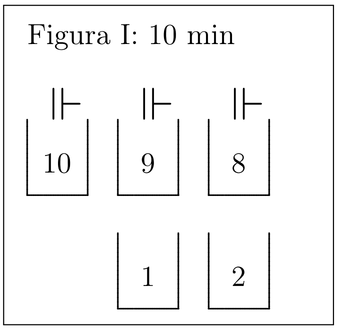
Assim, os únicos números inteiros positivos e menores do que 2 007 com as mesmas propriedades de divisão de 119 são

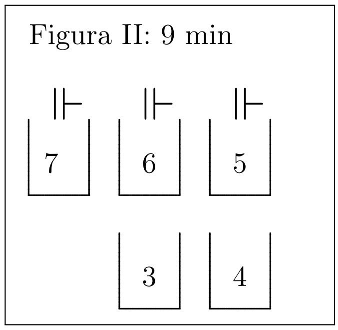
$$59, 119, 179, \ldots, 1979 \; (= 119 + 60 \times 31),$$

num total de 33 números.

123. ***Fonte com três torneiras*** – Para simplificar, numeramos os 10 garrafões de acordo com os respectivos tempos que levam para ficar cheios, de 1 a 10.

Solução 1: Uma ideia é utilizar o "tempo que sobra" de um garrafão para encher outro garrafão, enchendo simultaneamente outros dois. As figuras seguintes ilustram a solução. Na Figura I, as 3 torneiras gastam 10 minutos para encher os garrafões 10,





9, 8, 2 e 1 e, na Figura II, as 3 torneiras gastam mais 9 minutos para encher os garrafões 7, 6, 5, 4 e 3. Logo, o tempo total gasto é de 19 minutos.

Solução 2: Se tivéssemos uma torneira só, o tempo gasto para encher os 10 garrafões seria de $1+2+\cdots+9+10 = 55$ minutos. Como temos três torneiras e $55 = 3\times 18+1$, uma torneira, pelo menos, vai levar 19 minutos e as outras duas, 18 minutos cada. A tabela seguinte mostra uma forma de fazer o trabalho em 19 minutos.

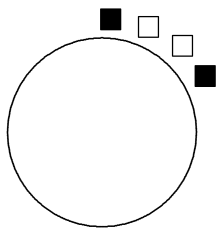
Torneira 1	10	9		
Torneira 2	8	5	3	2
Torneira 3	7	6	4	1

124. ***A sequência xyz*** – Igualando os denominadores, verificamos que a sequência dada é igual a

$$\frac{4}{8},\ \frac{5}{8},\ \frac{6}{8},\ \frac{7}{8},\ x,\ y,\ z.$$

Assim, o denominador é sempre 8 e os numeradores são consecutivos. Logo, $x = \dfrac{8}{8} = 1$, $y = \dfrac{9}{8}$ e $z = \dfrac{10}{8} = \dfrac{5}{4}$.

125. ***A mesa circular*** – Se a próxima pessoa a se sentar vai ter que se sentar ao lado de uma cadeira ocupada, isso significa que existem no máximo 2 cadeiras consecutivas desocupadas. (Na figura, as cadeiras ocupadas estão representadas por quadradinhos pretos e as desocupadas por quadradinhos brancos.)



Podemos, então, pensar nas cadeiras em grupos ordenados de 3 cadeiras, em que a terceira já está ocupada. Logo, o menor valor de N é $60 \div 3 = 20$.

126. ***Números proporcionais*** – A opção correta é (d).

Como $\dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{z}$, então $xz = 3y$. Elevando ao quadrado ambos os membros dessa igualdade, obtemos $x^2z^2 = 9y^2$.

127. ***Esportistas de uma escola*** – A opção correta é (c).

Denotemos por x o número de estudantes que praticam simultaneamente os dois esportes. Logo, o número de estudantes que pratica somente futebol é $20 - x$ e o que pratica somente vôlei é $19 - x$. Portanto, os 15 estudantes que praticam exatamente um esporte estão divididos em $15 = (20 - x) + (19 - x)$. Segue que $x = 12$ e resulta que $20 + (19 - x) = 27$ estudantes praticam pelo menos um dos dois esportes. Assim, $13 = 47 - 27$ estudantes não praticam nem futebol nem vôlei.

128. ***Vamos ao teatro*** – A opção correta é (c).

Mário pagou 3 e levou 5, portanto, pagou apenas $\dfrac{3}{5}$ do preço usual, tendo economizado $\dfrac{2}{5}$. Como $\dfrac{2}{5} = \dfrac{40}{100}$, a economia foi de 40%.

129. ***Uma desigualdade*** – A opção correta é (c).

Note que o inverso de um número só é maior do que 1 quando o número for positivo e menor do que 1. Portanto,

$$\frac{1}{x-1} > 1 \iff 0 < x - 1 < 1 \iff 1 < x < 2\,.$$

130. ***A sala do Professor Newton*** – A opção correta é (c).

Como o número de alunos homens é menor do que 15 e o das mulheres é 15, temos que $15 <$ alunos homens $+$ alunas mulheres $< 15 + 15 = 30$, ou seja, o número do total de alunos está entre 15 e 30.

Solução 1: Quando dividimos o número de alunos por 4 sobram 2 alunos, então o número de alunos é par. Quando dividimos por 5 sobra um, então o último algarismo do número de alunos é 1 ou 6; sendo par, só pode ser 6. Assim, só temos dois possíveis valores, 16 ou 26. Descartamos 16 por ser divisível por 4, de modo que o número de alunos é 26. Consequentemente, temos $26 - 15 = 9$ alunos homens.

Solução 2: Observemos que o número 6, dividido por 4, deixa resto 2 e, dividido por 5, deixa resto 1. Logo, se somamos a 6 um múltiplo comum de 4 e 5, o número obtido também terá essa propriedade. O menor múltiplo comum de 4 e 5 é 20, portanto, os possíveis valores para o número de alunos é $6, 26, 46, 66, \ldots$. Como o número de alunos está entre 15 e 30, esse número é 26 e resulta que temos $26 - 15 = 9$ alunos homens.

131. ***Um jardim retangular*** – A opção correta é (b).

Pelos dados do problema sabemos que

$$\frac{3}{5}AD = AB \qquad \text{e} \qquad \frac{3}{5}AB = AF.$$

Logo, $AF = \dfrac{3}{5}AB = \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 AD = \dfrac{9}{25}AD$. A área do terreno é $AB \times AD$ e a área do jardim é $AB \times AF$, portanto a razão entre essas áreas é

$$\frac{AB \times AF}{AB \times AD} = \frac{AF}{AD} = \frac{9}{25} = \frac{36}{100} = 36\%.$$

132. ***Números decrescentes*** – Observe que $0 < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a} \iff 0 < a < b < c$. Como $1 < 3^{2/3} < 3^2 < 3^3$, resulta

$$\frac{1}{3^3} < \frac{1}{3^2} < \frac{1}{3^{2/3}} < 1.$$

Também $1 < 3 < 3^5$, portanto $1 < \sqrt[5]{3} < 3$. Resta observar que $\dfrac{1}{3^3} = (\dfrac{1}{3})^3$, $\dfrac{1}{3^2} = 3^{-2}$, $\dfrac{1}{3^{2/3}} = 3^{-2/3}$ e $3 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}$, para estabelecer que

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 < 3^{-2} < 3^{-2/3} < \sqrt[5]{3} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}.$$

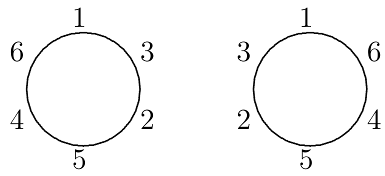
133. ***Os bombons misturados*** – Sejam x o número de bombons que Marta ganhou e y o que Carmem ganhou. Sabemos que $x + y = 200$, $x < 100$ e $x > \dfrac{4}{5}y$. Então $y \geq 100$ e, portanto, $x > \dfrac{4}{5} \times 100 = 80$. Assim, x é um inteiro compreendido entre 80 e 100. Como deve ser um múltiplo de 8, só pode ser 88 ou 96. Vamos decidir qual é.

(a) Se $x = 88$, então $y = 200 - 88 = 112$. Logo, $88 = x > \dfrac{4}{5} \times 112 = 89{,}6$, o que não é possível.

(b) Se $x = 96$, então $y = 200 - 96 = 104$ e $96 = x > \dfrac{4}{5} \times 104 = 83{,}2$, o que é possível.

Assim, Marta ganhou 96 bombons e Carmem 104.

134. ***Jantar aos sábado*** – Para simplificar, vamos denotar cada casal por um par de números, um número representando o marido e o outro a mulher. Temos, então, os três pares (1, 2), (3, 4), (5, 6), que não podem ser vizinhos. Podemos considerar o lugar do marido 1 à mesa como sendo fixo, já que desconsideramos rotações na disposição à mesa. Duas disposições possíveis são dadas na figura seguinte.



132 546 164 523

Essas disposições descrevemos por 132546 e 164523, sempre começando em 1, fixado numa posição à mesa, e prosseguindo no sentido horário. Assim, o problema se resume em encontrar todos os números de 6 algarismos distintos que podem ser escritos com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, onde:

(a) todos os números começam com o algarismo 1;

(b) nenhum número pode terminar com o algarismo 2;

(c) não podem aparecer juntos 1 e 2, 3 e 4, 5 e 6.

Encontramos os 16 números da tabela seguinte.

132 546	132 645	135 246	135 264	135 426	136 245	136 254	136 425
142 536	142 635	145 236	145 326	146 235	146 325	153 246	154 236

Logo, a resposta é 16 sábados.

135. ***Expressão com radicais*** – A opção correta é (e).

$$\left(\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}\ \right)^4 = \left(1+\sqrt{2}\,\right)^2 = 1+2\sqrt{2}+2 = 3+2\sqrt{2}\,.$$

136. ***Possíveis triângulos*** – Como a soma dos comprimentos dos lados menores de um triângulo deve ser maior que o comprimento do lado maior, devemos ter $a+(a+2) > a+5$, ou seja, $a > 3$.

137. ***Uma diferença*** – A opção correta é (a).

Efetuando as operações indicadas, obtemos

$$\frac{-0{,}1\times 20}{0{,}5} - \frac{\sqrt{0{,}4}\,(\sqrt{0{,}09}-1)}{\sqrt{0{,}4}} = -\frac{20}{5} - (0,3-1) = -4+0{,}7 = -3{,}3.$$

138. ***A Terra*** – A fração de terra que é cultivada é

$$1-\frac{2}{5}-\frac{1}{3} = \frac{15-6-5}{15} = \frac{4}{15}\,.$$

Como a terra ocupa $3/10$ da superfície total do globo terrestre, resulta que a área cultivada é $\dfrac{4}{15}\times\dfrac{3}{10} = \dfrac{2}{25}$, isto é, $\dfrac{2}{25} = \dfrac{2}{25}\times\dfrac{4}{4} = \dfrac{8}{100} = 8\%$ da superfície do globo terrestre.

139. ***Uma fração*** – A figura mostra que MN é paralelo a BC, portanto, os triângulos ABC e AMN são semelhantes e, por isso, seus lados são proporcionais. Usando o lado dos quadradinhos da grade da figura, obtemos $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{4}{7}$. Assim,

$$\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB} = \frac{4}{7}.$$

140. ***Cálculo de ângulo*** – A opção correta é (c).

Como as retas PQ e RS são paralelas, os ângulos $T\widehat{W}S$ e $Q\widehat{T}W$ são complementares. Assim, $Q\widehat{T}W = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$. Por outro lado, sabemos que o triângulo $\triangle UTV$ é isósceles, portanto, os ângulos em U e em V são iguais. Usando que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, vemos que $2T\widehat{U}V = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$ e, portanto, $T\widehat{U}V = 55^\circ$. Como os ângulos $T\widehat{U}V$ e $Q\widehat{U}V$ são complementares, resulta que

$$Q\widehat{U}V = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ\,.$$

141. ***Uma loja de brinquedos*** – Se x denota o desconto em reais e y o número total de peças, então $(13 - x) \times y = 781$. Assim, $(13 - x)$ e y são divisores de 781 e, como $781 = 11 \times 71$, os únicos divisores de 781 são 1, 11, 71 e 781. O divisor $13 - x$ de 781 não pode ser igual a 1, pois sabemos que $y \leq 100$. A única opção, então, é $13 - x = 11$ e $y = 71$, de modo que a redução foi de $x =$ R\$ 2,00 por unidade.

142. ***Fração de fração*** – Temos

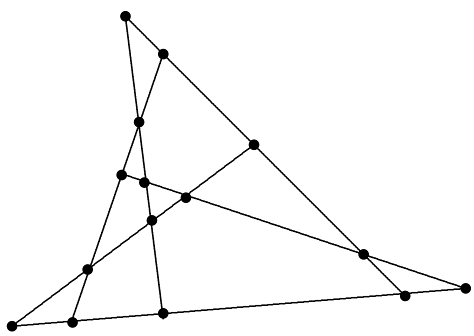
$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{3}{2}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{3}}=1+\cfrac{1}{\cfrac{5}{3}}=1+\frac{3}{5}=\frac{8}{5}\,.$$

143. ***Potências de 3*** – Temos $27^{2a} = (3^3)^{2a} = 3^{6a} = (3^a)^6 = 2^6 = 64$.

144. ***Aumento de preço*** – Em reais, o aumento foi de $5{,}55 - 5 = 0{,}55$ e, portanto, o percentual de aumento foi de

$$\frac{0{,}55}{5} = \frac{0{,}55 \times 20}{5 \times 20} = \frac{11}{100} = 11\%.$$

145. ***Roseiras em fila*** – É possível plantar as roseiras em 6 filas de 5 roseiras cada uma, conforme mostra a figura.



146. ***Calculadora diferente*** – Para calcular $(2 + 3) \circledast (0 + 3)$ utilizaremos a propriedade (iii), obtendo $(2+3)\circledast(0+3) = (2\circledast0)+(3\circledast3)$. Agora, por (ii), temos $2\circledast0 = 2\times2 = 4$ e, por (i), temos $3 \circledast 3 = 3$. Portanto, $(2 + 3) \circledast (0 + 3) = 4 + 3 = 7$.

Para calcular $1\,024 \circledast 48$ vamos usar a mesma estratégia, observando que $1\,024 = 976 + 48$ e $48 = 0 + 48$. Assim,

$$\begin{aligned} 1\,024 \circledast 48 &= (976 + 48) \circledast (0 + 48) \\ &= (976 \circledast 0) + (48 \circledast 48) \\ &= 2 \times 976 + 48 = 1\,952 + 48 = 2\,000. \end{aligned}$$

147. ***Dois quadrados***

Solução 1: A região tracejada é um trapézio de bases medindo 10 e 4 cm. A altura do trapézio, que é a metade da diferença dos lados dos dois quadrados, mede $\frac{1}{2}(10-4) = 3$ cm. Assim, a área procurada mede

$$3 \times \frac{1}{2}(10+4) = 3 \times 7 = 21\,\text{cm}^2.$$

Solução 2: A área do quadrado maior menos a área do quadrado menor é igual a 4 vezes a área procurada. Assim, a área procurada mede

$$\frac{10^2 - 4^2}{4} = \frac{100-16}{4} = 25 - 4 = 21\,\text{cm}^2.$$

148. ***Paralelismo*** – Sendo IL e EU paralelos, temos $\dfrac{FU}{FL} = \dfrac{FE}{FI}$. Analogamente, sendo RE e NI paralelos, temos $\dfrac{FN}{FR} = \dfrac{FI}{FE}$. Assim,

$$\frac{FN \times FU}{FR \times FL} = \frac{FI}{FE} \times \frac{FE}{FI} = 1.$$

149. ***Um subconjunto*** – Vamos construir um subconjunto de $\{1, 2, 3, \ldots, 3\,000\}$ em que nenhum elemento seja o dobro do outro. Começamos incluindo todos os números ímpares, $1, 3, 5, \ldots, 2\,999$. Assim, já temos $1\,500$ números e nenhum é o dobro de algum outro. Agora podemos acrescentar os números que são o quádruplo de algum número ímpar, isto é, acrescentar

$$\underbrace{4\times 1}_{4},\ \underbrace{4\times 3}_{12},\ \underbrace{4\times 5}_{20},\ \ldots,\ \underbrace{4\times 749}_{2\,996}.$$

Essa lista tem 749 números e nenhum deles é o dobro do outro; além disso, nenhum deles é o dobro de um número ímpar.

Logo, nosso conjunto já possui $1\,500 + 749 = 2\,249$ elementos. Basta tomar qualquer subconjunto com $2\,000$ elementos para obter um subconjunto de $\{1, 2, 3, \ldots, 3\,000\}$ em que nenhum elemento é o dobro do outro.

150. ***Triângulos retângulos*** – Observemos que os quatro triângulos que aparecem na figura são triângulos retângulos, dois a dois semelhantes, portanto, seus lados são proporcionais. Em particular, temos $9/x = y/20$, ou seja, $180 = xy$. Além disso, pelo Teorema de Pitágoras, temos $y^2 = x^2 + 9^2$, de modo que

$$180^2 = x^2y^2 = x^2(x^2+9^2) = x^4 + 9^2x^2,$$

isto é, $x^4 + 9^2x^2 - 180^2 = 0$. Pela fórmula de Bhaskara, obtemos

$$x^2 = \frac{-81 \pm \sqrt{9^4 + 4\times 180^2}}{2} = 9\frac{-9 \pm \sqrt{9^2 + 4 \times 20^2}}{2} = 9\frac{-9\pm 41}{2}\,.$$

Mas $x^2 > 0$, portanto necessariamente $x^2 = 9 \times 16$ e, portanto, como $x > 0$, a única opção é $x = 12$.

A partir de $x = 12$, obtemos todas as outras medidas. Pelo visto, temos $y = \sqrt{x^2 + 9^2} = 15$ e, pelo Teorema de Pitágoras, obtemos

$$z = \sqrt{20^2 - x^2} = 16.$$

Usando a proporcionalidade $v/8 = 9/x$, resulta $v = 72/x = 6$ e, finalmente, pelo Teorema de Pitágoras, concluímos que $w = \sqrt{8^2 + v^2} = 10$.

151. ***Uma desigualdade especial*** – A opção correta é (c).

Observemos que se x satisfaz a desigualdade, então $-x$ também satisfaz a desigualdade. Assim, os valores que satisfazem a desigualdade formam um conjunto simétrico em relação à origem e, portanto, basta verificar quais $x \geq 0$ satisfazem $x^2 < x + 2$, ou seja,

$$(x - 2)(x + 1) = x^2 - x - 2 < 0.$$

Como $x + 1 > 0$ para $x \geq 0$, devemos ter $x - 2 < 0$, ou seja, $x < 2$. Pela simetria observada, concluímos que $-2 < x < 2$ é a solução da desigualdade original.

152. ***Sapo Cururu*** – A cada x saltos do tipo I, o sapo se desloca $10x$ cm para o Leste e $30x$ cm para o Norte e, a cada y saltos do tipo II, o sapo se desloca $20y$ cm para o Oeste e $40y$ cm para o Sul. Assim, ao final de x saltos do tipo I e y do tipo II, o sapo se deslocou $10x - 20y$ cm para o Leste e $30x - 40y$ cm para o Norte.

(a) Resolvendo

$$\begin{cases} 10x - 20y &= 190 \\ 30x - 40y &= 950 \end{cases}$$

encontramos $x = 57$ e $y = 19$. Logo, o sapo deverá dar 57 saltos do tipo I e 19 do tipo II, em qualquer ordem, para alcançar um ponto situado a 190 cm para o Leste e 950 cm para o Norte de sua casa.

(b) Uma vez que o número de saltos de cada tipo é um número inteiro, Cururu só alcançará o ponto situado a 180 cm para o Leste e 950 cm para o Norte de sua casa se o sistema

$$\begin{cases} 10x - 20y &= 180 \\ 30x - 40y &= 950 \end{cases}$$

tiver solução inteira. Mas a solução desse sistema é $x = 59$ e $y = 41/2$, que não é inteiro. Portanto, Cururu não conseguirá alcançar aquele ponto.

153. ***Distribuindo algarismos em linhas*** – De acordo com o padrão da sequência, temos

$$\begin{array}{ll}
1^{\underline{a}} \text{ linha} \rightarrow & 0 \\
2^{\underline{a}} \text{ linha} \rightarrow & 1\ \ 1\ \ 0 \\
3^{\underline{a}} \text{ linha} \rightarrow & 2\ \ 2\ \ 2\ \ 1\ \ 1\ \ 0 \\
\vdots & \\
10^{\underline{a}} \text{ linha} \rightarrow & 9\ \ 9\ \ 9\ \ 9\ \ 9\ \ 9 \ldots 9\ \ 8 \ldots 1\ \ 1\ \ 0
\end{array}$$

Logo,

um algarismo 0 em cada linha dá $1 \times 10 = 10$ algarismos 0 no total;
dois algarismos 1 em nove linhas dá $2 \times 9 = 18$ algarismos 1 no total;
três algarismos 2 em oito linhas dá $3 \times 8 = 24$ algarismos 2 no total;
quatro algarismos 3 em sete linhas dá $4 \times 7 = 28$ algarismos 3 no total,

e assim por diante. Portanto, trata-se de descobrir qual é o maior dos produtos a seguir, onde cada um representa quantos algarismos, de 0 a 9, aparecem na sequência.

$$\underbrace{1\times 10}_{0}\,,\ \underbrace{2\times 9}_{1}\,,\ \underbrace{3\times 8}_{2}\,,\ \underbrace{4\times 7}_{3}\,,\ \underbrace{5\times 6}_{4}\,,\ \underbrace{6\times 5}_{5}\,,\ \underbrace{7\times 4}_{6}\,,\ \underbrace{8\times 3}_{7}\,,\ \underbrace{9\times 2}_{8}\,,\ \underbrace{10\times 1}_{9}$$

Como o maior produto é 30, os algarismos mais usados foram 4 e 5, 30 vezes cada um.

154. ***Será que existe?***

Solução 1: Se existir esse número N, então

$$N=\frac{222\ldots 2}{2\,008}=\frac{2\times 111\ldots 1}{2\times 1\,004}=\frac{111\ldots 1}{1\,004}.$$

Logo, N não é inteiro, por ser o quociente do número ímpar $111\ldots 1$ pelo número par $1\,004$. Portanto, não existe tal N.

Solução 2: Fatorando $2\,008$, obtemos $2\,008 = 2^3\times 251$, portanto, $2\,008$ é divisível por 8. Se existisse um inteiro N tal que $2\,008\times N = 222\ldots 2$, teríamos, então, que 8 dividiria $222\ldots 2$. Por outro lado, sabemos que um número é divisível por 8 se, e somente se, o número formado pelos últimos três algarismos for divisível por 8. Mas $222 = 27\times 8+6$ não é divisível por 8. Logo, não existe um número N tal que $2\,008\times N = 222\ldots 2$.

155. ***Conferindo uma desigualdade***

Solução 1: Uma maneira de verificar essa desigualdade é comparando cada parcela desta soma, como segue. Comparando as frações $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{3}$ com $\frac{1}{4}$, obtemos

$$\frac{1}{5}<\frac{1}{4}\,,\ \text{portanto, }\frac{1}{5^3}=\left(\frac{1}{5}\right)^3<\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{4^3};$$

$$\frac{1}{6}<\frac{1}{4}\,,\ \text{portanto, }\frac{1}{6^3}=\left(\frac{1}{6}\right)^3<\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{4^3};$$

$$\frac{1}{4}<\frac{1}{3}\,,\ \text{portanto, }\frac{1}{4^3}=\left(\frac{1}{4}\right)^3<\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{3^3}.$$

Assim,

$$\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{6^3}<\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^3}=\frac{3}{4^3}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}<\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}.$$

Solução 2: Uma outra maneira de verificar essa desigualdade é testar se

$$\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{6^3}-\frac{1}{12}>0.$$

Reduzindo ao mesmo denominador, temos

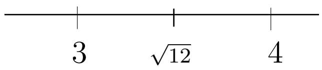
$$\begin{aligned}\frac{1}{2^6}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{2^3\times 3^3}-\frac{1}{2^2\times 3}&=\frac{2^4\times 3^2\times 5^3-3^3\times 5^3-2^6\times 3^3-2^3\times 5^3}{2^6\times 3^3\times 5^3}\\&=\frac{18\,000-3\,375-1\,728-1\,000}{2^6\times 3^3\times 5^3}\\&=\frac{11\,897}{2^6\times 3^3\times 5^3}\,.\end{aligned}$$

Nem é preciso efetuar o produto indicado no denominador. Como o numerador é positivo, concluímos que a desigualdade se verifica.

156. ***Parte inteira***

(a) Os números 9 e 16 são quadrados perfeitos e $9 < 12 < 16$. Então,

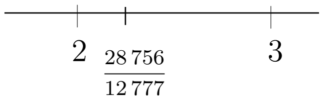
$$3 = \sqrt{9} < \sqrt{12} < \sqrt{16} = 4$$



e, portanto, $\left[\sqrt{12}\right] = 3$.

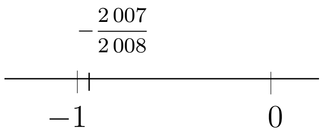
(b) Como $12\,777 \times 2 < 28\,756 < 12\,777 \times 3$, temos

$$2 < \frac{28\,756}{12\,777} < 3, \text{ portanto, } \left[\frac{28\,756}{12\,777}\right] = 2.$$



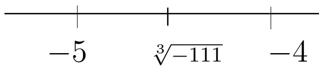
(c) Como $2\,007 < 2\,008$, temos $0 < \frac{2\,007}{2\,008} < 1$, ou

$$-1 < -\frac{2\,007}{2\,008} < 0, \text{ portanto, } \left[-\frac{2\,007}{2\,008}\right] = -1.$$



(d) Como $4^3 = 64 < 111 < 125 = 5^3$, temos

$$(-5)^3 = -5^3 = -125 < -111 < -4^3 = (-4)^3,$$



de modo que $-5 < \sqrt[3]{-111} < -4$ e, portanto, $\left[\sqrt[3]{-111}\right] = -5$.

157. ***Soma nove***

Solução 1: Vamos dividir em dois casos: números de dois algarismos e números de três algarismos. No caso de números de dois algarismos, temos 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81 e 90, num total de 9 números. Da mesma maneira, listamos os números de três algarismos, como segue:

$$\begin{array}{cl}
108, 117, 126, 135, 144, 153, 162, 171, 180 & \rightsquigarrow \text{ 9 números;}\\
207, 216, 225, 234, 243, 252, 261, 270 & \rightsquigarrow \text{ 8 números;}\\
306, 315, 324, 333, 342, 351, 360 & \rightsquigarrow \text{ 7 números;}\\
405, 414, 423, 432, 441, 450 & \rightsquigarrow \text{ 6 números;}\\
504, 513, 522, 531, 540 & \rightsquigarrow \text{ 5 números;}\\
603, 612, 621, 630 & \rightsquigarrow \text{ 4 números;}\\
702, 711, 720 & \rightsquigarrow \text{ 3 números;}\\
801, 810 & \rightsquigarrow \text{ 2 números;}\\
900 & \rightsquigarrow \text{ 1 número.}
\end{array}$$

Portanto, temos $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$ números de três algarismos. Assim, existem $9 + 45 = 54$ números entre 10 e 999 cuja soma dos algarismos é igual a 9.

Solução 2: No caso de números de dois algarismos, uma vez escolhido o algarismo da dezena, o algarismo da unidade fica automaticamente definido. Como o algarismo da dezena pode ser 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9, temos nove números de dois algarismos tais que a soma de seus algarismos seja 9.

No caso de números de três algarismos, denotando por n o algarismo da centena, a soma dos algarismos da dezena e da unidade é $9-n$, portanto, temos $9-n+1=10-n$ possibilidades de escolha para o algarismo da dezena, que pode ser inclusive 0, e o algarismo da unidade fica automaticamente definido. Como o algarismo da centena pode ser 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9, temos

$$(10-1)+(10-2)+(10-3)+(10-4)+(10-5)+(10-6)+(10-7)+(10-8)+(10-9)=45$$

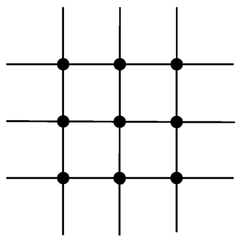
números de três algarismos tais que a soma dos seus algarismos é 9. Assim, existem $9+45=54$ números entre 10 e 999 cuja soma dos algarismos é igual a 9.

158. ***Retângulos*** – Se a e b denotam o comprimento e a largura do retângulo, temos $a \times b = 96$. Logo, a e b são divisores pares de 96 e, portanto, temos quatro retângulos satisfazendo as condições dadas, a saber, os retângulos de lados medindo 2 e 48; 4 e 24; 6 e 16 e 8 e 12.

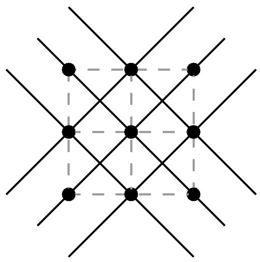
159. ***Número de retas***

Solução 1: Para contar o número de retas, dividiremos as retas de acordo com suas posições.

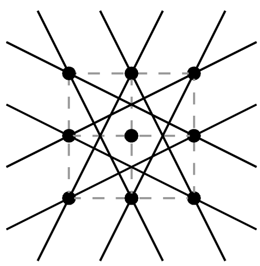
- retas paralelas aos lados dos quadrados: três horizontais e três verticais;



- retas paralelas às diagonais dos quadrados: $3+3=6$;

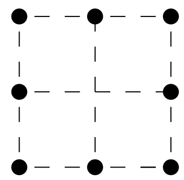


- outras retas: temos $4 \times 2 = 8$ retas, formando uma estrela, como na figura.



Assim, ao todo, temos $3 + 3 + 6 + 8 = 20$ retas.

Solução 2: Note que o ponto central é supérfluo, pois toda reta que passa por ele e um outro ponto do reticulado, passa também por um terceiro ponto do reticulado. Logo, o ponto central pode ser eliminado de nossas considerações. Assim, o problema fica reduzido a calcular quantas retas são determinadas por dois pontos quaisquer dos oito pontos do reticulado dado.



Com esses oito pontos, podem ser formados 8×7 possíveis pares de pontos distintos (8 possibilidades para o primeiro elemento do par e 7 possibilidades para o segundo). Como a ordem em que o par é formado não influi na reta determinada por ele, esse número deve ser dividido por 2, ou seja,

$$\frac{8 \times 7}{2} = 28.$$

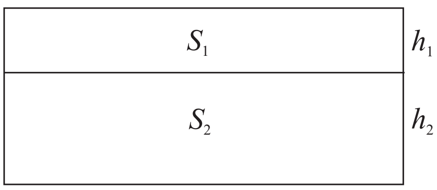
Finalmente, notamos que algumas retas estão sendo contadas três vezes e, portanto, devem ser subtraídas duas vezes desse número 28. São elas as quatro retas que contêm os lados do quadrado que delimita o reticulado. Logo, o número total de retas determinadas pelo reticulado é

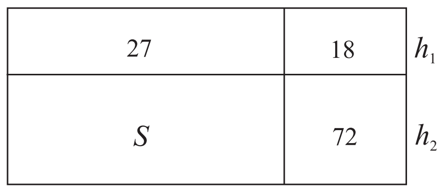
$$\frac{8 \times 7}{2} - 2 \times 4 = 20.$$

160. ***Cubo*** – Um cubo tem seis faces distintas, duas a duas opostas, sendo que as faces opostas não têm aresta em comum. Temos três pares de faces opostas, logo três cores são suficientes, bastando pintar as faces opostas de uma mesma cor. Por outro lado, é claro que duas cores somente não bastam.

161. ***Área***

Solução 1: Observemos, primeiro, que a razão entre as áreas de dois retângulos que têm a mesma base é igual à razão entre suas alturas. De fato, na figura à esquerda,





estão representados dois retângulos que têm a mesma base b e alturas h_1 e h_2. Suas áreas S_1 e S_2 são dadas por $S_1 = b\,h_1$ e $S_2 = b\,h_2$, portanto,

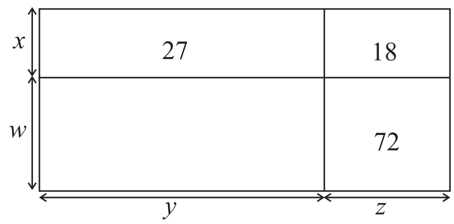
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{bh_1}{bh_2} = \frac{h_1}{h_2}\,.$$

Aplicando essa observação aos dois pares de retângulos dados (ver figura anterior, à direita) e denotando por S a área do quarto retângulo, temos

$$\frac{27}{S} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{18}{72} = \frac{1}{4}\,,$$

de modo que $S = 27 \times 4 = 108$. Assim, a área do lote que foi dividido mede $27 + 18 + 72 + 108 = 225$ km^2.

Solução 2: Sejam x, y, z e w as medidas dos retângulos menores, conforme a figura. A área procurada é



$$(x + w)(y + z) = xy + xz + wy + wz.$$

Basta determinar wy, pois é sabido que $xy = 27$, $xz = 18$ e $wz = 72$. Mas,

$$\frac{w}{x} = \frac{wz}{xz} = \frac{72}{18} = 4$$

e, portanto, $w = 4x$. Como $xy = 27$, segue que $wy = 4x \times 27/x = 4 \times 27 = 108$. Assim, a área do lote que foi dividido mede

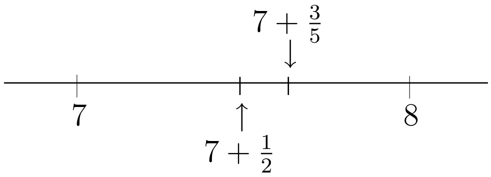
$$27 + 18 + 72 + 108 = 225 \text{ km}^2.$$

162. ***Inteiro mais próximo***

(a) Temos:

$$\frac{19}{15} + \frac{19}{3} = 1 + \frac{4}{15} + 6 + \frac{1}{3} = 7 + \frac{9}{15} = 7 + \frac{3}{5}.$$

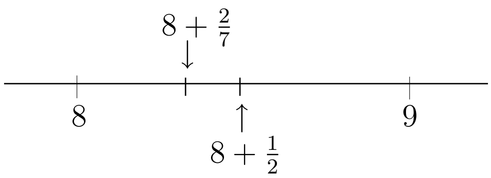
Logo, a soma dada está entre 7 e 8. Como $\dfrac{3}{5} > \dfrac{1}{2}$, o número inteiro mais próximo é 8.



(b) Temos:

$$\begin{aligned}\frac{85}{42} + \frac{43}{21} + \frac{29}{14} + \frac{15}{7} &= 2 + \frac{1}{42} + 2 + \frac{1}{21} + 2 + \frac{1}{14} + 2 + \frac{1}{7}\\ &= 8 + \frac{1}{42} + \frac{1}{21} + \frac{1}{14} + \frac{1}{7} = 8 + \frac{1}{7}\Big(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1\Big) = 8 + \frac{2}{7}\,.\end{aligned}$$

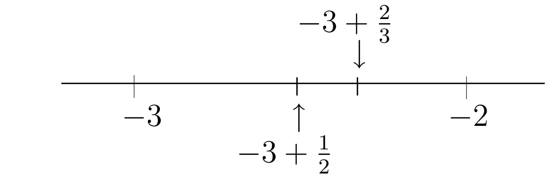
Logo, a soma dada está entre 8 e 9. Como $\frac{2}{7} < \frac{1}{2}$, o número inteiro mais próximo é 8.



(c) Temos:

$$-\frac{11}{10}-\frac{1}{2}-\frac{7}{5}+\frac{2}{3}=-\frac{30}{10}+\frac{2}{3}=-3+\frac{2}{3}.$$

Logo, a soma dada está entre -3 e -2. Como $\frac{2}{3}>\frac{1}{2}$, o número inteiro mais próximo é -2.



163. ***Brincando com números ímpares*** – Como cada algarismo é ímpar, temos:

- cinco possibilidades de números com um algarismo: 1, 3, 5, 7 e 9;
- para números com dois algarismos, temos cinco possibilidades na casa das unidades e cinco na casa das dezenas, totalizando $5\times 5=25$ possibilidades;
- para números com três algarismos, temos cinco possibilidades na casa das unidades, cinco na casa das dezenas e cinco na casa das centenas, totalizando $5\times5\times5=125$ possibilidades.

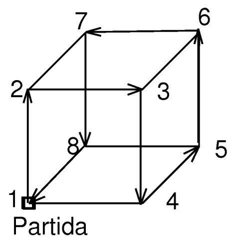
Assim, Beatriz pode escrever $5+25+125=155$ números com todos algarismos sendo ímpares.

164. ***Água no jarro*** – Inicialmente, o volume de água no jarro da Maria é 1 l = 1 000 ml. Depois de 200 dias, o volume é o mesmo, acrescido do que é colocado por João e diminuído do que ela tirou para colocar no do João, ou seja,

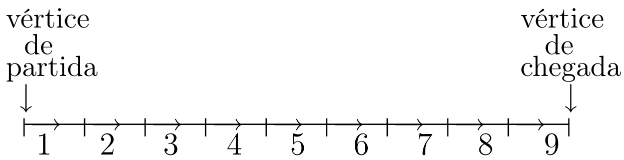
$$\begin{aligned}&1\,000+1-2+3-4+\cdots+199-200\\&\quad=1\,000+(1-2)+(3-4)+\cdots+(199-200)\\&\quad=1\,000-(\underbrace{1+\cdots+1}_{100})=900.\end{aligned}$$

Logo, depois de 200 dias, Maria terá 900 ml em seu jarro.

165. ***Formiga no cubo*** – Na figura temos um caminho percorrendo oito arestas que a formiga pode fazer partindo do vértice identificado como 1.



Será possível ela fazer um caminho passando por nove arestas? Para fazer esse caminho, ela teria que passar por nove vértices, pois o vértice de chegada é o mesmo que o de partida, já que a formiguinha volta ao vértice inicial.



Como o cubo só tem oito vértices, esse passeio não é possível. Logo, o passeio de maior comprimento percorre oito arestas.

166. ***Promoção*** – Sejam b e c o número de blusas e calças compradas, respectivamente. Logo, temos $15b + 17c = 143$, sendo b e c números inteiros positivos. Observe que $b < 10$ e $c < 9$, pois tanto 15×10 quanto 17×9 são maiores do que 143. A partir deste ponto, apresentamos duas possibilidades de solução.

Solução 1: Temos que $15b = 143 - 17c$, portanto $143 - 17c$ é um múltiplo de 15, de modo que $143-17c$ termina em 0 ou 5. Isso significa que $17c$ termina em 3 ou 8. Logo, $c = 9$ ou $c = 4$. Como $c < 9$, a única solução é $c = 4$ e, portanto,

$$b = \frac{143 - 17 \times 4}{15} = 5.$$

Assim, Joana comprou cinco blusas e quatro calças.

Solução 2: Temos que

$$b = \frac{143 - 17c}{15} = 9 - c + \frac{8 - 2c}{15}\,.$$

Note que c é um número inteiro positivo, portanto, $8 - 2c$ precisa ser um múltiplo de 15. Se $8-2c \geq 15$, c resulta negativo, portanto, $8-2c = 0$, ou seja, $c = 4$. Daí obtemos que $b = 5$. Assim, Joana comprou cinco blusas e quatro calças.

167. ***Soma de cubos*** – Temos a identidade do binômio, $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, e a do trinômio, $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$. Substituindo os valores de $x + y$ e $x^2 + y^2$ na identidade do binômio, obtemos $1 = 2 + 2xy$ e, portanto, $xy = -\frac{1}{2}$. Assim, pela identidade do trinômio,

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 1 - 3 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) \cdot 1 = \frac{5}{2}\,.$$

168. ***O revezamento em uma corrida*** – Como velocidade $= \dfrac{\text{distância}}{\text{tempo}}$, ou seja, tempo $=$ $\dfrac{\text{distância}}{\text{velocidade}}$, o tempo gasto por João foi de

$$t = \frac{21}{12}\,\text{h} = \Big(1 + \frac{9}{12}\Big)\text{h} = 1\,\text{h} + \frac{9}{12} \times 60\,\text{min} = 1\text{h}45\text{min}.$$

Logo, Carlos precisa completar a prova em um tempo inferior a

$$(2\text{h}48\text{min}) - (1\text{h}45\text{min}) = 1\text{h}3\text{min} = 63\text{min}.$$

Para isso, sua velocidade v, em km/min, deve satisfazer $\dfrac{21}{v} = t < 63$, ou seja,

$$v > \frac{21}{63} = \frac{1}{3}\,\text{km/min} = \frac{60}{3}\,\text{km/h} = 20\,\text{km/h}.$$

Logo, Carlos deve correr com uma velocidade superior a 20 km/h.

169. ***Produtos consecutivos***

Solução 1: Como os produtos são números consecutivos, podemos denotá-los por p e $p+1$. Temos, então,

$$p^2 + p = p(p+1) = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 = 510\,510.$$

Resolvendo a equação $p^2 + p - 510\,510 = 0$, encontramos uma única raiz positiva, $p = 714$. Assim, $p+1 = 715$ e, fatorando, obtemos

$$714 = 2 \times 3 \times 7 \times 17 \quad \text{e} \quad 715 = 5 \times 11 \times 13.$$

Solução 2: Os números dados são 2, 3, 5, 7, 11, 13 e 17. Se 2 e 5 estiverem no mesmo grupo, então um dos produtos termina em 0 e o outro, por ser consecutivo, termina em 1 ou 9. Os possíveis produtos terminados em 1 são $3 \times 7 = 21$, $3 \times 17 = 51$, $7 \times 13 = 91$, $13 \times 17 = 221$, $3 \times 7 \times 11 = 231$, $3 \times 11 \times 17 = 561$ e $7 \times 11 \times 13 = 1\,001$. Verifica-se que esses grupos não constituem solução e, analogamente, os terminados em 9. Concluímos que 2 e 5 estão em grupos diferentes. Logo, um produto termina em 5 e o outro em 4 ou 6. Como não é possível formar com os números dados um produto terminado em 6, necessariamente um dos produtos termina em 4 e o outro em 5. Por tentativas, obtemos a solução

$$714 = 2 \times 3 \times 7 \times 17 \quad \text{e} \quad 715 = 5 \times 11 \times 13.$$

170. ***Distraindo na fila*** – Observe que aquela que gritou os números 9, 18, etc, sempre gritou múltiplos de 9. O primeiro múltiplo de 3 com quatro algarismos é 1 002 e o primeiro múltiplo de 3 maior do que 2 003 é 2 004. Logo, Vivi gritou 2 004 e Rosa 1 002. Nenhum desses números é múltiplo de 9, portanto, foi Tânia quem gritou 9 e seus múltiplos.

Quem gritou 3, também gritou $12 = 3 + 9$, $21 = 3 + 2 \times 9$, $30 = 3 + 3 \times 9$ e assim por diante, até $3 + 9k$. Da mesma forma, quem grita 6, grita todos os números da forma $6 + 9k$. Dividindo por 9, obtemos $2\,004 = 6 + 9 \times 222$ e $1\,002 = 3 + 9 \times 111$, portanto, quem gritou 3 foi Rosa e Vivi gritou 6.

Rosa	Vivi	Tânia
3	6	9
12	15	18
21	24	27
⋮	⋮	⋮
1 002	1 005	1 008
⋮	⋮	⋮
2 001	2 004	2 007

Da mesma forma, dividindo por 9, encontramos que 666 é múltiplo de 9 e $888 = 6 + 98 \times 9$, portanto Tânia gritou 666 e Vivi gritou 888.

171. ***Número e o dobro*** – Inicialmente note que o dobro de um número inteiro é par, logo ele termina em 0, 2, 4, 6 ou 8. No entanto, o número procurado não pode terminar em 0, pois nesse caso o seu dobro também terminaria em 0, e ambos teriam o algarismo 0 em comum. Portanto, temos os casos a seguir.

$$\begin{array}{c} \text{I} \\ 1\ \ldots\ 2 \\ \times 2 \\ \hline 3\ \ldots\ 4 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{II} \\ 1\ \ldots\ 3 \\ \times 2 \\ \hline 2\ \ldots\ 6 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{III} \\ 1\ \ldots\ 4 \\ \times 2 \\ \hline \left\{\begin{array}{l} 2\ \ldots\ 8 \\ \text{ou} \\ 3 \end{array}\right. \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{IV} \\ 1\ \ldots\ 5 \\ \times 2 \\ \hline \left\{\begin{array}{l} 2\ \ldots\ 0 \\ \text{ou} \\ 3 \end{array}\right. \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{V} \\ 1\ \ldots\ 6 \\ \times 2 \\ \hline 3\ \ldots\ 2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{VI} \\ 1\ \ldots\ 7 \\ \times 2 \\ \hline \left\{\begin{array}{l} 2\ \ldots\ 4 \\ \text{ou} \\ 3 \end{array}\right. \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{VII} \\ 1\ \ldots\ 8 \\ \times 2 \\ \hline \left\{\begin{array}{l} 2\ \ldots\ 6 \\ \text{ou} \\ 3 \end{array}\right. \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{VIII} \\ 1\ \ldots\ 9 \\ \times 2 \\ \hline \begin{array}{l} 2\ \ldots\ 8 \\ \text{ou} \\ 3 \end{array} \end{array}$$

Vamos, agora, determinar todas as possibilidades para cada caso, lembrando sempre que o número e seu dobro não podem ter algarismos comuns.

- Caso I – temos três possibilidades:

$$152 \times 2 = 304\,, \qquad 182 \times 2 = 364\,, \qquad 192 \times 2 = 384\,.$$

- Caso II – temos duas possibilidades:

$$143 \times 2 = 286\,, \qquad 153 \times 2 = 206\,.$$

- Caso III – temos três possibilidades:

$$134 \times 2 = 268\,, \qquad 154 \times 2 = 308\,, \qquad 164 \times 2 = 328\,.$$

- Caso IV – temos três possibilidades:

$$135 \times 2 = 270\,, \qquad 145 \times 2 = 290\,, \qquad 185 \times 2 = 370\,.$$

- Caso V – temos duas possibilidades:

$$176 \times 2 = 352\,, \qquad 186 \times 2 = 372\,.$$

- Caso VI – não há nenhuma possibilidade.
- Caso VII – temos três possibilidades:

$$138 \times 2 = 276\,, \qquad 148 \times 2 = 296\,, \qquad 178 \times 2 = 356\,.$$

- Caso VIII – temos duas possibilidades:

$$139 \times 2 = 278\,, \qquad 179 \times 2 = 358\,.$$

Assim, temos $3 + 2 + 3 + 2 + 3 + 3 + 2 = 18$ soluções para esse problema, a saber:

$$134, 135, 138, 139, 143, 145, 148, 152, 153,$$

$$154, 164, 176, 178, 179, 182, 185, 186, 192.$$

172. **Invertendo os algarismos** – Devemos contar os números $a\,b$ de dois algarismos que têm o algarismo b da unidade maior do que o algarismo a da dezena, ou seja, tais que $b > a$. Se $a = 1$, o algarismo b da unidade pode ser 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9, portanto, temos oito possibilidades. Se $a = 2$, o algarismo b da unidade pode ser 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9, portanto, temos sete possibilidades. Continuando dessa maneira, chegamos até $a = 8$, quando o algarismo b da unidade só pode ser 9, portanto, temos só uma possibilidade. Claramente, a não pode ser 0 nem 9. Logo, existem $8+7+6+5+4+3+2+1 = 36$ números entre 10 e 99 tais que, invertendo a ordem de seus algarismos, obtemos um número maior do que o número original.

173. ***Razão entre segmentos*** – Se o arco $\overset{\frown}{PR}$ é o dobro do arco $\overset{\frown}{RQ}$, vale a mesma relação entre os ângulos centrais, ou seja, $P\widehat{O}R = 2\,R\widehat{O}Q$. Como $P\widehat{O}R + R\widehat{O}Q = 180°$, segue que

$$180° = 2\,R\widehat{O}Q + R\widehat{O}Q = 3\,R\widehat{O}Q,$$

donde $R\widehat{O}Q = 60°$. Mas, $OR = OQ$ é o raio do círculo, de modo que o triângulo $\triangle ORQ$ é equilátero. Assim, sua altura RM também é a mediana, ou seja, $OM = MQ$. Se r é o raio do círculo, então $OM = MQ = \dfrac{1}{2}r$ e

$$\frac{PM}{MQ} = \frac{PO + OM}{MQ} = \frac{r + \frac{1}{2}r}{\frac{1}{2}r} = 3,$$

ou seja, a razão entre PM e MQ é 3.

174. ***Triângulos*** – Vamos supor que a, b e c sejam os comprimentos dos lados do triângulo. Não há perda de generalidade em supor que $a \leq b \leq c$, de modo que $a + b + c \leq 3c$. Como cada lado de um triângulo é menor do que a soma dos outros dois, temos que $c < a + b$ e, portanto, obtemos $2c < a + b + c \leq 3c$. Mas, $a + b + c = 15$, de modo que $2c < 15 \leq 3c$ e, como c é um número inteiro, 5, 6 ou 7 são as únicas opções para c.

Se $c = 5$, então $a + b = 10$ e temos uma única possibilidade, $a = b = c = 5$. Se $c = 6$, então $a + b = 9$ e temos duas possibilidades para a, 3 ou 4, caso em que, necessariamente, b é 6 ou 5, respectivamente. Se $c = 7$, então $a + b = 8$ e temos quatro possibilidades para a, 1, 2, 3 ou 4. Nesses casos, necessariamente, b é 7, 6, 5 ou 4, respectivamente. Assim, no total, temos sete desses triângulos.

175. ***Número interessante*** – Suponhamos que N seja um dos números procurados. Como N e 119 deixam os mesmos restos quando divididos por 2, 3, 4, 5 e 6, temos que a diferença $N - 119$ entre eles deixa resto zero quando dividido por esses números. Portanto, $N - 119$ é um múltiplo de 2, 3, 4, 5 e 6. Como 60 é o mínimo múltiplo comum desses números, $N - 119$ é um múltiplo de 60, ou seja, $N - 119 = 60k$, para algum inteiro k. Assim, $N = 119+60k$ é um número interessante para qualquer número inteiro k. Como queremos números distintos de 119 e de três algarismos, devemos tomar k positivo e menor do que 15, já que $119+60\times15 = 1\,019$ tem quatro algarismos. Assim, tomamos k de 1 a 14 e obtemos outros 14 números interessantes de três algarismos, a saber,

$$179, 239, 299, 359, 419, 479, 539, 599, 659, 719, 779, 839, 899, 959.$$

176. ***Time vencedor*** – O time ganhou 60% das 45 já disputadas, ou seja, $45 \times \frac{60}{100} = 27$ partidas. Se ele ganhar mais n partidas, a porcentagem de partidas ganhas será

$$\frac{n^{\underline{o}} \text{ de partidas ganhas}}{n^{\underline{o}} \text{ de partidas disputadas}} = \frac{27+n}{45+n} = 75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}\,.$$

Logo, $4 \times (27+n) = 3 \times (45+n)$, do que resulta $n = 27$ como o número mínimo de partidas que o time ainda precisa vencer para atingir 75% de vitórias.

177. ***Brincando com dados*** – Na tabela seguinte, marcamos com $\times$ os produtos que são divisíveis por 6.

$\times$	1	2	3	4	5	6
1						$\times$
2			$\times$			$\times$
3		$\times$		$\times$		$\times$
4			$\times$			$\times$
5						$\times$
6	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$

Logo, temos 15 casos favoráveis dentre 36 possibilidades. Assim, a probabilidade de que o produto seja divisível por 6 é $15/36 = 5/12 = 41{,}7\%$.

178. ***Contando soluções*** – A equação dada é equivalente a $xy = 144(x+y) = 144x+144y$, portanto, isolando x, obtemos $x = \dfrac{144y}{y-144}$. Como x e y devem ser inteiros positivos, o denominador $y - 144$ deve ser um número inteiro positivo, digamos, $y - 144 = n$. Substituindo essa expressão no valor de x, obtemos

$$x = \frac{144(n+144)}{n} = 144 + \frac{144^2}{n}.$$

Como x deve ser um número inteiro, n deve ser um divisor de 144^2. Sendo $144^2 = 12^4 = 2^8 \cdot 3^4$, seus divisores são os números d da forma $d = 2^a \cdot 3^b$, com $0 \leq a \leq 8$ e $0 \leq b \leq 4$. Como há 9 valores possíveis para a e 5 valores possíveis para b, concluímos que 144^2 tem $9 \times 5 = 45$ divisores.

Assim, para cada divisor n de 144^2, obtemos uma solução

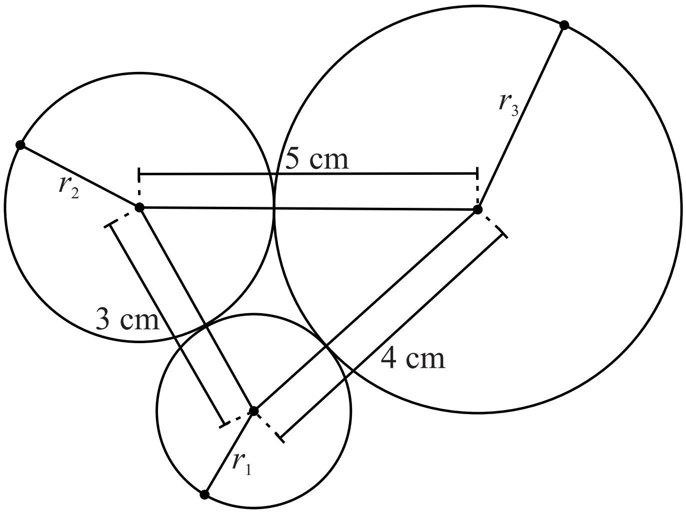
$$(x,y) = \Big(144 + \frac{144^2}{n}, n+144\Big)$$

da equação $\dfrac{xy}{x+y} = 144$ dada. Portanto, essa equação possui 45 pares de números inteiros positivos (x, y) que a satisfazem.

179. ***Círculos tangentes*** – Denotemos por r_1, r_2 e r_3 os raios dos três círculos. Como os círculos são tangentes dois a dois, temos

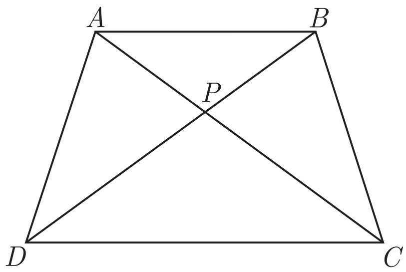
$$\begin{cases} r_1 + r_2 = 3, \\ r_1 + r_3 = 4, \\ r_2 + r_3 = 5. \end{cases}$$

Substituindo os valores $r_2 = 3 - r_1$ e $r_3 = 4 - r_1$ na terceira equação, obtemos $3 - r_1 + 4 - r_1 = 5$. Daí, $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ e $r_3 = 3$. Logo, a soma das áreas dos três círculos é $(1^2 + 2^2 + 3^2)\,\pi = 14\,\pi$ cm^2.



180. ***Grupo de amigos*** – Se A é a quantidade de dinheiro que João recebeu de cada um de seus amigos, então ele recebeu um total de $3A$. Como ele recebeu, de Jorge, um quinto do seu dinheiro, então Jorge tinha $5A$. Da mesma maneira, José tinha $4A$ e Jânio tinha $3A$. Assim, os três amigos tinham, juntos, $5A + 4A + 3A = 12A$ e a fração do dinheiro do grupo que ficou com João foi de (3A)/(12A)=1/4, ou seja, uma quarta parte.

181. ***Um trapézio*** – Os triângulos $\triangle APB$ e $\triangle CPD$ são semelhantes, pois o ângulo $A\widehat{P}B$ é igual ao ângulo $C\widehat{P}D$ (opostos pelo vértice) e o ângulo $A\widehat{B}D$ é igual ao ângulo $B\widehat{D}C$ (alternos internos).



Como a razão entre suas áreas é 4/9, temos que a razão de semelhança entre esses triângulos é $\sqrt{4/9} = 2/3$. Logo,

$$\frac{PB}{DP} = \frac{2}{3}\,.$$

Por outro lado, os triângulos $\triangle CPD$ e $\triangle PCB$ têm a mesma altura em relação às bases DP e PB, respectivamente. Portanto, a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas bases,

$$\frac{\text{área }(\triangle PCB)}{\text{área }(\triangle CPD)} = \frac{PB}{DP} = \frac{2}{3}\,.$$

Como área $(\triangle CPD) = 9$, segue que a área do triângulo $\triangle PCB$ mede 6 cm^2.

Observação: O mesmo argumento poderia ser usado para mostrar que também a área do triângulo $\triangle ADP$ mede 6 cm^2. As medidas de 4 e 9 cm^2 de área dadas no enunciado do problema não desempenham papel especial algum. O argumento exposto acima prova que num trapézio qualquer os triângulos $\triangle PCB$ e $\triangle ADP$ têm áreas iguais, mesmo que o trapézio não seja equilátero.

182. ***Vista ruim*** – Seja A o número total de alunos da sala. Sabemos que $\dfrac{40}{100} \times A$ não enxergam bem, portanto, $\dfrac{70}{100} \times \dfrac{40}{100} \times A$ usam óculos. Assim,

$$\frac{70}{100} \times \frac{40}{100} \times A = 21 \quad \text{ou seja,} \quad A = \frac{21 \times 100}{7 \times 4} = 3 \times 25 = 75\,.$$

183. ***Idade média da população de Campo Verde*** – Se H indica o número de homens e M o de mulheres, então $H/M = 2/3$, de modo que $M = (3H)/2$ e, portanto, a população de Campo Verde é dada por

$$H + M = H + \tfrac{3}{2}\,H = \tfrac{5}{2}\,H\,.$$

Se a idade média dos homens é 37 anos, então

$$37 = \text{ idade média dos } H \text{ homens } = \frac{\text{soma das idades de todos homens}}{H}\,,$$

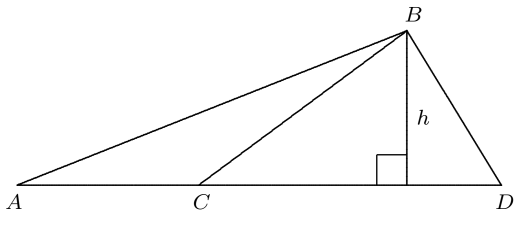
de modo que $37\,H$ é a soma das idades de todos os homens. Da mesma forma, $42\,M$ é a soma das idades de todas as mulheres. Segue que a soma das idades de toda a população é dada por

$$37H + 42M = 37H + 42\tfrac{3}{2}H = 100H.$$

Assim, a idade média da população de Campo Verde é

$$\frac{37H + 42M}{H + M} = \frac{100H}{\frac{5H}{2}} = \frac{100 \times 2}{5} = 40 \text{ anos.}$$

184. ***Área de triângulo*** – Os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle CBD$ têm bases AC e CD, respectivamente, e a mesma altura h em relação a essas bases.



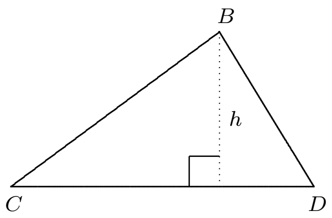
Assim, temos

$$\text{área } \triangle ABC = \frac{AC \times h}{2} \quad \text{e} \quad \text{área } \triangle CBD = \frac{CD \times h}{2}\,.$$

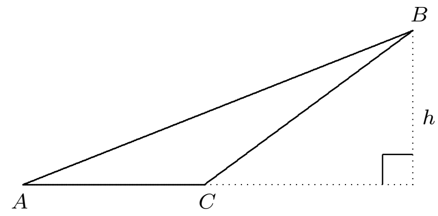
Logo, a relação entre as áreas é dada por

$$\frac{\text{área } \triangle ABC}{\text{área } \triangle CBD} = \frac{\frac{AC\times h}{2}}{\frac{CD\times h}{2}} = \frac{AC}{CD} = \frac{1{,}5}{4-1{,}5} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}\,.$$

LEMBRETE: A área de um triângulo é a metade do produto de um dos seus lados pela altura h relativa a este lado, como exemplificado nas duas figuras a seguir.



Área do $\triangle CBD = \dfrac{CD \times h}{2}$



Área do $\triangle ABC = \dfrac{AC \times h}{2}$

185. ***Construindo quadrados perfeitos*** – Sim, será sempre um quadrado perfeito. De fato, se $n-1, n, n+1$ e $n+2$ são quatro inteiros consecutivos, então seu produto mais 1 é um quadrado perfeito, como segue.

$$\begin{aligned}
(n-1)n(n+1)(n+2)+1 &= n(n^2-1)(n+2)+1\\
&= n(n^3+2n^2-n-2)+1\\
&= n^4+2n^3-n^2-2n+1\\
&= n^4+2n^3+(n^2-2n^2)-2n+1\\
&= (n^4+2n^3+n^2)-2n^2-2n+1\\
&= (n^2+n)^2-2(n^2+n)+1\\
&= \big[(n^2+n)-1\big]^2.
\end{aligned}$$

186. ***Feira de Ciências*** – Sejam x e y o número de alunos do ensino fundamental e médio, respectivamente, presentes na feira. Sabemos que o número daqueles que compraram um adesivo é $x/2$ do ensino fundamental e $y/4$ do ensino médio, portanto, o número daqueles que não compraram um adesivo é $x/2$ do ensino fundamental e $3y/4$ do ensino médio. Dentre os alunos que não compraram adesivos, os do ensino médio representam o dobro dos do ensino fundamental. Logo,

$$\frac{3y}{4} = 2\times\frac{x}{2}, \quad \text{ou seja,} \quad x = \frac{3y}{4} \quad \text{e} \quad \frac{x}{2} = \frac{3y}{8}\,.$$

Sabendo que o total arrecadado foi de R$ 38,00, estabelecemos que

$$38 = 0{,}30\,\frac{x}{2} + 0{,}50\,\frac{y}{4} = 0{,}30\,\frac{3y}{8} + 0{,}50\,\frac{y}{4} = \frac{1{,}90}{8}\,y,$$

de modo que $y=160$ e, como $x = 3y/4$, segue que $x = 120$.

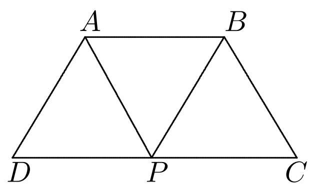
187. ***Par perfeito*** – Denotemos por n o número natural "candidato" a formar um par perfeito com 122. Então devemos ter $122 + n = A^2$ e $122 \times n = B^2$, onde A e B são números naturais. Como $B^2 = 2 \times 61 \times n$, os fatores primos 2 e 61 de B^2 devem aparecer um número par de vezes, o que garante que n tem os fatores primos 2 e 61, ou seja, $n = 2 \times 61 \times m^2 = 122\,m^2$, para algum natural positivo m. Decorre disso que

$$A^2 = 122 + 122\,m^2 = 122(1 + m^2).$$

O menor valor de $(1 + m^2)$ que satisfaz essa igualdade é $1 + m^2 = 122$, ou seja, $m^2 = 121$ e $m = 11$. Consequentemente, $n = 122 \times 121$ e concluímos que $A^2 = 122 + 122 \times 121 = 122^2$ e $B^2 = 122 \times 122 \times 121 = (122 \times 11)^2$. Assim, 122 e 122×121 formam um par perfeito.

Observação: Na verdade, 122×121 é o **menor** natural que forma um par perfeito com 122. Será que existem outros?

188. ***Um trapézio*** – A resposta correta é (d).
Seja P o ponto médio do segmento DC e tracemos os segmentos AP e BP. Os três triângulos assim formados, $\triangle ADP$, $\triangle APB$ e $\triangle BPC$, são equiláteros (porquê?), de modo que $D\widehat{A}P = 60° = P\widehat{A}B$. Como o segmento AC é a bissetriz do ângulo $P\widehat{A}B$ (porquê?), concluímos que $P\widehat{A}C = 30°$. Assim,



$$D\widehat{A}C = D\widehat{A}P + P\widehat{A}C = 60° + 30° = 90°.$$

189. ***Mistério das bolas*** – Seja m o número de bolas pretas na primeira urna e n o de bolas brancas na segunda urna. Inicialmente, Henrique retirou k bolas pretas da primeira urna e as colocou na segunda urna. Nesse ponto, a situação é a seguinte:

- na 1ª urna temos $\underbrace{m-k}_{\text{pretas}}$ e
- na 2ª urna temos $\underbrace{n}_{\text{brancas}} + \underbrace{k}_{\text{pretas}}$.

Depois, ele retirou k bolas da segunda urna e as colocou na primeira urna. Agora, esse grupo de k bolas pode ter bolas brancas e pretas. Denotemos por p o número de bolas pretas e por b o de bolas brancas retiradas da 2ª urna. Então $k = b + p$ e

- na 1ª urna temos $\underbrace{m-k}_{\text{pretas}} + \underbrace{p}_{\text{pretas}} + \underbrace{b}_{\text{brancas}} = \underbrace{m-k+p}_{\text{pretas}} + \underbrace{b}_{\text{brancas}}$,
- na 2ª urna temos $\underbrace{n}_{\text{brancas}} + \underbrace{k}_{\text{pretas}} - \underbrace{b}_{\text{brancas}} - \underbrace{p}_{\text{pretas}} = \underbrace{n-b}_{\text{brancas}} + \underbrace{k-p}_{\text{pretas}}$.

Assim, ele ficou com b bolas brancas na primeira urna e $k - p$ bolas pretas na segunda urna. No entanto, $k = p + b$, ou $b = k - p$. Logo, o número de bolas brancas na primeira urna é igual ao número de bolas pretas na segunda urna.

190. ***Contando a palavra BRASIL*** – Para ler a palavra BRASIL, devemos percorrer um caminho que comece numa letra B e termine na letra L. Observemos que o caminho a ser percorrido é composto sucessivamente de deslocamentos horizontais para a direita e verticais para baixo. Representemos esses caminhos por sequências de letras H (significando deslocamento horizontal para a direita) e V (significando deslocamento vertical para baixo). Vejamos dois exemplos.

(i) Começamos em B na segunda linha (de cima para baixo) e seguimos o caminho VHVVV.

(ii) Começamos em B na quarta linha e seguimos o caminho HVVHH.

Para resolver o problema devemos contar quantos caminhos começam com B e terminam com L. Para istso, vamos listar esses caminhos, escrevendo $\mathcal{C}_j$ para o número de caminhos que começam com o B da linha j, em que j varia de 1 a 6, como segue.

(1) Primeira linha: VVVVV $\rightsquigarrow \mathcal{C}_1 = 1$;

(2) segunda: HVVVV, VHVVV, VVHVV, VVVHV, VVVVH $\rightsquigarrow \mathcal{C}_2 = 5$;

(3) terceira: HHVVV, HVHVV, HVVHV, HVVVH, VHHVV, VHVHV, VHVVH, VVHHV, VVHVH, VVVHH $\rightsquigarrow \mathcal{C}_3 = 10$;

(4) quarta: HHHVV, HHVHV, HHVVH, HVHHV, HVHVH, HVVHH, VHHHV, VHHVH, VHVHH, VVHHH $\rightsquigarrow \mathcal{C}_4 = 10$;

(5) quinta: HHHHV, HHHVH, HHVHH, HVHHH, VHHHH $\rightsquigarrow \mathcal{C}_5 = 5$;

(6) sexta: HHHHH $\rightsquigarrow \mathcal{C}_6 = 1$.

Portanto, a palavra BRASIL aparece

$$\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_4 + \mathcal{C}_5 + \mathcal{C}_6 = 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32$$

vezes na figura.

Observação: O que significa a simetria $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_6, \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_5$ e $\mathcal{C}_3 = \mathcal{C}_4$?

191. ***Quais são os números?*** – A equação pode ser escrita na forma $x^4 - y^2 = 71$ e, fatorando $x^4 - y^2 = (x^2 - y)(x^2 + y)$, na forma

$$(x^2 - y)(x^2 + y) = 71.$$

Como x e y são inteiros, cada um dos fatores $x^2 - y$ e $x^2 + y$ também é um número inteiro, de modo que escrevemos 71 como o produto de dois números inteiros. Como 71 é um número primo, ele só pode ser escrito como produto de inteiros na forma 1×71 ou 71×1. Assim, temos somente dois casos a considerar, a saber, $x^2 - y = 71$ e $x^2 + y = 1$, ou $x^2 - y = 1$ e $x^2 + y = 71$. Como x, y são inteiros positivos, temos $x^4 = y^2 + 71 \geq 72 > 16 = 2^4$, portanto, $x > 2$. Em particular, $x^2 + y = 1$ é impossível, pois implicaria $1 = x^2 + y \geq 9 + 1 = 10$.

Assim, resta considerar o caso $x^2 - y = 1$ e $x^2 + y = 71$. Somando essas duas equações, obtemos $2x^2 = 72$, o que fornece $x = \pm 6$ e, portanto, $y = (\pm 6)^2 - 1 = 35$. Como x, y são inteiros positivos, concluímos que a única solução é $x = 6$ e $y = 35$.

192. ***No jogo*** – Seja T a quantidade total de dinheiro no jogo. Assim, no início, os jogadores possuíam

$$\begin{array}{ll} \text{Aldo:} & \dfrac{7}{18}T, \\ \text{Bernardo:} & \dfrac{6}{18}T, \\ \text{Carlos:} & \dfrac{5}{18}T \end{array}$$

e, no final, eles possuíam

$$\begin{array}{ll} \text{Aldo:} & \dfrac{6}{15}T, \\ \text{Bernardo:} & \dfrac{5}{15}T, \\ \text{Carlos:} & \dfrac{4}{15}T. \end{array}$$

Para comparar essas frações, usamos o denominador comum de 18 e 15, a saber, 90. Desse modo, no início,

$$\begin{array}{ll} \text{Aldo:} & \dfrac{7}{18}T = \dfrac{35}{90}T, \\ \text{Bernardo:} & \dfrac{6}{18}T = \dfrac{30}{90}T, \\ \text{Carlos:} & \dfrac{5}{18}T = \dfrac{25}{90}T \end{array}$$

e, no final,

$$\begin{array}{ll} \text{Aldo:} & \dfrac{6}{15}T = \dfrac{36}{90}T, \\ \text{Bernardo:} & \dfrac{5}{15}T = \dfrac{30}{90}T, \\ \text{Carlos:} & \dfrac{4}{15}T = \dfrac{24}{90}T. \end{array}$$

Logo, foi Aldo quem ganhou um total de $\dfrac{1}{90}T$, que corresponde a 12 reais, de modo que $\dfrac{1}{90}T = 12$, ou seja, o total T de dinheiro no início o jogo foi

$$T = 90 \times 12 = 1\,080 \text{ reais.}$$

Assim, no final da partida, os jogadores possuiam, em reais,

$$\begin{array}{ll} \text{Aldo:} & \dfrac{36}{90} \text{ de } 1\,080 = 432, \\ \text{Bernardo:} & \dfrac{30}{90} \text{ de } 1\,080 = 360, \\ \text{Carlos:} & \dfrac{24}{90} \text{ de } 1\,080 = 288. \end{array}$$

193. ***Um número inteiro*** – Denotemos $a = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}$ e $b = \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$. Então

$$a^3 - b^3 = \left(\sqrt{5}+2\right) - \left(\sqrt{5}-2\right) = 4$$

e

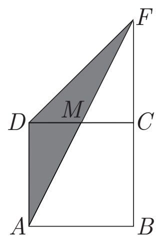
$$a\,b = \sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} = \sqrt[3]{5-4} = \sqrt[3]{1} = 1,$$

de modo que $M = a - b$ satisfaz $M^3 = (a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3a\,b(a-b) = 4 - 3\,M$.

Assim, $M^3 + 3M - 4 = 0$, ou seja, o número M é raiz do polinômio $x^3 + 3x - 4$. Como o número 1 é uma raiz desse polinômio, podemos fatorá-lo e escrever $x^3 + 3x - 4$ como $(x-1)(x^2+x+4)$. O trinômio $x^2 + x + 4$ tem discriminante negativo, de modo que a única raiz real de $x^3 + 3x - 4$ é 1 e, portanto, $M = 1$. Em particular, M é um número inteiro.

194. ***Área de triângulos***

(a) Note que $F\widehat{M}C$ e $A\widehat{M}D$ são ângulos opostos pelo vértice, de modo que $F\widehat{M}C = A\widehat{M}D$. Como $MC = MD$ e os triângulos $\triangle AMD$ e $\triangle FMC$ são retângulos, estabelecemos que eles são congruentes. Assim, possuem a mesma área, donde concluímos que a área do triângulo $\triangle ABF$ é igual à área do quadrado $ABCD$, que foi dada, medindo 300 cm^2.



(b) Como $AD = FC$ (do item anterior) e $MC = MD$, segue que os triângulos $\triangle AMD$, $\triangle DMF$ e $\triangle FMC$ têm a mesma área. Por outro lado, a soma das áreas dos dois últimos é a metade da área do quadrado. Portanto, a área do triângulo $\triangle AFD$ é a metade da área do quadrado $ABCD$. Essa área foi dada, medindo 300 cm^2, logo, a área do triângulo $\triangle AFD$ mede 150 cm^2.

195. ***Um quadriculado*** – Sejam m e n, respectivamente, o número de segmentos ao longo de dois lados consecutivos do retângulo desenhado por Rosa. Sabemos que o número total de segmentos que são lados de quadrados na divisão de um retângulo em $m \times n$ quadrados é $m(n+1)+n(m+1)$ (prove isso). Assim, como Rosa usou 1 997 segmentos em seu desenho, temos $m(n+1)+n(m+1) = 1\,997$.

Além disso, um dos lados considerados é menor do que ou igual ao outro, digamos, $m \leq n$. Nesse caso, obtemos $1\,997 = m(n+1)+n(m+1) \geq 2m(n+1)$.

Como $1\,998 > 1\,997$, segue que $1\,998 > 2m(m+1)$, ou seja, $999 > m(m+1)$, do que podemos deduzir que $1 \leq m \leq 31$. Por outro lado, multiplicando, obtemos $1\,997 = mn + m + mn + n = m + n(2m+1)$, de modo que $n = (1\,997 - m)/(2m+1)$ e, portanto,

$$2n = \frac{3\,994 - 2m}{2m+1} = \frac{3\,995 - (2m+1)}{2m+1} = \frac{3\,995}{2m+1} - 1.$$

No entanto, n é um inteiro positivo, portanto, $2m+1$ precisa ser um divisor de 3 995. Como $3\,995 = 5 \times 17 \times 47$ e $1 \leq m \leq 31$, as únicas três opções são $2m+1 = 5, 17$ ou 47, que fornecem $m = 2$, $m = 8$ e $m = 23$ e os valores correspondentes de $n = 399$, $n = 117$ e $n = 42$.

Portanto, Rosa poderia ter desenhado três configurações diferentes com os 1 997 segmentos, uma com 2×399 quadrados, outra com 8×117 quadrados e uma terceira, com 23×42 quadrados. Entretanto, a folha de papel utilizada mede 21 por 29,7 cm e os segmentos que formam os lados dos quadrados medem 0,5 cm. Assim, as duas primeiras configurações não cabem no papel de Rosa e podemos afirmar que o retângulo que Rosa desenhou consiste em 23×42 quadrados e que, portanto, é constituído de 966 quadrados.

196. ***Inteiros de quatro algarismos*** – Temos $1\,000 \leq 4a^2 < 10\,000$, do que decorre $250 \leq a^2 < 2\,500$. Mas, $15^2 = 225, 16^2 = 256$ e $50^2 = 2\,500$, portanto, como a é um número natural, obtemos $15 < a < 50$. Também temos $1\,000 \leq \dfrac{4}{3} \times a^3 < 10\,000$, do que decorre $750 \leq a^3 < 7\,500$. Mas, $9^3 = 729, 10^3 = 1\,000$, $19^3 = 6\,859$ e $20^3 = 8\,000$, portanto, como a é um natural, também temos $9 < a < 20$. Desse modo, as únicas opções são $a = 16, 17, 18$ ou 19.

    Por outro lado, como $\dfrac{4}{3} \times a^3$ é um número inteiro, concluímos que $a = 18$. De fato, isso pode ser obtido substituindo os quatro possíveis valores de a ou, então, observando que a^3 deve ser um múltiplo de 3 e, consequentemente, que a é um múltiplo de 3.

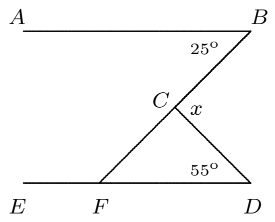
197. ***Pares positivos*** – Como $501 - 3x = 3(167 - x)$, a equação dada é equivalente a $y = \dfrac{3}{5}(167-x)$. Como y é um inteiro positivo, $167-x$ deve ser algum múltiplo positivo de 5, ou seja, $167 - x = 5k$, para algum inteiro positivo k e, portanto, $x = 167 - 5k$ ou, ainda, $x = 5 \times 33 + 2 - 5k = 5(33-k) + 2$. Como x é um inteiro positivo, devemos ter $1 \leq k \leq 33$. Consequentemente, podemos tomar qualquer $k = 1, 2, \ldots, 33$, obtendo trinta e três pares de inteiros positivos (x, y) que são soluções da equação $3x+57 = 501$.

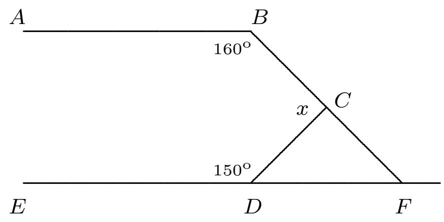
198. ***Diferença de quadrados*** – A resposta correta é (e).

    Solução 1: Observe que o quadrado de um número par é par e o quadrado de um número ímpar é ímpar. Se os dois números são consecutivos, então um deles é par e o outro é ímpar. Portanto, elevando ao quadrado, um dos quadrados é par e o outro é ímpar. Mas, a diferença entre um número par e um número ímpar é sempre um número ímpar. Como 2.000 é um número par, concluímos que não existem dois números consecutivos tais que a diferença de seus quadrados seja 2 000.

    Solução 2: Seja n um número inteiro. Então $(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n+1$, de modo que a diferença entre o quadrado dos números consecutivos n e $n+1$ é, sempre, um número ímpar. Como 2 000 é um número par, concluímos que não existem dois números consecutivos tais que a diferença de seus quadrados seja 2 000.

199. ***Cálculo de ângulos*** – Na primeira figura, prolongamos o segmento BC até sua interseção com o segmento ED, num ponto F. Como os segmentos AB e ED são paralelos, os ângulos $A\widehat{B}F$ e $B\widehat{F}D$ são alternos internos, portanto, possuem a mesma medida, ou seja, $C\widehat{F}D = 25^{\circ}$. Agora, observe que o ângulo x é externo ao triângulo $\triangle CDF$. Logo, x é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes, ou seja, $x = 25^{\circ} + 55^{\circ} = 80^{\circ}$.





Na segunda figura, novamente prolongamos o segmento BC até sua interseção com o prolongamento do segmento ED, num ponto F. Como os segmentos AB e EF são paralelos, os ângulos $A\widehat{B}F$ e $D\widehat{F}B$ são colaterais internos, portanto, suplementares, ou seja,

$$D\widehat{F}C = D\widehat{F}B = 180^{\circ} - A\widehat{B}F = 180^{\circ} - 160^{\circ} = 20^{\circ}.$$

Por outro lado, o ângulo $C\widehat{D}F$ é igual a 30°, por ser o suplemento do ângulo $E\widehat{D}C = 150^{\circ}$. Agora, observe que o ângulo x é externo ao triângulo $\triangle CDF$. Logo, x é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes, ou seja, $x = 20^{\circ} + 30^{\circ} = 50^{\circ}$.

200. ***Tabela*** – Como a tabela tem seis colunas, em cada linha escrevemos seis números consecutivos. Dividindo 1 000 por 6, obtemos

$$1\,000 = 6 \times 166 + 4.$$

1ª linha	1	2	3	4	5	6
2ª linha	7	8	9	10	11	12
3ª linha	13	14	15	16	17	18
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
167ª linha	997	998	999	1 000		

Desse modo, para escrever o número 1 000 na tabela são necessárias 166 linhas completas (terminando no número $6 \times 166 = 996$) e mais uma linha com os quatro números 997, 998, 999 e 1 000. Logo, 1 000 está escrito na 167ª linha e na quarta coluna.

201. ***Entre* 1 *e* 2** – Se uma fração é positiva e menor do que 1, seu numerador deve ser menor do que seu denominador. Assim, devemos ter

$$0 < a < 5 \quad \text{e} \quad 0 < b < 7.$$

Como $\dfrac{1}{5}\,a + \dfrac{1}{7}\,b = \dfrac{1}{35}(7a + 5b)$, a condição dada equivale a

$$1 < \frac{7a+5b}{35} < 2, \quad \text{ou seja,} \quad 35 < 7a + 5b < 70.$$

Desse modo, vemos que o problema consiste em obter todos os inteiros a e b tais que

$$0 < a < 5, \quad 0 < b < 7 \quad \text{e} \quad 35 < 7a + 5b < 70.$$

Examinemos cada uma das quatro opções de a, de 1 a 4, com correspondentes possibilidades de b, dentre os inteiros 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

- $a = 1$. Então $7a + 5b = 7 + 5b$ e, de $35 < 7 + 5b < 70$, decorre que $28 < 5b < 63$, ou seja, $6 \leq b \leq 12$. Como $b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, concluímos que a única opção é $b = 6$.

- $a = 2$. Então $7a + 5b = 14 + 5b$ e, de $35 < 14 + 5b < 70$, decorre que $21 < 5b < 56$, ou seja, $5 \leq b \leq 11$. Como $b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, concluímos que as únicas opções são $b = 5$ e $b = 6$.
- $a = 3$. Então $7a + 5b = 21 + 5b$ e, de $35 < 21 + 5b < 70$, decorre que $14 < 5b < 49$, ou seja, $3 \leq b \leq 9$. Como $b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, concluímos que as únicas opções são $b = 3$, 4, 5 ou 6.
- $a = 4$. Então $7a + 5b = 28 + 5b$ e, de $35 < 28 + 5b < 70$, decorre que $7 < 5b < 42$, ou seja, $2 \leq b \leq 8$. Como $b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, concluímos que as únicas opções são $b = 2$, 3, 4, 5 ou 6.

Concluímos exibindo as doze soluções a, b na tabela seguinte.

a	b	$1 < \frac{a}{5} + \frac{b}{7} < 2$	a	b	$1 < \frac{a}{5} + \frac{b}{7} < 2$
1	6	$\frac{1}{5} + \frac{6}{7} = \frac{37}{35}$	2	5	$\frac{2}{5} + \frac{5}{7} = \frac{39}{35}$
4	2	$\frac{4}{5} + \frac{2}{7} = \frac{38}{35}$		6	$\frac{2}{5} + \frac{6}{7} = \frac{44}{35}$
	3	$\frac{4}{5} + \frac{3}{7} = \frac{43}{35}$	3	3	$\frac{3}{5} + \frac{3}{7} = \frac{36}{35}$
	4	$\frac{4}{5} + \frac{4}{7} = \frac{48}{35}$		4	$\frac{3}{5} + \frac{4}{7} = \frac{41}{35}$
	5	$\frac{4}{5} + \frac{5}{7} = \frac{53}{35}$		5	$\frac{3}{5} + \frac{5}{7} = \frac{46}{35}$
	6	$\frac{4}{5} + \frac{6}{7} = \frac{58}{35}$		6	$\frac{3}{5} + \frac{6}{7} = \frac{51}{35}$

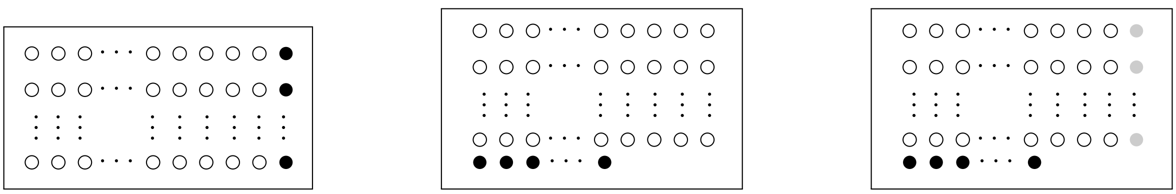
202. ***Triatlon*** – Seja x a velocidade com que Maria nada, em metros por minuto. Então o tempo que Maria gasta nadando 800 m é dado por $800/x$ minutos. Sabemos que sua velocidade na corrida é $3\,x$ e, na bicicleta, $2{,}5 \times 3\,x = 7{,}5\,x$ metros por minuto. Assim, o tempo total que Maria gasta nas três etapas é

$$\underbrace{\frac{800}{x}}_{\text{nadando}} + \underbrace{\frac{20\,000}{7{,}5\,x}}_{\text{pedalando}} + \underbrace{\frac{4\,000}{3\,x}}_{\text{correndo}} = \frac{800 \times 7{,}5 + 20.000 + 4\,000 \times 2{,}5}{7{,}5\,x} = \frac{4\,800}{x}$$

minutos. Logo, para que ela vença as três etapas em, no máximo, uma hora e vinte minutos, ou seja, em 80 min, devemos ter, no mínimo, $80 = 4\,800/x$, ou seja, $x = 4\,800/80 = 60$ metros por minuto. Segue que $3\,x = 180$ e $7{,}5\,x = 450$ metros por minuto. Assim, para que Maria termine a prova em, no máximo, 1 hora e 20 minutos, ela deve desenvolver as seguintes velocidades mínimas:

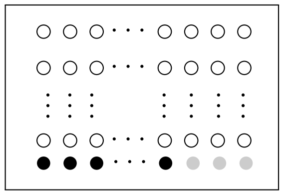
- nadar a uma velocidade mínima de 60 m/min,
- pedalar a uma velocidade mínima de 450 m/min e
- correr a uma velocidade mínima de 180 m/min.

203. ***Foto de formatura*** – Os diagramas a seguir representam a situação do problema, onde os alunos que foram inicialmente retirados estão representados em preto e os alunos retirados na segunda vez, em cinza.



Sejam m e n o número de filas (linhas horizontais) e de colunas da formação inicial, respectivamente. Com um aluno de cada uma das m filas é formada uma nova fila, incompleta: faltam quatro alunos para completar as atuais $n-1$ colunas, ou seja, $m+4=n-1$ e, portanto, $n=m+5$. Agora temos m filas de $n-1$ alunos, além de uma fila incompleta, em que faltam quatro alunos.

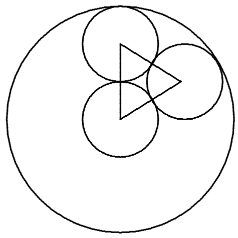
Tirando um aluno de cada uma das m filas completas, formamos um retângulo com uma coluna a menos, portanto preenchemos as atuais três vagas da nova fila. Assim, $m=3$ e, portanto, $n=8$. O número total de alunos na foto é dado por $n\times m=3\times 8=24$.



204. ***Circunferências tangentes***

(a) Como as circunferências de 1 e 3 cm de raio são concêntricas, as novas circunferências tangentes às originais também devem ter raio igual a 1 cm.

(b) Os centros das três circunferências de 1 cm de raio mostradas na figura formam um triângulo equilátero de 2 cm de lado. Logo, seus ângulos internos medem 60º. Como $360/60=6$, concluímos que podem ser dispostas, no máximo, seis circunferências sem sobreposição, nas condições exigidas.



205. ***Festa na escola*** – Representando o número de docinhos que cada um dos quatro amigos levou pela inicial de seu nome, temos

$$\begin{cases} A+P+M+F=90, \\ A+2=P-2=2M=\frac{1}{2}\,F. \end{cases}$$

Segue da segunda equação que $P=A+4$, $M=\frac{1}{2}\,(A+2)$ e $F=2(A+2)$. Substituindo esses valores na primeira equação, obtemos

$$90=A+(A+4)+\tfrac{1}{2}\,(A+2)+2(A+2)=\tfrac{1}{2}\,9A+9=9\Big(\tfrac{1}{2}\,A+1\Big),$$

de modo que $\frac{1}{2}\,A+1=10$, ou seja, $A=18$. Assim,

$$P=18+4=22, \quad M=\frac{18+2}{2}=10 \quad \text{e} \quad F=2(18+2)=40.$$

206. ***Inflação*** – O preço antigo era inferior a 50 reais e sofreu um acréscimo de 20%, com o que o preço novo ainda é um número de dois algarismos, que representamos por $a\,b$, onde a é o algarismo das dezenas e b é o algarismo das unidades, ou seja, $a\,b=10\,a+b$. O preço novo é o preço antigo $b\,a$ com um acréscimo de 20%, ou seja,

$$10\,a+b=a\,b=(1{,}2)\,b\,a=1{,}2(10\,b+a)=12\,b+1{,}2a,$$

de modo que $10\,a-1{,}2a=12\,b-b$, ou seja, $8{,}8\,a=11\,b$. Assim,

$$b=\frac{8{,}8}{11}\times a=\frac{4}{5}\times a.$$

Como a e b são algarismos, só podemos ter $a = 5$ e $b = 4$ e decorre que o novo preço é R$ 54,00.

207. ***Gatos no condomínio*** – Sejam x o número de famílias que possuem apenas um ou exatamente cinco gatos e y o número de famílias que possuem exatamente três gatos. Segue que $x + y + x = 29$ e, portanto, $2x + y = 29$. Como o número de gatos é $x + 3y + 5x = 6x + 3y$, obtemos

$$\text{número de gatos} = 6x + 3y = 3(2x + y) = 3 \times 29 = 87.$$

208. ***Soma constante*** – Sejam a, b, c, d, e e f os números que falta preencher na tabela, ou seja, consideremos a tabela $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & a & 2 \\ \hline b & 9 & c \\ \hline d & e & f \\ \hline\end{array}$. Nas quatro subtabelas 2×2 que podemos formar, a saber,

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & a \\ \hline b & 9 \\ \hline\end{array}\,, \quad \begin{array}{|c|c|}\hline a & 2 \\ \hline 9 & c \\ \hline\end{array}\,, \quad \begin{array}{|c|c|}\hline b & 9 \\ \hline d & e \\ \hline\end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 9 & c \\ \hline e & f \\ \hline\end{array}\,,$$

devemos ter

$$\begin{cases} 1 + a + b + 9 = a + 2 + 9 + c \\ 1 + a + b + 9 = b + 9 + d + e \\ a + 2 + 9 + c = 9 + c + e + f \end{cases} \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} b - 1 = c \\ a + 1 = d + e \\ a + 2 = e + f \end{cases}$$

Subtraindo a segunda igualdade obtida da terceira, obtemos $1 = f - 1$, ou $f = 1 + d$. A nossa tabela, então, é dada como segue.

1	a	2
b	9	$b - 1$
d	e	$d + 1$

Para os números a, b, c, d, e e f temos apenas as opções 3, 4, 5, 6, 7 e 8, sem repetição. Se $a = 3, 4$ ou 5, resulta $d + e = a + 1 = 4, 5$ ou 6, o que é impossível para inteiros distintos d e e maiores do que 2. Se $a = 7$, resulta $d + e = a + 1 = 8$ e poderíamos ter $(d, e) = (3, 5)$ ou $(5, 3)$. Se $d = 3$, então $e = 5$, $f = d + 1 = 4$ e, necessariamente, $b = 6$ ou 8: no entanto, isso é impossível, pois implicaria $c = b - 1 = 5 = e$ ou $c = b - 1 = 7 = a$.

Assim, a não pode ser 3, 4, 5 nem 6, restando, apenas, as alternativas $a = 6$ ou $a = 8$. Usando as relações $a + 1 = d + e$ e $c = b - 1$, obtemos as duas únicas opções de preenchimento da tabela dada, como segue.

1	6	2
8	9	7
4	3	5

e

1	8	2
5	9	4
6	3	7

209. ***Qual é o número?*** – Note que $5 \times E$ é um múltiplo de 5 e no caso, terminado em A. Como A não pode ser 0, segue que $A = 5$ e E é ímpar. Observe que E não pode ser 1, pois, nesse caso, $4D = 5$, o que é impossível para algarismos. Logo, $E = 3, 5, 7$ ou 9. Analisemos cada uma dessas possibilidades.

Se $E = 3$, então $4D + 1$ termina em 5 e, portanto, $D = 1$ ou $D = 6$;

se $E = 5$, então $4D + 2$ é par e termina em 5, o que é impossível;

se $E = 7$, então $4D + 3$ termina em 5 e, portanto, $D = 3$ ou $D = 8$;

Se $E = 9$, então $4D + 4$ é par e termina em 5, o que é impossível.

Restam, então, os quatro casos seguintes, de acordo com (D, E) ser dado por (1, 3), (6, 3), (3, 7) ou (8, 7).

$$
\begin{array}{r}
5\,B\,C\,1\,3\\
B\,C\,1\,3\\
C\,1\,3\\
1\,3\\
3\\
\hline
5\,5\,5\,5\,5
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
5\,B\,C\,6\,3\\
B\,C\,6\,3\\
C\,6\,3\\
6\,3\\
3\\
\hline
5\,5\,5\,5\,5
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
5\,B\,C\,3\,7\\
B\,C\,3\,7\\
C\,3\,7\\
3\,7\\
7\\
\hline
5\,5\,5\,5\,5
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
5\,B\,C\,8\,7\\
B\,C\,8\,7\\
C\,8\,7\\
8\,7\\
7\\
\hline
5\,5\,5\,5\,5
\end{array}
$$

1º Caso: Se $D = 1$ e $E = 3$, então $3C$ termina em 5 e, como C denota um algarismo, a única opção é $C = 5 = A$, o que não pode ocorrer.

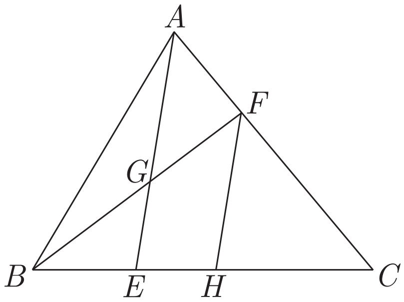
2º Caso: Se $D = 6$ e $E = 3$, então $3C + 2$ termina em 5, portanto, $3C$ termina em 3. Como C denota um algarismo, a única opção é $C = 1$, resultando $2B = 5$, o que é impossível para um algarismo.

3º Caso: Se $D = 3$ e $E = 7$, então $3C + 1$ termina em 5, portanto, $3C$ termina em 4. Como C denota um algarismo, a única opção é $C = 8$, resultando $2B + 2 = 5$, o que é impossível.

4º Caso: Se $D = 8$ e $E = 7$, então $3C + 3$ termina em 5, portanto, $3C$ termina em 2. Como C denota um algarismo, a única opção é $C = 4$, resultando $2B + 1 = 5$, com o que $B = 2$.

Assim, a única solução é $A\,B\,C\,D\,E = 52\,487$.

210. ***Proporção triangular*** – Escolhamos o ponto H do segmento BC de tal modo que o segmento FH seja paralelo ao segmento AE, como na figura dada. Decorre que os triângulos $\triangle AEC$ e $\triangle FHC$ são semelhantes, pois têm lados paralelos.



Como $FC = 2\,AF$, decorre, por semelhança, que também $HC = 2\,EH$. Por outro lado, os triângulos $\triangle BHF$ e $\triangle BEG$ também são semelhantes, pois têm lados paralelos. Dessa semelhança e do fato de G ser o ponto médio do segmento BF, concluímos que E é o ponto médio do segmento BH. Assim, $BE = EH$ e, portanto,

$$EC = EH + HC = EH + 2\,EH = 3\,EH = 3\,BE.$$

Consequentemente, $EC/BE = 3$.

211. ***Números primos entre si*** – Temos $2000 = 16 \times 125 = 2^4 \times 5^3$,

$$N = 2000\Big(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\Big) = 16 \times 125\Big(\frac{x^2+y^2}{xy}\Big) = \frac{16 \times 125}{xy} \times (x^2+y^2)$$

é um inteiro ímpar e $x < y$ são inteiros positivos primos entre si.

Solução 1: Como x e y são primos entre si, é possível mostrar que xy e x^2+y^2 não têm fatores primos em comum (prove isso), de modo que xy divide 2 000 e, portanto, x e y dividem 2 000. Além disso, 16 deve dividir xy, porque N é ímpar. Como x e y são primos entre si, 16 divide x ou y.

1º Caso: Se 16 divide x, então $x = 16$. De fato, se $x > 16$, então x é, no mínimo, $16 \times 5 = 80$, pois x divide 2 000; como também xy divide 2 000, resultaria que $y \leq 25 < 80 = x$, o que não é permitido. Logo $x = 16$ e, como x e y são primos entre si e y divide 2 000, necessariamente $y = 25$ ou 125.

2º Caso: Se 16 divide y, uma possibilidade é $y = 16$, quando x só pode ser 1 ou 5, pois $x < y$ e xy divide 2 000. As outras opções para y são 16×5, 16×25 ou 2 000, quando a única opção para x é, sempre, 1.

Assim, existem sete soluções, a saber,

$$(16, 25),\ (16, 125),\ (1, 16),\ (5, 16),\ (1, 80),\ (1, 400) \text{ e } (1, 2\,000).$$

Solução 2: Como N é um inteiro ímpar, resulta que $(2^4 \times 5^3)/(xy)$ e x^2+y^2 são inteiros ímpares. As opções para xy são $2^4, 2^4 \times 5, 2^4 \times 5^2$ e $2^4 \times 5^3$. Além disso, x e y devem ter paridades distintas, para garantir que x^2+y^2 seja ímpar. Vamos determinar x e y para cada uma dessas opções, lembrando que $x < y$.

xy	x	y
2^4	1	2^4
$2^4 \times 5$	1	$2^4 \times 5$
	5	2^4
$2^4 \times 5^2$	1	$2^4 \times 5^2$
	2^4	5^2
$2^4 \times 5^3$	1	$2^4 \times 5^3$
	2^4	5^3

Assim, existem sete soluções, a saber,

$$(1, 16),\ (1, 80),\ (5, 16),\ (1, 400),\ (16, 25),\ (1, 2\,000) \text{ e } (16, 125).$$

212. ***Fique atento*** – Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, obtemos $x = x^2 - 4x + 4$, que é equivalente a $x^2 - 5x + 4 = 0$. As raízes dessa equação do segundo grau são $x = 1$ e $x = 4$. Quando substituímos $x = 4$ na equação original $\sqrt{x} = x - 2$, obtemos $\sqrt{4} = 2$, que é uma afirmação verdadeira. Entretanto, quando substituímos $x = 1$ naquela equação, obtemos $\sqrt{1} = -1$, que é falsa. Portanto, a equação dada possui a única solução $x = 4$.

Observação: O aparecimento da "solução estranha" $x = 1$ deve-se ao fato seguinte: a afirmação

$$a^2 = b^2 \quad \Longrightarrow \quad a = b$$

não é verdadeira. O que é correto é a afirmação

$$a^2 = b^2 \quad \Longrightarrow \quad a = \pm b.$$

Desse modo, quando elevamos os dois membros de uma equação ao quadrado, obtemos uma nova equação que pode, eventualmente, conter mais soluções que a equação original. Você pode ver isso com clareza, por exemplo, nas equações $x = 1$ e $x^2 = 1^2$.

213. ***Soluções inteiras*** – A equação original pressupõe $x \neq 0$ e $y \neq 0$, portanto, podemos considerar a equação equivalente

$$xy = 19(x+y), \qquad \text{com} \quad x \neq 0,\ y \neq 0.$$

Uma vez que estamos procurando soluções inteiras e 19 é um número primo, essa igualdade implica que x ou y deve ser divisível por 19. Como a equação é simétrica em relação às variáveis x e y, podemos supor que x é divisível por 19, ou seja, $x = 19\,k$, para algum valor $k \neq 0$ inteiro. Assim, a equação original também é equivalente a

$$k\,y = 19\,k + y, \qquad \text{com} \quad k \neq 0,\ y \neq 0.$$

Dessa igualdade, obtemos que $19k + y$ é divisível por k. Uma vez que $19k$ já é divisível por k, concluímos que y é divisível por k (prove isso), isto é, $y = km$, para algum valor $m \neq 0$ inteiro. Segue que

$$k\,k\,m = k\,y = 19\,k + y = 19\,k + k\,m = (19+m)k,$$

ou seja, $k\,m = 19 + m$, que é igual a $19 = (k-1)\,m$. Desse modo estabelecemos que os inteiros m e $k-1$ são divisores do numero primo 19. Como $k \neq 0$, segue que $k-1 \neq -1$, o que nos deixa com três opções apenas, como segue.

- Se $m = 19$ e $k - 1 = 1$, então $x = 38$ e $y = 38$;
- Se $m = 1$ e $k - 1 = 19$, então $x = 380$ e $y = 20$;
- Se $m = -1$ e $k - 1 = -19$, então $x = -342$ e $y = 18$.

Desse modo, por simetria, obtemos os únicos cinco pares de números inteiros (x, y) que são soluções da equação dada:

$$(38, 38),\ (380, 20),\ (-342, 18),\ (20, 380) \quad \text{e} \quad (18, -342).$$

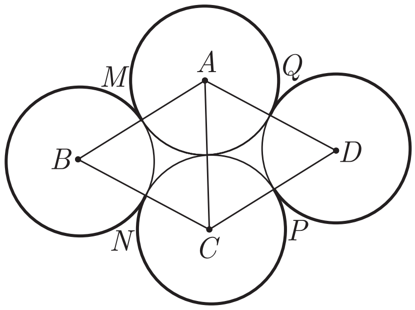
214. ***No ponto de ônibus*** – Representemos por M o número de meninas e por H o número de meninos que estavam no ponto antes de passar o primeiro ônibus. Depois do embarque das 15 meninas no primeiro ônibus, ficaram $M - 15$ meninas e H meninos no ponto. Uma vez que, nesse momento, ficaram dois meninos para cada menina no ponto, temos $H = 2(M - 15)$. No segundo ônibus, embarcam 45 meninos e ficaram $M - 15$ meninas e $H - 45$ meninos no ponto. Como, nesse momento, ficaram no ponto cinco meninas para cada menino, temos $M - 15 = 5(H - 45)$. Assim, obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} H = 2(M - 15) \\ M - 15 = 5(H - 45) \end{cases}$$

Substituindo a primeira equação na segunda, resulta $M - 15 = 5(2M - 30 - 45) = 10\,M - 375$.

Logo, $9\,M = 360$, de modo que $M = 40$ e $H = 2(40 - 15) = 50$.

215. ***Contorno circular*** – Sejam A, B, C e D os centros dos quatro círculos e M, N, P e Q os pontos de tangência entre esses círculos, conforme figura.



Observe que $AD = DC = CB = BA = AC = 2a$. Logo, os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ACD$ são equiláteros e, por isso, seus ângulos internos são iguais a 60º. Portanto, $A\widehat{B}C = 60^{\circ} = \dfrac{1}{6}360^{\circ}$ e $D\widehat{A}B = 120^{\circ} = \dfrac{1}{3}360^{\circ}$, o que acarreta que os arcos dos contornos internos a esses dois ângulos medem

$$N\overset{\frown}{M} = \frac{1}{6} \times 2\pi\, a \quad \text{e} \quad M\overset{\frown}{Q} = \frac{1}{3} \times 2\pi\, a$$

e os contornos externos por B e A, de traçado destacado, medem $\dfrac{5}{6} \times 2\pi\, a$ e $\dfrac{2}{3} \times 2\pi\, a$, respectivamente. Por simetria, segue que o contorno externo da figura dada tem comprimento igual a

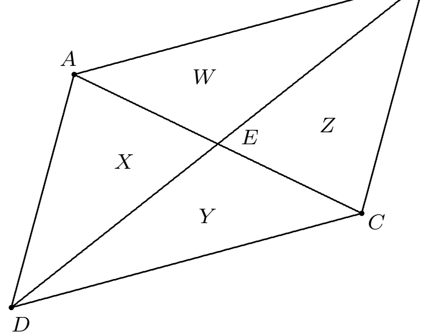
$$\left(2 \times \frac{5}{6} + 2 \times \frac{2}{3}\right) 2\pi\, a = 6\pi\, a.$$

216. ***Um quadrilátero especial*** – Como cada diagonal divide o quadrilátero em duas regiões de mesma área, temos

$$\text{Área } (\triangle ABD) = \text{Área } (\triangle BCD) \quad \text{e} \quad \text{Área } (\triangle ABC) = \text{Área } (\triangle ACD).$$

Denotemos as áreas das quatro regiões determinadas pelas diagonais por X, Y, Z e W, conforme a figura, de modo que

$$\begin{aligned} \text{Área } (\triangle ABD) &= X + W, \\ \text{Área } (\triangle BCD) &= Y + Z, \\ \text{Área } (\triangle ABC) &= Z + W \text{ e} \\ \text{Área } (\triangle ADC) &= X + Y. \end{aligned}$$



Assim,

$$\begin{aligned} Z - X &= \text{Área } (\triangle ABC) - \text{Área } (\triangle ABD) \\ &= \text{Área } (\triangle ACD) - \text{Área } (\triangle BCD) = X - Z \end{aligned}$$

e, portanto, $Z = X$. Consequentemente, também temos $Y = W$. Seja E o ponto de corte das diagonais. Como as áreas das regiões opostas por E são iguais, resulta da semelhança de triângulos que $EA \times ED = EB \times EC$ e $EA \times EB = EC \times ED$.

Dividindo essas duas equações, obtemos

$$\frac{ED}{EB} = \frac{EB}{ED},$$

portanto, $ED = EB$. Analogamente, podemos mostrar que $EA = EC$. Logo, as diagonais se cortam no ponto médio e, consequentemente, o quadrilátero é um paralelogramo. Como os lados medem 10 e 15 cm, o perímetro do quadrilátero mede $2 \times 10 + 2 \times 15 = 50$ cm.

217. ***Número curioso*** – Seja $a\,b = 10\,a + b$ um número de dois algarismos a e b que é divisível pela soma $a + b$ de seus algarismos. Note que, por ser de dois algarismos, necessariamente $a \neq 0$ e que, por ser divisível pela soma de seus algarismos, também a diferença $(10\,a + b) - (a + b) = 9a$ é divisível por $a + b$ (prove isso). Assim, basta atribuir os valores 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 a a e calcular os valores de b para os quais $a + b$ divide $9\,a$. O resultado aparece na tabela.

a	$9a$	b
1	9	0, 2, 8
2	18	0, 1, 4, 7
3	27	0, 6
4	36	0, 2, 5, 8
5	45	0, 4
6	54	0, 3
7	63	0, 2
8	72	0, 1, 4
9	81	0

Assim, os números que satisfazem a propriedade são

$$10, 12, 18, 20, 21, 24, 27, 30, 36, 40, 42, 45, 48, 50, 54, 60, 63, 70, 72, 80, 81, 84 \text{ e } 90,$$

ou seja, existem 23 números "curiosos."

218. ***Número premiado***

(a) O maior número premiado de seis algarismos distintos precisa começar com 98, portanto, o número procurado é da forma $98\,c\,d\,e\,f$. Por hipótese, temos $9+8+c = d+e+f$. Para que c seja máximo, precisamos que $d+e+f$ seja máximo, e isso acontece quando $d = 7, e = 6$ e $f = 5$. Nesse caso, $c = 1$ e, consequentemente, o maior número premiado é 981 765. Para determinar o menor número premiado de seis algarismos distintos, tentamos um número da forma $10\,c\,d\,e\,f$. Não é difícil verificar que 108.234 é o menor número premiado.

(b) Dado qualquer número premiado $a\,b\,c\,d\,e\,f$ de seis algarismos distintos, seu par simétrico $d\,e\,f\,a\,b\,c$ também é premiado e tem seis algarismos distintos; a soma desse par simétrico é

$$\begin{aligned} a\,b\,c\,d\,e\,f + d\,e\,f\,a\,b\,c &= (1000\,a\,b\,c + d\,e\,f) + (1000\,d\,e\,f + a\,b\,c) \\ &= 1001(a\,b\,c + d\,e\,f) = 13 \times 11 \times 7 \times (a\,b\,c + d\,e\,f), \end{aligned}$$

que é divisível por 13. Assim, a soma de todos esses pares simétricos também é divisível por 13. Como a soma de todos esses pares de números premiados simétricos é igual à soma de todos os números premiados de seis algarismos distintos, resulta que essa soma é divisível por 13.

Observação: De fato, a soma de todos os números premiados de seis algarismos distintos também é divisível por 7 e por 11.

219. ***Altura versus lado*** – Sejam h_a e h_c as alturas relativas aos lados $BC = a$ e $AB = c$, respectivamente. Por hipótese, temos que $h_a \geq a$ e $h_c \geq c$. Como h_a e h_c são os comprimentos das alturas, pelo Teorema de Pitágoras temos $h_a \leq c$ e $h_c \leq a$. Um dos lados considerados é maior do que ou igual ao outro, digamos, $a \geq c$. Das desigualdades acima, obtemos $h_a \geq a \geq c \geq h_a$ e, portanto, $a = c = h_a$. Assim, AB é perpendicular a BC e, portanto, o triângulo é retângulo isósceles. Concluímos que os ângulos do triângulo medem $45°, 45°$ e $90°$.

220. ***Frações egípcias*** – A equação original pressupõe $x \neq 0, y \neq 0$ e pede soluções inteiras, positivas e distintas, portanto, podemos considerar a equação equivalente

$$2xy = 7(x + y), \qquad \text{com} \quad x > 0,\ y > 0 \text{ e } x \neq y.$$

Como 2 e 7 são números primos, segue que 7 divide x ou y. Como a equação é simétrica em x e y, podemos supor que 7 divide x. Então, $x = 7\,k$, para algum $k > 0$ inteiro e decorre que $2 \times 7\,k\,y = 7(7\,k + y)$, ou seja, simplificando, $2\,k\,y = 7\,k + y$ ou, ainda,

$$(2k - 1)\,y = 7\,k = x.$$

Se 7 dividisse y, teríamos $y = 7\,m$, para algum $m > 0$ inteiro. Nesse caso, teríamos $49 \times 2\,k\,m = 2xy = 7(x + y) = 49(k + m)$, acarretando $2\,k\,m = k + m$. Mas, então

$$2 = \frac{k + m}{km} = \frac{1}{k} + \frac{1}{m} \leq 1 + 1 = 2,$$

o que significa que $k = m = 1$ e, portanto, $x = 7 = y$. Como queremos $x \neq y$, concluímos que 7 não divide y, de modo que 7 divide $2k - 1$. Tomando $k = 4$, resulta $x = 28$ e

$$y = \frac{7\,k}{2k - 1} = \frac{28}{7} = 4,$$

fornecendo a solução

$$\frac{1}{28} + \frac{1}{4} = \frac{2}{7}\,.$$

Observação: A solução obtida é única. De fato, como $2k - 1$ é, sempre, ímpar e 7 divide $2k - 1$, o múltiplo de 7 que é igual a $2k - 1$ deve ser ímpar. Assim, existe algum inteiro $n > 0$ tal que

$$7(2n - 1) = 2k - 1.$$

Isso acarreta que $k = 7n - 3$ e, portanto,

$$y = \frac{7k}{2k-1} = \frac{7(7n-3)}{7(2n-1)} = \frac{7n-3}{2n-1} = \frac{3(2n-1)+n}{2n-1} = 3 + \frac{n}{2n-1}\,.$$

Como y deve ser inteiro, concluímos que $2n-1$ divide n, de modo que $2n-1 \leq n$. No entanto, $n \geq 1$ e, portanto, $2n-1 \geq n$. A única possibilidade é $2n-1 = n$ e, portanto, $n = 1$. Segue que $k = 4 = b$ e $a = 28$ dão a única solução.

221. ***Tabuleiro de xadrez*** – Um tabuleiro de xadrez é um quadrado reticulado de 64 quadradinhos, denominados casas, sendo 32 casas pretas e 32 brancas, posicionados alternadamente. Uma das peças do xadrez recebe o nome de bispo, havendo um par deles para cada jogador. Um dos dois bispos de um jogador só se movimenta pelas casas pretas e o outro só pelas brancas.

Inicialmente, é possível colocar um dos dois bispos em qualquer uma das 64 casas. Se o bispo estiver numa casa branca, então na fila em que ele está, bem como na coluna, temos quatro casas pretas que não podem ser ocupadas pelo segundo bispo, num total de oito casas. Assim, o segundo bispo pode ser colocado em qualquer uma das $32 - 8 = 24$ casas pretas restantes.

NOTA: Aqui estamos entendendo que alternando a posição desses dois bispos não muda a configuração no tabuleiro de xadrez. Mais precisamente, os bispos têm a mesma cor, isto é, pertencem a um mesmo jogador.

Concluímos, então, que se um dos bispos ocupar uma das 32 casas brancas, então o outro terá 24 casas pretas à disposição. Portanto, o número dessas configurações distintas que podem ser obtidas é $32 \times 24 = 768$.

222. ***Quem é menor?*** – Observemos que:

$$\begin{array}{lcl} 33^{12} & > & 32^{12} & = & (2^5)^{12} = 2^{60}; \\ 63^{10} & < & 64^{10} & = & (2^6)^{10} = 2^{60}; \\ 127^8 & < & 128^8 & = & (2^7)^8 = 2^{56} < 2^{60}\,. \end{array}$$

Logo, o maior dos números é 33^{12}. Por outro lado, $\dfrac{127}{63} = 2 + \dfrac{1}{63}$ garante que

$$\left(\frac{127}{63}\right)^2 = \left(2 + \frac{1}{63}\right)^2 = 4 + \frac{4}{63} + \frac{1}{63^2} < 4 + \frac{5}{63} < 5$$

e, portanto,

$$\left(\frac{127}{63}\right)^4 < 25 < 63.$$

Assim, $127^4 < 63^5$, acarretando $127^8 < 63^{10}$. O menor dos três números dados é 127^8.

223. ***Brincando com números*** – Como queremos encontrar o maior número que seja divisível pela soma de seus algarismos e também menor do que 900, podemos começar nossa busca dentre os números com o algarismo 8 na casa da centena, já que, no mínimo, 800 é divisível pela soma $8 + 0 + 0 = 8$ de seus algarismos e 899 não tem essa propriedade. Assim, vamos examinar os números entre 800 e 899.

Queremos, então, encontrar algarismos b e c tais que $8 + b + c$ divida $8\,b\,c = 800 + 10b + c$. Lembrando que $8 + b + c$ divide $8\,b\,c = 800 + 10b + c$ se, e somente se, $8+b+c$ divide $800+10b+c-(8+b+c)=792+9b$, basta procurar entre os divisores de $792+9b$. Para isso, atribuímos valores para b em ordem decrescente, a partir de 9, até encontrar o maior número procurado.

- Se $b=9$, então $792+9\times 9=873=9\times 97$ e esse número não possui divisor $8+9+c$ entre 17 ($c=0$) e 26 ($c=9$).
- Se $b=8$, então $792+9\times 8=864=2^5\times 3^3$. O maior divisor $8+b+c$ desse número entre 16 e 25 é 24, isto é, $c=8$.

Logo, o número procurado é 888.

224. ***Cortando papéis*** – Se na primeira rodada André pega n_1 pedaços de papel para cortar cada um deles em sete pedaços, ao final dessa rodada ele ficará com $7-n_1$ pedaços sem cortar, mais $7n_1$ pedaços cortados, totalizando $(7-n_1)+7n_1=7+6n_1$ pedaços de papel. Analogamente, se na segunda rodada André pega n_2 pedaços de papel para cortar, ao final dessa rodada ele ficará com $7+6n_1-n_2$ pedaços que não foram cortados nessa rodada, mais $7n_2$ pedaços de papel provenientes dos cortes que ele fez nessa rodada. Assim, ao final da segunda rodada, André ficará com

$$(7+6n_1-n_2)+7n_2=7+6(n_1+n_2).$$

Continuando assim, conclui-se que, ao final de k rodadas, André fica com

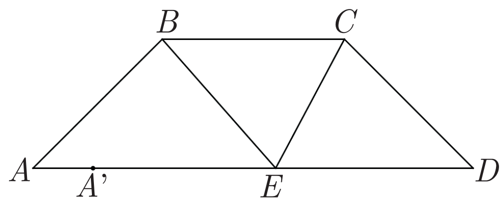
$$7+6(n_1+n_2+\cdots+n_k)$$

pedaços de papel. Então, para ele ficar com 2 009 pedaços de papel ao final de alguma rodada, deveríamos ter essa última expressão igual a 2 009 ou, equivalentemente, subtraindo 7 de cada lado, $6(n_1+n_2+\cdots+n_k)=2\,002$.

No entanto, 2 002 não é um mútiplo de 6, de modo que essa equação não admite solução. Isso significa que André nunca poderá ficar com 2 009 pedaços ao final de alguma rodada de sua brincadeira.

225. ***Um trapézio especial*** – Queremos provar que AE é igual a BC. Para isso, suponhamos que AE seja maior do que BC e escolhamos o ponto A' sobre AE tal que $EA'=BC$. Por construção, EA' e BC são paralelos, de modo que $A'BCE$ é um paralelogramo e, em particular,

$$A'B=CE.$$



Pela desigualdade triangular, temos

$$A'A+AB>A'B.$$

Logo,

$$\begin{aligned}EA+AB+BE&=EA'+A'A+AB+BE\\&>EA'+A'B+BE=BC+CE+EB.\end{aligned}$$

Disso decorre que o perímetro do triângulo $\triangle ABE$ é maior do que o perímetro do triângulo $\triangle BCE$, contrário aos dados do problema.

Por meio dessa contradição, estabelecemos que, diante das hipóteses do problema, AE não pode ser maior do que BC. Por um processo totalmente análogo, também podemos estabelecer que, reciprocamente, BC não pode ser maior do que AE, com o que concluímos que $BC = AE$. O mesmo raciocínio pode ser utilizado para mostrar que $BC = ED$. Assim,

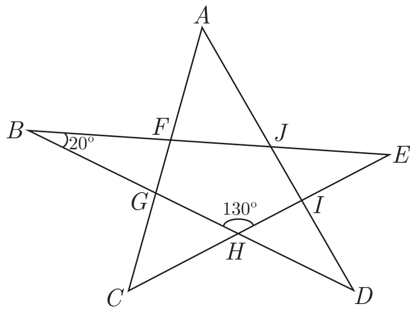
$$BC = \tfrac{1}{2}(AE + ED) = 15\,\text{cm}.$$

226. ***Uma estrela*** – Observe que $J\widehat{E}I = B\widehat{E}H$. No triângulo $\triangle BEH$ temos

$$20^{\circ} + 130^{\circ} + B\widehat{E}H = 180^{\circ},$$

portanto,

$$J\widehat{E}I = B\widehat{E}H = 30^{\circ}.$$



227. ***Número palíndromo*** – Um número *palíndromo* de quatro algarismos é da forma $a\,b\,b\,a$, onde a é um algarismo entre 1 e 9 e b é um algarismo entre 0 e 9. Como o número é divisível por 9, então a soma $2a + 2b = 2(a + b)$ de seus algarismos é divisível por 9, ou seja, $a + b$ é divisível por 9. Como $1 \leq a + b \leq 18$, as únicas opções são $a + b = 9$ ou 18. Se $a + b = 18$, necessariamente $a = b = 9$. Se $a + b = 9$, temos as nove soluções seguintes.

$$\begin{array}{lll} a=1 \text{ e } b=8 & a=2 \text{ e } b=7 & a=3 \text{ e } b=6 \\ a=4 \text{ e } b=5 & a=5 \text{ e } b=4 & a=6 \text{ e } b=3 \\ a=7 \text{ e } b=2 & a=8 \text{ e } b=1 & a=9 \text{ e } b=0 \end{array}$$

Assim, existem dez números palíndromos de quatro algarismos divisíveis por 9, a saber, 1 881, 2 772, 3 663, 4 554, 5 445, 6 336, 7 227, 8 118, 9 009 e 9 999.

228. ***Multiplicação com letras*** – Como o produto de b por c termina em 1, então $b \times c$ pode ser 21 ou 81 e, portanto, 3×7 ou 9×9. A única possibilidade de escrever o produto de dois números distintos menores do que 10 é $21 = 3 \times 7$. Assim, temos somente dois casos possíveis.

1º Caso: Se $b = 7$ e $c = 3$, deveríamos ter

$$\begin{array}{r} a\,7\,7 \\ \times\quad 3 \\ \hline 7\,3\,7\,1 \end{array}$$

mas isso é impossível, pois, $\dfrac{7371}{3} = 2457$ tem quatro algarismos.

2º Caso: Se $b = 3$ e $c = 7$, temos

$$\begin{array}{r} a\,3\,3 \\ \times\quad 7 \\ \hline 3\,7\,3\,1 \end{array}$$

e, como $\dfrac{3731}{7} = 533$, necessariamente $a = 5$.
Logo, a única possibilidade é $a = 5$, $b = 3$ e $c = 7$.

229. ***Números sortudos***

(a) A sequência de oito números consecutivos de 52 a 59 tem, exatamente, dois números sortudos: 52 e 59. Outro exemplo é qualquer sequência de oito números que contenha 59 e 61, por exemplo, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62.

(b) Dois exemplos são $994, \ldots, 1\,005$ e $7\,994, \ldots, 8\,005$. Existem mais: encontre alguns.

(c) Digamos que uma *década* é qualquer sequência de dez números consecutivos cujo primeiro termo é algum múltiplo de 10. Por exemplo,

$$10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18,\ 19$$

e

$$140,\ 141,\ 142,\ 143,\ 144,\ 145,\ 146,\ 147,\ 148,\ 149$$

são décadas. Note que qualquer sequência de sete números consecutivos numa década contém, pelo menos, um número sortudo, porque a soma de seus algarismos é uma sequência de sete números consecutivos, um dos quais precisa ser divisível por 7. Finalmente, qualquer sequência de treze números consecutivos contém pelo menos sete números consecutivos de alguma década, que sempre contém um número sortudo. (Examine alguns exemplos para melhor entender essa justificativa.)

230. ***Uma sequência especial*** – Inicialmente escrevemos os primeiros termos dessa sequência, como segue.

$$1,\ 3,\ 2,\ -1,\ -3,\ -2,\ 1,\ 3,\ 2, \ldots$$

O sétimo e o oitavo termos são, respectivamente, iguais ao primeiro e ao segundo. Isso significa que a sequência se repete de seis em seis termos. A soma dos seis primeiros termos é $1+3+2-1-3-2 = 0$ e, portanto, a soma dos 96 primeiros termos também é 0. Assim, a soma dos 100 primeiros termos dessa sequência é igual à soma dos quatro últimos termos, ou seja, $1+3+2-1 = 5$.

231. ***Triângulos e ângulos...*** – No triângulo menor, dois ângulos medem 70° e $180° - 130° = 50°$ e o terceiro mede

$$180° - (50° + 70°) = 60°.$$

Assim,

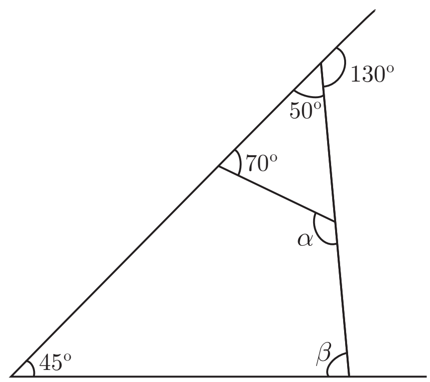
$$\alpha = 180° - 60° = 120°.$$

Agora, no triângulo maior, temos

$$45° + \beta + 50° = 180°,$$

portanto,

$$\beta = 180° - 95° = 85°.$$



Soluções do Nível 3

1. ***Usando velas*** – A opção correta é (d).

   Com 43 velas a casa de João pode ser iluminada por 43 noites, sobrando 43 tocos de vela. Como $43 = 4 \times 10 + 3$, com esses 43 tocos pode-se guardar 3 tocos e fazer 10 novas velas para iluminar 10 noites. Dessas 10 velas obtemos 10 tocos que, com os 3 que haviam sobrado, dão 13 tocos. Como $13 = 4 \times 3 + 1$, com esses 13 tocos pode-se guardar 1 toco e fazer 3 novas velas para iluminar 3 noites. Dessas 3 velas obtemos 3 tocos que, com o que havia sobrado, dão 4 tocos, com os quais podemos fazer mais uma vela. Assim, no total, a casa de João pode ser iluminada por $43+10+3+1 = 57$ noites.

2. ***Rodas e bandeiras*** – A opção correta é (a).

   Os dois discos giram em sentidos opostos; quando um gira no sentido horário o outro gira no sentido anti-horário. Considerando que a engrenagem da esquerda girou um certo ângulo em um sentido, a engrenagem da direita girou o mesmo ângulo no sentido oposto, e portanto a bandeirinha ficou na posição mostrada na opção (a).

3. ***Número de latas*** – A opção correta é (a).

   Em cada caixote de madeira de dimensões $a \times b \times c$ cabem $(a \times b \times c)/l^3$ cubos de lado l, empilhados regularmente. No caso dos palmitos temos, em centímetros, $a = 60, b = 80, c = 120$ e $l = 20$. Como 60, 80 e 120 são múltiplos de 20, podemos preencher o caixote, sem deixar espaços, com $(60\times80\times120)/20^3 = 72$ caixas de papelão de formato cúbico com 20 cm de lado. Logo, em cada caixote cabem $72 \times 8 = 576$ latas de palmito.

4. ***Qual é a menor fração?*** – A opção correta é (c).

   Solução 1: As frações da forma $\dfrac{n}{n+1}$, com n inteiro positivo, são

$$\underbrace{\frac{1}{2}}_{n=1}, \underbrace{\frac{2}{3}}_{n=2}, \underbrace{\frac{3}{4}}_{n=3}, \underbrace{\frac{4}{5}}_{n=4}, \underbrace{\frac{5}{6}}_{n=5}, \ldots.$$

   Observe que temos $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \ldots$, ou seja, essa sequência de frações é crescente. Para comparar cada uma dessas frações com 7/9, precisamos igualar todos os denominadores, obtendo $\frac{1}{2} = \frac{9}{18} < \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$, $\frac{2}{3} = \frac{6}{9} < \frac{7}{9}$, $\frac{3}{4} = \frac{27}{36} < \frac{28}{36} = \frac{7}{9}$ e $\frac{4}{5} = \frac{36}{45} > \frac{35}{45} = \frac{7}{9}$. Logo, $\frac{4}{5}$ é maior do que $\frac{7}{9}$ e, como a sequência é crescente, a partir de $\frac{4}{5}$, todas as frações dessa sequência são maiores do que $\frac{7}{9}$. Assim, existem apenas três frações da forma $\dfrac{n}{n+1}$ que são menores do que $\frac{7}{9}$, a saber, $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$.

   Solução 2: Transformando tudo em números decimais, temos $7/9 = 0{,}777\ldots$ e $1/2 = 0{,}5$, $2/3 = 0{,}666\ldots$, $3/4 = 0{,}75$, $4/5 = 0{,}8$, $5/6 = 0{,}8333\ldots$. Logo, a sequência é crescente e apenas $1/2 = 0{,}5$, $2/3 = 0{,}666\ldots$ e $3/4 = 0{,}75$ são menores do que $7/9 = 0{,}777\ldots$.

5. ***Pistas de corrida*** – A opção correta é (c).

Solução 1: Denotemos por x e y os comprimentos das pistas longa e curta, respectivamente. Numa certa semana, o atleta corre $6(x+2y)$ e, na outra, $7(x+y)$. Como nas duas semanas ele corre os mesmos 5 000 metros, obtemos $6(x+2y) = 7(x+y)$. Logo, $6x+12y = 7x+7y$ e, portanto, $5y = x$. Assim, a pista longa é cinco vezes maior do que a pista curta.

Solução 2: Na semana em que o atleta treinou durante sete dias, ele correu uma pista longa a mais e cinco pistas curtas a menos do que na semana em que ele treinou apenas seis dias. Como a distância corrida foi a mesma nas duas semanas, concluímos que o comprimento da pista longa é igual ao comprimento de cinco pistas curtas.

6. ***Brincos e brincos*** – A opção correta é (c).

Solução 1: Sabemos que o número de mulheres que usam apenas um brinco é $0{,}03 \times 800 = 24$. Restam $800 - 24 = 776$ mulheres, das quais 388 usam dois brincos e 388 não usam brincos. Logo, o número total de brincos usados por todas as mulheres é $24 + 388 \times 2 = 800$.

Solução 2: Se cada mulher com dois brincos emprestar um de seus brincos a uma das mulheres que não usam brincos, todas as 800 mulheres estarão com um único brinco. Logo, o número de brincos é igual ao de mulheres, ou seja, 800.

7. ***Perguntas e respostas*** – A opção correta é (e).

A partir da tabela obtemos o número de pontos de cada um dos três participantes.

$$\text{Ana: } 5 \times 12 + (-3) \times 3 + (-2) \times 5 = 60 - 9 - 10 = 41$$

$$\text{Bento: } 5 \times 13 + (-3) \times 7 + (-2) \times 0 = 65 - 21 = 44$$

$$\text{Lucas: } 5 \times 12 + (-3) \times 4 + (-2) \times 4 = 60 - 12 - 8 = 40$$

Logo, Bento foi o mais bem classificado, seguido de Ana e, depois de Lucas.

8. ***Qual é a carga?*** – A opção correta é (b).

Como o peso de um saco de areia é igual ao de oito tijolos e no caminhão já há 32 sacos de areia, ele pode carregar ainda 18 sacos de areia, o que equivale a $18 \times 8 = 144$ tijolos.

9. ***Quanto mede a cerca?*** – A opção correta é (b).

Entre o terceiro e o sexto poste, temos três espaços entre postes consecutivos. Logo, a distância entre dois postes consecutivos é $\frac{1}{3} \times 3{,}3$ m $= 1{,}1$ m e a distância entre o primeiro e o último poste é de $11 \times 1{,}1 = 12{,}1$ m.

10. ***Dízima periódica*** – A opção correta é (d).

Solução 1: Como $1/3 = 0{,}333\ldots$, segue que

$$0{,}1333\ldots = 0{,}333\ldots - 0{,}2 = \frac{1}{3} - \frac{2}{10} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}\,.$$

Solução 2: Usando simplesmente a regra que fornece a geratriz de uma dízima periódica, também podemos obter

$$0{,}1333\ldots = \frac{13-1}{90} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}\,.$$

11. ***Valor absoluto*** – A opção correta é (e).

Temos: $|5| = 5, |3-8| = |-5| = 5$ e $|-4| = 4$. Logo, $N = 5+5-4 = 6$.

12. ***O peso das frutas*** – A opção correta é (b).

A partir das informações fornecidas pelas três figuras, podemos montar três equações em que, informalmente, denotamos o peso de cada fruta pelo seu próprio nome.

$$\begin{aligned} \text{mamão} &= \text{banana} + \text{maçã} \\ \text{banana} + \text{mamão} &= 200 \\ \text{banana} + 200 &= \text{mamão} + \text{maçã} \end{aligned}$$

Somando a primeira com a terceira obtemos, após cancelamento, $2 \times$ maçã $= 200$, donde maçã $= 100$. Substituindo esse valor na primeira equação, obtemos mamão $=$ banana $+ 100$ e, substituindo na segunda equação, obtemos $2 \times$ banana $+ 100 = 200$, donde banana $= 50$. Esses valores fornecem, pela primeira equação, o valor mamão $= 150$. Assim, a soma dos pesos das frutas é $100 + 50 + 150 = 300$ gramas.

13. ***Maratona*** – A opção correta é (c).

O comprimento de uma circunferência de raio r é $2\pi r$. Assim, em cada volta André percorre $2\pi \times 100$ m $= 200\,\pi$ m. Logo, o número de voltas que André precisa dar para completar 42 km = 42.000 m é

$$\frac{42\,000}{200\,\pi} = \frac{210}{\pi}\,.$$

Agora podemos finalizar o problema de duas maneiras.

1ª) Como $3 < \pi < 4$, obtemos $\dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{\pi} < \dfrac{1}{3}$, portanto, multiplicando tudo por 210, resulta

$$52{,}5 = \frac{210}{4} < \frac{210}{\pi} < \frac{210}{3} = 70$$

e concluímos que André deve dar entre 52 e 70 voltas para percorrer os 42 km.

2ª) A aproximação de π até a segunda casa decimal é 3,14. Daí,

$$\frac{210}{\pi} \approx \frac{210}{3{,}14} \approx 66{,}88$$

e concluímos que André deve dar entre 66 e 67 voltas para percorrer os 42 km.

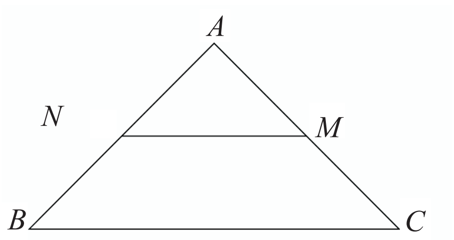
14. ***Dobrando papel*** – A opção correta é (e).

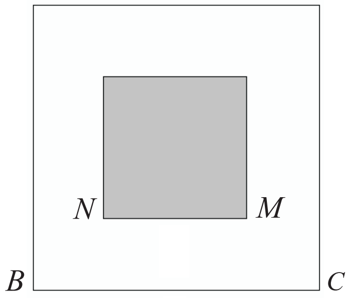
Solução 1: Denotemos por $\triangle ABC$ o triângulo obtido após dobrar o quadrado original ao longo das duas diagonais e seja MN o corte pela base média nesse triângulo, paralelo ao lado BC, que é um dos lados do quadrado original. A área do quadrado original é

$(BC)^2$. Desdobrando-se a folha, vemos que o buraco é um quadrado de lado MN e, como $MN = \dfrac{1}{2}BC$, sua área é

$$(MN)^2 = \left(\frac{1}{2}BC\right)^2 = \frac{1}{4}(BC)^2.$$

Logo, o buraco tem um quarto da área do quadrado original.





Solução 2: O corte é realizado pela base média do triângulo, retirando um pequeno triângulo semelhante ao original, com razão de semelhança $1/2$. Assim, a área do triângulo retirado é um quarto da área do triângulo original. Abrindo a folha, vemos essa situação reproduzida quatro vezes, donde o buraco tem um quarto da área do quadrado original.

15. ***Encontre o número*** – A opção correta é (a).

Para que $\dfrac{N}{3}, \dfrac{N}{4}, \dfrac{N}{5}, \dfrac{N}{6}$ e $\dfrac{N}{7}$ sejam números inteiros, N deve ser um múltiplo comum de 3, 4, 5, 6 e 7. Como queremos o menor N possível, ele deve ser o mínimo múltiplo comum (MMC) de 3, 4, 5, 6 e 7, ou seja,

$$N = 3 \times 4 \times 5 \times 7 = 420.$$

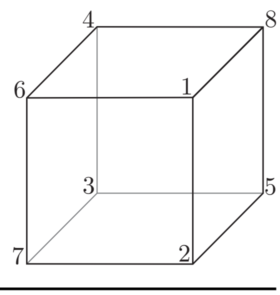
16. ***Equação quadrática*** – A opção correta é (d).

Solução 1: Como 3 e $\dfrac{1}{3}$ são raízes da equação $ax^2 - 6x + c = 0$, temos $9a - 18 + c = 0$ e $\dfrac{1}{9}a - 2 + c = 0$, ou seja, $9a + c = 18$ e $a + 9c = 18$. Somando essas duas equações, resulta $10(a + c) = 10a + 10c = 36$, ou seja, $a + c = 36/10 = 18/5$.

Solução 2: Numa equação $ax^2 + bx + c = 0$ do segundo grau, a soma das raízes é $-b/a$ e o produto é c/a. Como $b = -6$, obtemos $10/3 = 3 + \dfrac{1}{3} = 6/a$ e $1 = 3 \times \dfrac{1}{3} = c/a$, ou seja, $a = c = 9/5$. Assim, $a + c = 18/5$.

17. ***Cubo*** – A opção correta é (d).

Solução 1: Desenhando o cubo e numerando seus vértices de acordo com o enunciado da questão, obtemos uma figura em que podemos ver que o vértice 5, por ser diametralmente oposto, é o mais distante do vértice 6.



Solução 2: O vértice 6 está nas faces $\{1, 2, 6, 7\}$, $\{1, 4, 6, 8\}$ e $\{3, 4, 6, 7\}$. Como nessas faces só não aparece o 5, segue que este é o vértice diagonalmente oposto ao 6, ou seja, o 5 é o vértice mais distante do 6.

18. ***Time de basquete*** – A opção correta é (a).

    Basta ler o gráfico para obter o número de pontos de cada aluno. A soma desses pontos dá um total de $7 + 8 + 2 + 11 + 6 + 12 + 1 + 7 = 54$ pontos marcados pelo time.

19. ***O caminho da formiguinha*** – A opção correta é (e).

    Para cada um dos três caminhos para ir de A até B, existem três opções para ir de B a C. Logo, há um total de $3 \times 3 = 9$ possibilidades. Mais geralmente, se fossem m os caminhos de A até B e n os de B até C, então o número de caminhos que nossa formiguinha poderia tomar de A até C seria $m \times n$; esta afirmativa é um caso particular do *princípio multiplicativo.*

20. ***Operação*** ✠ – A opção correta é (a).

    Fazendo $a = 1$ e $b = 0$ em a ✠ $b = a^2 - ab + b^2$, obtemos 1 ✠ $0 = 1^2 - 1 \times 0 + 0^2 = 1$.

21. ***Indo para a escola*** – Os alunos da escola foram divididos em quatro grupos distintos, de acordo com o tempo que gastam no trajeto de casa para a escola. Cada uma das quatro barras do diagrama representa exatamente um desses quatro grupos e cada um dos alunos dessa escola está em exatamente um desses quatro grupos.

    (a) Os alunos que gastam menos de 20 minutos em seu trajeto de casa para a escola estão representados pela primeira barra, a mais alta, que atinge a marca dos 90. Logo, 90 alunos gastam menos do que 20 minutos para chegar à escola.

    (b) O total de alunos na escola é a soma dos números representados pelas quatro barras, portanto, a escola tem um total de $90 + 60 + 10 + 20 = 180$ alunos.

    (c) Os alunos que gastam mais do que 40 minutos estão repartidos em dois grupos: os que gastam de 41 a 60 minutos e os que gastam mais do que 60 minutos, representados pela terceira e quarta barras, as duas mais baixas, uma atingindo a marca dos 10 e a outra, a marca dos 20. Logo, o total de alunos que gastam mais do que 40 minutos para chegar à escola é de $10 + 20 = 30$ alunos.

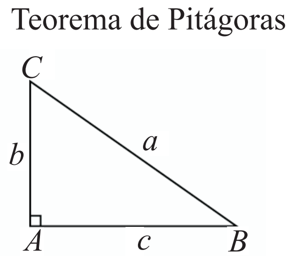
    (d) Os alunos que gastam entre 20 e 40 minutos em seu trajeto de casa para a escola estão representados pela segunda barra, que atinge a marca dos 60. Junto com os 30 alunos que gastam mais do que 40 minutos (item precedente), temos um total de $60 + 30 = 90$ alunos que gastam mais do que 20 minutos para chegar à escola. No primeiro item vimos que 90 alunos gastam menos do que 20 minutos para chegar à escola, que é o mesmo número dos que levam mais do que 20 minutos, ou seja, é a metade dos alunos da escola que leva mais do que 20 minutos. Concluímos que não é verdade que a maioria dos alunos gasta mais do que 20 minutos para chegar à escola.

22. ***Campeonato de futebol***

    (a) Cada uma das seis equipes disputou, com cada uma das outras cinco, exatamente uma partida. Portanto, foram disputadas um total de $\frac{1}{2}(6 \times 5) = 15$ partidas.

(b) Cada equipe disputou exatamente 5 partidas. Logo, de $x+1+0=5$ decorre $x=4$. Da mesma forma, para a equipe D temos $1+1+y=5$, portanto $y=3$. O número total de gols feitos num campeonato é igual ao número total de gols sofridos, ou seja, $6+6+2+3+1+z=2+6+6+6+5+3$, ou $18+z=28$, portanto, $z=10$.

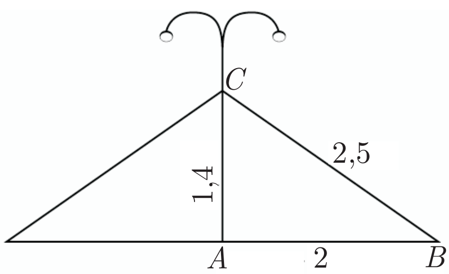
23. ***Poste elétrico*** – Nesta questão utilizamos o Teorema de Pitágoras. Antes de rever o enunciado desse teorema, lembre que um triângulo é dito retângulo quando um de seus ângulos é reto, ou seja, mede 90°. O lado oposto ao ângulo reto é a hipotenusa e os outros dois lados são os catetos do triângulo retângulo. Na figura, a hipotenusa é a e os catetos são b e c.



Teorema de Pitágoras. *Num triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c, vale a relação* $a^2=b^2+c^2$.

Agora resolvemos a questão.

Para que o poste fique perpendicular ao solo, o ângulo em A deve ser reto e, portanto, o triângulo $\triangle ABC$ deve ser retângulo (ver figura). Nesse caso, os dados do problema dão que a hipotenusa mede 2,5 m e os catetos 1,4 m e 2 m. Assim, pelo Teorema de Pitágoras teríamos $(2{,}5)^2=(1{,}4)^2+2^2$.



Entretanto, $(1{,}4)^2+2^2=1{,}96+4=5{,}96$ e $(2{,}5)^2=6{,}25$. Logo, essas medidas não satisfazem o Teorema de Pitágoras e, portanto, o triângulo $\triangle ABC$ não é retângulo. Assim, o ângulo em A não é reto e, consequentemente, o poste não está perpendicular ao solo. Concluímos que o professor está certo.

24. ***Equações recíprocas***

(a) Temos $y=x+\dfrac{1}{x}$. Usando as expansões do binômio e do trinômio, obtemos

$$y^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2x\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}+2 \qquad \text{e}$$
$$y^3=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=x^3+3x^2\frac{1}{x}+3x\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=x^3+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^3}\,,$$

portanto,

$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2 \qquad \text{e} \qquad x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=y^3-3y.$$

(b) A equação dada é equivalente a $\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+8=0$. Substituindo o valor de y e utilizando a identidade do item anterior, obtemos

$$(y^2-2)-5y+8=0,$$

ou seja, a equação de segundo grau $y^2-5y+6=0$, cujas raízes são $y=2$ e $y=3$. Voltando para x, multiplicamos $x+\dfrac{1}{x}=y=2$ e $y=3$ por x para obter as equações quadráticas $(x-1)^2=x^2-2x+1=0$ e $x^2-3x+1=0$, cujas raízes são $x=1$ e $x=\dfrac{1}{2}\big(3\pm\sqrt{5}\big)$. Assim, obtivemos todas as três raízes da equação dada.

(c) Como $x=0$ não é raiz da equação dada, podemos dividir tudo por x^2. Desse modo, encontramos exatamente a equação do item (b), cujas raízes já obtivemos.

(d) Como $x=0$ não é raiz da equação dada, podemos dividir tudo por x^3. Desse modo, reordenando os termos, obtemos a equação equivalente

$$\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+12=0.$$

Substituindo o valor de y e utilizando as identidades do item (a), obtemos

$$\big(y^3-3y\big)-2\big(y^2-2\big)-5y+12=0,$$

equivalente à equação cúbica

$$y^3-2y^2-8y+16=0.$$

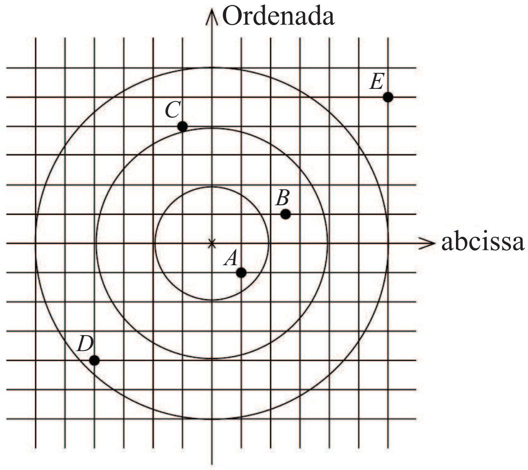
A forma mais rápida de resolver essa equação é ter um pouco de sorte e fatorar por agrupamento, obtendo, por exemplo,

$$y^3-2y^2-8y+16=y^2(y-2)-8(y-2)=\big(y^2-8\big)(y-2),$$

de modo que as três raízes da equação cúbica em y são $y=2$ e $y=\pm2\sqrt{2}$. Voltando para x, multiplicamos $x+\dfrac{1}{x}=y=2$ e $y=\pm2\sqrt{2}$ por x para obter as equações quadráticas $(x-1)^2=x^2-2x+1=0$, $x^2-2\sqrt{2}x+1=0$ e $x^2+2\sqrt{2}x+1=0$, cujas raízes são $x=1$, $x=\sqrt{2}\pm1$ e $x=-\sqrt{2}\pm1$. Assim, obtivemos todas as cinco raízes da equação dada.

25. ***Atirando flechas***

(a) Os cinco pontos dados estão marcados na figura.



(b) No círculo menor temos apenas o ponto A, portanto Manoel acertou apenas uma vez neste círculo, o que lhe dá 300 pontos.

(c) Para calcular o total de pontos, observe que pelo ponto B ele ganha 100 pontos, por C ele ganha 50 pontos e, por D, 50 pontos. Entretanto, pelo ponto E, ele não ganha pontos, porque está fora da zona de pontuação. Logo, o número total de pontos que Manoel fez é $300 + 100 + 50 + 50 = 500$.

26. ***Festa de aniversário*** – Como podemos repartir o total de convidados em mesas de 6 ou 7, o número de convidados é um múltiplo de 6 e de 7. Como o menor múltiplo comum de 6 e 7 é 42, podemos ter $42, 84, 126, \ldots$ convidados. Como são menos do que 120 convidados, só podemos ter 42 ou 84 convidados. Por outro lado, como são necessárias mais do que 10 mesas, temos mais do que 60 convidados. Logo, descartamos o 42, e o número de convidados só pode ser 84.

27. ***Medida do cateto*** – O segmento CF, cujo comprimento queremos calcular, é um cateto do triângulo retângulo $\triangle CDF$. O Teorema de Pitágoras, aplicado a esse triângulo, diz que $(CD)^2 = (CF)^2 + (FD)^2 = (CF)^2 + 24^2$ e, daí, tiramos $(CF)^2 = (CD)^2 - 24^2$. Ou seja, para encontrar CF basta conhecer CD. Como os lados opostos de um retângulo (e, mais geralmente, de um paralelogramo) são iguais, temos $CD = AB$. Nosso objetivo, então, passa a ser o cálculo de AB. Para isso, olhemos para o triângulo $\triangle ABE$. Sua área é

$$\frac{1}{2}\big(AE \times BE\big) = \frac{1}{2}(15 \times BE) = 150,$$

donde tiramos $BE = 20$. O Teorema de Pitágoras aplicado a esse triângulo nos dá $(AB)^2 = (AE)^2 + (BE)^2 = 15^2 + 20^2 = 625 = 25^2$, donde $AB = 25$. Logo, $CD = AB = 25$ e, de acordo com nossa observação anterior, obtemos

$$(CF)^2 = (CD)^2 - 24^2 = 25^2 - 24^2 = (25 + 24)(25 - 24) = 49.$$

Assim, $CF = 7$.

Observe que a solução independe da medida dos lados AD e BE.

28. ***Sequência de Peri*** – Agrupamos a sequência em blocos numerados consecutivamente, cada bloco formado pelos termos iguais consecutivos, como mostrado a seguir.

$$\underbrace{1}_{\text{bloco 1}},\ \underbrace{2,2}_{\text{bloco 2}},\ \underbrace{3,3,3}_{\text{bloco 3}},\ \underbrace{4,4,4,4}_{\text{bloco 4}},\ \underbrace{5,5,5,5,5}_{\text{bloco 5}},\ \underbrace{1,1,1,1,1,1}_{\text{bloco 6}},\ \underbrace{2,2,2,2,2,2,2}_{\text{bloco 7}},$$

$$\underbrace{3,3,3,3,3,3,3,3}_{\text{bloco 8}},\ \underbrace{4,4,4,4,4,4,4,4,4}_{\text{bloco 9}},\ \underbrace{5,5,5,5,5,5,5,5,5,5}_{\text{bloco 10}},$$

$$\underbrace{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1}_{\text{bloco 11}},\ \ldots,\ \underbrace{k,k,k,k,k,k,k,k,k,k,k,k,k,\ldots,k}_{\text{bloco } n,\text{ com } k\in\{1,2,3,4,5\}},\ \ldots$$

Observe que a numeração de cada bloco coincide com o número de termos que ele contém: o bloco 1 tem um termo, o bloco 2 tem dois termos, o bloco 3 tem três termos e assim por diante, até o bloco n, que tem n termos. A posição na sequência do último termo de cada bloco é obtida somando todos os números de 1 até o número atribuído ao bloco. Por exemplo, como pode ser contado na enumeração acima,

- o último 3 do bloco 8 é o 36° termo, pois $1+2+3+4+5+6+7+8=36$.
- o último 1 do bloco 11 é o 66° termo, pois $1+2+3+\cdots+10+11=66$.

Em geral, o último termo do enésimo bloco está na posição $1+2+3+\cdots+n$. Para calcular o valor desta soma, lembramos que $1,2,3,\ldots,n$ é uma progressão aritmética de razão 1, termo inicial $a_1=1$ e enésimo termo $a_n=n$. A soma de seus n primeiros termos é, então,

$$1+2+3+4+\cdots+n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Agora precisamos descobrir em qual bloco se encontra o centésimo termo da sequência. Supondo que ele esteja no enésimo bloco, sua posição será, no máximo, a do último termo deste bloco. Como ele não estará no bloco $n+1$, concluímos que n é o menor inteiro tal que $100 \le \frac{1}{2}n(n+1)$, ou seja, $200 \le n(n+1)$.

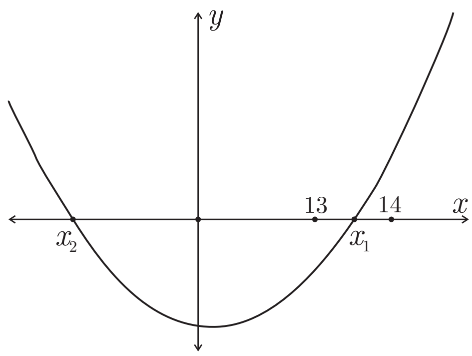
Para determinar esse valor de n, devemos resolver essa inequação e escolher, dentre suas soluções, o menor número inteiro. Como a expressão é bastante simples, é mais fácil resolvê-la por tentativa. Fazendo isso, vemos que $n=14$. De fato, $13\times(13+1)=182<200$ e $14\times(14+1)=210>200$. Assim, o centésimo termo da sequência está no bloco 14. Os números que aparecem nos blocos se repetem de cinco em cinco, na ordem 1, 2, 3, 4 e 5. Como $14=5\times 2+4$, o bloco 14 é formado pelo número 4. Assim, o centésimo termo da sequência é 4.

Observação: A resolução acima apresentada da inequação $200 \le n(n+1)$, apesar de correta, não serviria se o problema pedisse, por exemplo, a determinação do 10 000º termo da sequência. Nesse caso, teríamos que lidar com a inequação $20\,000 \le n(n+1)$ e, é claro, achar sua menor solução inteira por tentativa não parece promissor (a não ser com muita, muita sorte!). Por isso, vamos resolver a inequação $200 \le n(n+1)$ de uma maneira que serve em geral.

Começamos escrevendo $200 \le n(n+1)$ como $n^2+n-200 \ge 0$.

Isso nos leva ao estudo do sinal da função quadrática $f(x)=x^2+x-200$, cujo gráfico está ilustrado na figura. As raízes de $f(x)$ são

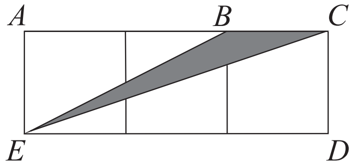
$$x_1=\frac{-1-\sqrt{1+800}}{2} \quad \text{e}$$
$$x_2=\frac{-1+\sqrt{1+800}}{2}\,.$$



Observe que x_1 é negativa e x_2 é, aproximadamente, igual a 13,6. Como $f(x)\ge 0$ para $x \le x_1$ e $x \ge x_2$, segue que o n que estamos procurando é o menor inteiro que é maior do que ou igual a x_2, ou seja, $n=14$.

Agora, se quiséssemos determinar o 10 000º termo da sequência, bastaria repetirmos o procedimento acima, encontrando $x_2=\frac{1}{2}\left[-1+\sqrt{1+80\,000}\,\right]$, que é, aproximadamente, igual a 140,9. Logo, $n=141$ e o 10 000º termo da sequência está no 141º bloco. Como $141=28\times 5+1$, segue que o 10 000º termo é 1.

29. ***Área em azulejo*** – A figura dada pode ser decomposta em quatro figuras congruentes à figura dada. Para calcular a área do triângulo sombreado nessa figura, escolhemos como base o lado BC.



Então, a altura correspondente é AE e, como os azulejos são quadrados com 10 cm de lado, segue que $AE = BC = 10$ cm. Logo, a área do triângulo $\triangle BCE$ é $\frac{1}{2}\text{base} \times \text{altura} = \frac{1}{2}10 \times 10 = 50$ cm^2. Assim, a área da região procurada é $4 \times 50 = 200$ cm^2.

30. ***Os cartões de Capitu***

Solução 1: Capitu virou, em primeiro lugar, os 50 cartões pares. Depois disso, ficaram na mesa os 50 cartões pares com a face amarela para cima e os 50 cartões ímpares com a face vermelha para cima. Ao virar, em seguida, os múltiplos de 3, ela virou apenas os múltiplos de 3 ímpares, que são 3, 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45, 51, 57, 63, 69, 75, 81, 87, 93 e 99. Logo, temos 17 múltiplos de 3 que são ímpares e Capitu virou para cima a face amarela de $50 + 17 = 67$ cartões. Assim, sobraram com a face vermelha para cima $100 - 67 = 33$ cartões.

Observação: Nessa solução, para determinar a quantidade de múltiplos ímpares de 3 menores do que 100 foi suficiente escrever esses múltiplos e contar quantos eram. No entanto, se Capitu tivesse 1 000 cartões (ou mais) esse procedimento seria bastante trabalhoso, mas, nesse caso, podemos proceder de modo mais geral. Notamos que os múltiplos ímpares de 3 desde 1 até 1 000 formam uma progressão aritmética, com primeiro termo $a_1 = 3$, razão $r = 6$ e o último termo $a_n = 999$. Para determinar n usamos a fórmula $a_n = a_1 + (n-1)r$ que, no caso presente, é $999 = 3 + (n-1) \times 6$. Assim, $n = 167$, ou seja, temos 167 múltiplos ímpares de 3 menores do que 1 000.

Solução 2: Capitu virou, em primeiro lugar, os 50 cartões pares. Depois disso, ficaram na mesa os 50 cartões pares com a face amarela para cima e os 50 cartões ímpares com a face vermelha para cima. Ao virar, em seguida, os múltiplos de 3, Capitu procedeu como segue.

- *Entre os cartões pares* ela virou os que eram também múltiplos de 3. Um número que é múltiplo de 2 e de 3 também é múltiplo de 6. Como $100 = 16 \times 6 + 4$, concluímos que Capitu virou 16 cartões entre os cartões pares. Esses cartões voltaram a ficar com a face vermelha para cima, ficando os outros 34 com a face amarela para cima.
- *Entre os cartões ímpares,* como $100 = 33 \times 3 + 1$, segue que o número total de cartões (pares e ímpares) múltiplos de 3 é 33. Como vimos acima, entre estes cartões, 16 são pares, logo 17 são ímpares. Assim, Capitu virou 17 cartões ímpares, e esses cartões passaram a ter a face amarela para cima, enquanto que os outros 33 continuaram com a face vermelha para cima.

31. ***Enchendo o tanque*** – No que segue, todas as medidas de volume estão dadas em cm^3.

O volume V do balde é dado pela fórmula habitual do volume de um cilindro, ou seja, $V = \text{área da base} \times \text{altura}$. A base do balde é um círculo de 30 cm de diâmetro; seu raio, então, mede $r = 15$ cm e sua área é $\pi r^2 = 225\,\pi$ cm^2. Logo, $V = 48 \times 225\,\pi = 10\,800\,\pi$. A cada viagem, o volume de água que o homem coloca no balde é $4/5$ de V e, desse volume, ele perde 10%. Portanto, resta no balde 90% de $4/5$ de V, ou seja,

$$\frac{9}{10} \times \frac{4}{5} V = \frac{18}{25} V = 0{,}72\,V = 0{,}72 \times 10\,800\,\pi = 7\,776\,\pi.$$

Essa quantidade $B = 7\,776\,\pi$ de água é a que ele efetivamente coloca no tanque em cada viagem. O volume de $3/4$ do tanque é $T = \frac{3}{4} \times 300 \times 36 \times 50 = 405\,000$. Logo, o número de baldes necessários para atingir esse volume é

$$\frac{405\,000}{B} = \frac{405\,000}{7\,776\,\pi} = \frac{625}{12\,\pi}\,.$$

Usando a aproximação 3,14 para o número π, obtemos $\dfrac{625}{12\,\pi} \approx \dfrac{625}{12 \times 3{,}14} \approx 16{,}587.$

Assim, o homem necessitará de 16 baldes, mais 0,587 de um balde, e concluímos que ele deverá fazer 17 viagens.

Observação: Acima usamos uma **aproximação** para o valor de π. É importante entender o que isso significa. Como sabemos, π é um número irracional e sua expansão decimal é infinita e não é periódica. O valor aproximado de π, com 31 casas decimais, é $\pi \approx 3{,}1415926535897932384626433832795$ (o símbolo $\approx$ quer dizer "aproximadamente"). Por que, então, não usar $\pi \approx 3{,}142$ ou $\pi \approx 3{,}1416$ para resolver nosso problema, em vez de $\pi \approx 3{,}14$? Para discutir isso, vamos a um exemplo.

Suponhamos que você tenha um balde cilíndrico com raio da base medindo 1 m e altura 1 m, e uma caixa de água de volume de, exatamente 3,141 m^3. O balde deve ser enchido em uma fonte. Quantas viagens à fonte serão necessárias para encher a caixa, supondo que o volume de água de cada balde seja integralmente transferido para a caixa?

Usando a aproximação $\pi \approx 3{,}14$, obtemos 3,14 m^3 para o volume do balde. Como $\frac{\text{volume do tanque}}{\text{volume do balde}} \approx \frac{3{,}141}{3{,}14}$ é maior do que 1 (e, é claro, menor do que 2), concluímos que serão necessárias duas viagens à fonte para encher a caixa de água.

Vamos, agora, usar a aproximação $\pi \approx 3{,}1416$. Aqui calculamos o volume do balde e obtemos 3,1415 m^3. Então, $\frac{\text{volume do tanque}}{\text{volume do balde}} \approx \frac{3{,}141}{3{,}1416}$ é menor do que 1, e concluímos, assim, que basta uma viagem à fonte para encher o balde, um resultado bem diferente do anterior!

Deve ficar claro com esse exemplo que a escolha inicial de uma aproximação pode influenciar fortemente o resultado final. Nesse caso, dizemos que as condições do problema são sensíveis à aproximação. No nosso problema original de encher o tanque, os dados iniciais não eram sensíveis à aproximação usada para π, o que pode ser verificado imediatamente repetindo a resolução dada com $\pi \approx 3{,}142$ ou $\pi \approx 3{,}1416$. Em ambos os casos, obtém-se o resultado de 17 viagens.

Em geral, os problemas desse tipo propostos em livros nos ensinos fundamental e médio são enunciados de modo pouco sensível à aproximação. Isto justifica parcialmente o uso de "$\pi = 3{,}14$" bem como o de, por exemplo, "$\sqrt{2} = 1{,}41$" (CURIOSIDADE: $\sqrt{2} \approx 1{,}4142135623730950488016887242097$).

Observamos, também, que poucas casas decimais facilitam as contas, em particular quando não se usam máquinas de calcular. Seria impossível, na prática, trabalhar manualmente com a aproximação de 31 casas que demos para π no início desta conversa.

O tratamento de problemas de aproximação é feito através de desigualdades. Infelizmente, tempo e espaço não permitem que abordemos esse tópico com mais detalhes no momento, mas esperamos ter despertado sua curiosidade para o assunto.

32. ***Fator primo*** – A decomposição de 2 006 em fatores primos é $2\,006 = 2 \times 17 \times 59$. Assim, o maior fator primo de 2 006 é 59.

33. ***Altura de salário*** – A opção correta é (d).

O enunciado diz que 1 real $= 275 \times 10^7$ cruzados. O salário de João é 640 reais, o que é equivalente a $640 \times 275 \times 10^7 = 176\,000 \times 10^7 = 176 \times 10^{10}$ cruzados. O número de pilhas de cem notas que se pode fazer com essa quantidade de notas de 1 cruzado é $176 \times 10^{10}/10^2 = 176 \times 10^8$. Como cada uma destas pilhas tem 1,5 cm de altura, a altura de todas elas é $1{,}5 \times 176 \times 10^8 = 264 \times 10^8$ cm.

Agora lembramos que 1 km $= 1\,000$ m $= 10^3$ m e que 1 m $= 100$ cm $= 10^2$ cm, donde 1 km $= 10^3 \times 10^2 = 10^5$ cm. Assim, a pilha de 264×10^8 cm tem $264 \times 10^8/10^5 = 264 \times 10^3 = 264\,000$ km de altura.

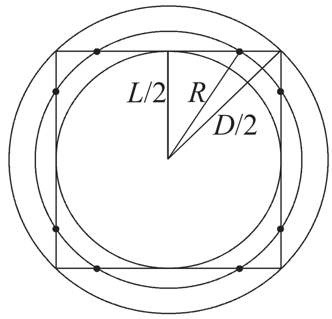
34. ***Só bala*** – A opção correta é (c).

A primeira bala pode ser de qualquer sabor. Para fixar as ideias, suponhamos que seja de banana. Depois que essa bala é retirada, sobram $1\,002 + 1\,001$ balas na caixa – no nosso caso, 1 002 de maçã e 1 001 de banana. A probabilidade q de que a segunda bala seja diferente (no nosso exemplo, de maçã) é $q = 1\,002/2\,003$. A probabilidade p de que a segunda bala seja igual (no nosso exemplo, de banana) é $p = 1\,001/2\,003$. A diferença $q - p$ é, portanto,

$$q - p = \frac{1\,002}{2\,003} - \frac{1\,001}{2\,003} = \frac{1}{2\,003}\,.$$

35. ***Distância ao centro*** – A opção correta é (e).

Os pontos que estão a 6 cm de distância do ponto P formam uma circunferência de centro P e raio $R = 6$ cm. Se d denota a diagonal do quadrado, do Teorema de Pitágoras temos



$$d = \sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{2 \times 10^2} = 10\sqrt{2}\,.$$

A circunferência de raio $L/2 = 5$ cm tangencia o quadrado em quatro pontos.

A circunferência de raio $D/2$ toca o quadrado em quatro pontos, a saber, os vértices do quadrado. Temos $L = 10$, $R = 6$ e $D = 10\sqrt{2}$, portanto

$$\underbrace{5}_{L/2} < \underbrace{6}_{R} < \underbrace{5\sqrt{2}}_{D/2}\,.$$

(Observe que $1{,}2 < \sqrt{2}$, $5 \times 1{,}2 < 5 \times \sqrt{2}$ e, portanto, $6 < 5\sqrt{2}$). Logo, a circunferência de raio $R = 6$ está "entre" as duas circunferências de raios 5 e $5\sqrt{2}$. Assim, ela corta o quadrado em oito pontos.

36. ***Potências e potências*** – A opção correta é (e).

Solução 1: Observamos que os termos do lado direito da equação dada podem ser escritos como potências de 2. De fato, $4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$ e $64 = 2^6$. Desse modo, a equação se torna $2(2^x) = 2^{2x}+2^3$. Temos, então, $2(2^{2x})-2^{2x} = 2^6$, donde $2^{2x}(2-1) = 2^6$, ou seja, $2^{2x} = 2^6$. Assim, $2x = 6$ e segue que $x = 3$.

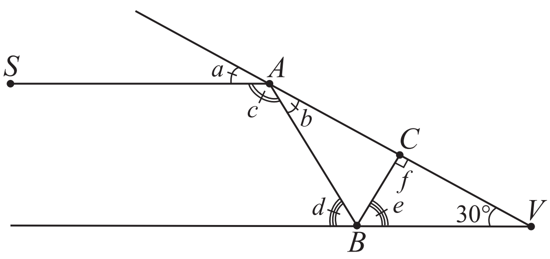
Solução 2: $4^x + 4^x = 2(4^x) = 2\big(2^{2x}\big) = 4^x + 4^3$, portanto, $4^x = 4^3$ e segue que $x = 3$.

37. ***Um raio de luz*** – A opção correta é (b).

Vamos acompanhar o trajeto do raio de luz a partir do ponto S. Para isso, lembramos a propriedade básica da reflexão de um raio de luz num espelho: o ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência. Por exemplo, na figura dada, os ângulos a e b são iguais, bem como os ângulos d e e. Observe que, na figura, as paralelas AS e BV são cortadas pela transversal AB.

Assim,

- $a = 30° = b$,
- $a + b + c = 180°$, logo $c = 120°$ e
- $c+d = 180°$, logo $d = 60° = e$.



Como a soma dos ângulos internos do triângulo $\triangle BCV$ é $180°$, segue que $f = 90°$. Isso quer dizer que o nosso raio de luz, ao atingir C, será refletido sobre si mesmo e fará então o caminho inverso, $C \to B \to A \to S$. Desse modo, o trajeto completo do raio será

$$S \to A \to B \to C \to B \to A \to S.$$

O comprimento desse trajeto do raio desde S até retornar a S é duas vezes a soma dos comprimentos dos segmentos AS, AB e BC. É dado que $AS = 1$ m, portanto, resta calcular AB e BC. Para isso, olhamos para o triângulo $\triangle ABC$. Ele é um triângulo retângulo com ângulos de $30°$ e $60°$. Sabemos que num tal triângulo o cateto oposto ao ângulo de $30°$ tem comprimento igual à metade do comprimento da hipotenusa (exercício). No nosso caso, temos $BC = \dfrac{1}{2}AB$.

Notamos, agora, que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle CBF$ são congruentes, pois são triângulos retângulos ($f = 90°$) com ângulos iguais ($b = 30°$) e um cateto comum (BC), o que nos mostra que $AC = \dfrac{1}{2}AV = \dfrac{1}{2}$ m. Pondo $AB = x$, temos $BC = \dfrac{1}{2}x$ e o Teorema de Pitágoras, aplicado ao triângulo $\triangle ABC$, nos dá $x^2 = \big(\frac{1}{2}\big)^2 + \big(\frac{1}{2}x\big)^2$. Simplificando, obtemos $\dfrac{3}{4}x^2 = \dfrac{1}{4}$, donde $x = 1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3$.

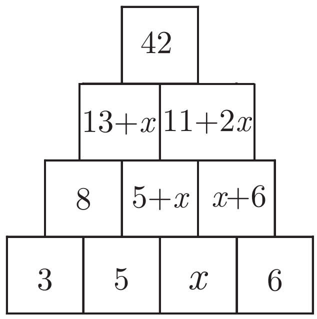
Desse modo, obtemos o comprimento do trajeto do raio de luz, como segue.

$$2(SA + AB + BC) = 2\Big(1 + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{3}\Big) = 2 + \sqrt{3}\ \text{m}.$$

38. ***Diferença de quadrados*** – Usando a fatoração $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ com $x = 666\,666\,666$ e $y = 333\,333\,333$, vemos que $x - y = y$ e $x + y = 999\,999\,999$, portanto,

$$\begin{aligned} 666\,666\,666^2 - 333\,333\,333^2 &= 333\,333\,333 \times 999\,999\,999 \\ &= 333\,333\,333 \times (1\,000\,000\,000 - 1) \\ &= 333\,333\,333\,000\,000\,000 - 333\,333\,333 \\ &= 333\,333\,332\,666\,666\,667. \end{aligned}$$

39. ***Escada de número*** – A opção correta é (e).
Usando a regra dada, preenchemos as casas vazias a partir da segunda linha a contar de baixo e obtemos a figura. Logo,



$$(13 + x) + (11 + 2x) = 42$$

e, portanto, $24 + 3x = 42$, ou seja, $x = 6$.

40. ***Diferença de potências*** – A opção correta é (c).

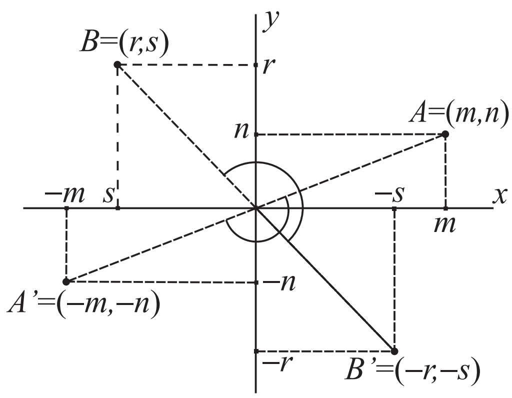
Solução 1: O algarismo final de $9\,867^3$ é o mesmo que o de $7^3 = 343$, isto é, 3. O algarismo final de $9\,867^2$ é o mesmo que o de $7^2 = 49$, isto é, 9. Se de um número terminado em 3 subtraímos outro terminado em 9, o algarismo final do resultado é 4.

Observação: Observe que o algarismo das unidades da diferença $9\,867^3 - 9\,867^2$ é igual ao algarismo das unidades de $(7^3 - 7^2)$.

Solução 2: $n^3 - n^2 = n^2(n-1)$, com $n^2 = 9\,867^2$ terminando em 9 e $n - 1 = 9\,866$ em 6. Como $9 \times 6 = 54$, o algarismo final de $n^2(n-1)$ é 4.

41. ***Parábola girada*** – A opção correta é (e).

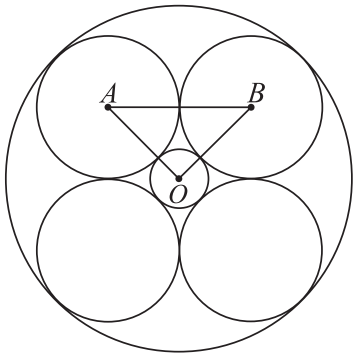
Uma rotação de 180° pode ser visualizada como uma *meia-volta*. Aqui temos uma meia-volta em torno da origem. A figura ilustra o que uma meia-volta faz com as coordenadas dos pontos do plano. Por exemplo, o ponto A' é o resultado da meia-volta aplicada ao ponto A; em outras palavras, A' é onde o ponto A vai parar após a meia-volta. Do mesmo modo, B' é onde B vai parar após a meia-volta.



É fácil ver que na passagem de A para A' as coordenadas trocam de sinal. Desse modo, vemos que uma meia-volta em torno da origem leva um ponto qualquer (x, y) no ponto $(-x, -y)$. Assim, (a, b) pertence à nova parábola se, e somente se, $(-a, -b)$ pertence à parábola $y = x^2 - 5x + 9$ original, ou seja, se $-b = a^2 + 5a + 9$ ou, ainda, $b = -a^2 - 5a - 9$. Logo, a equação da nova parábola é $y = -x^2 - 5x - 9$.

42. ***Logotipo*** – Seja r o raio dos quatro círculos iguais.

Ligando os centros A e B de dois desses círculos ao centro O dos círculos concêntricos, obtemos o triângulo $\triangle OAB$, como na figura. Lembrando que a reta que une os centros de dois círculos tangentes passa pelo ponto de tangência, vemos que $OA = OB = 1 + r$ e $AB = 2r$, tudo em cm. O triângulo $\triangle OAB$ é retângulo em O e o Teorema de Pitágoras dá



$$(2r)^2 = (1+r)^2 + (1+r)^2.$$

Logo, $4r^2 = 2(1+r)^2$, ou $2r^2 = (1+r)^2$, do que tiramos $r^2 - 2r - 1 = 0$. Assim, $r = \dfrac{1}{2}\left[2 \pm \sqrt{8}\,\right] = 1 \pm \sqrt{2}$. Como o raio r é positivo, obtemos $r = 1 + \sqrt{2}$. Segue que o raio do círculo maior mede $1 + 2r = 3 + 2\sqrt{2}$ cm.

43. ***Padeiro cansado*** – A opção correta é (d).

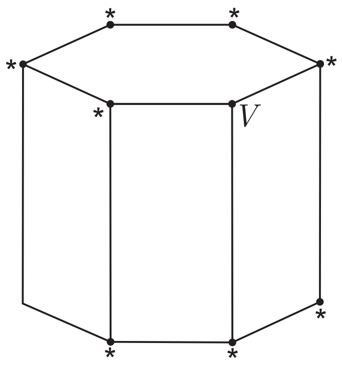
Seja x a quantidade de farinha, em quilos, de que o padeiro dispõe. Trabalhando sozinho, ele usaria $x/6$ quilos de farinha em uma hora. Trabalhando com seu ajudante, eles usariam $x/2$ quilos de farinha em uma hora. Seja t o tempo, em horas, que o padeiro trabalhou sozinho. Como a farinha acaba em 150 minutos, ou seja, em 2,5 horas (2 horas e 30 minutos), o tempo que ele trabalhou com seu ajudante foi $2{,}5 - t$ horas. Logo, a quantidade de farinha gasta durante o tempo que o padeiro trabalhou sozinho foi de $(x/6) \times t$ e a quantidade gasta durante o tempo que o padeiro trabalhou com seu ajudante foi de $(x/2) \times (2{,}5 - t)$. Como

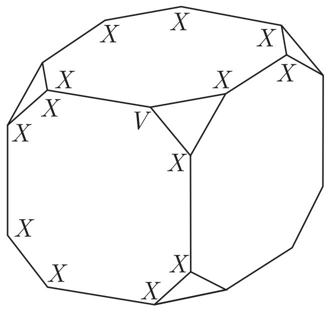
$$\overbrace{\begin{array}{c}\text{quantidade total}\\ \text{de farinha}\end{array}}^{x} = \overbrace{\begin{array}{c}\text{quantidade de farinha gasta}\\ \text{pelo padeiro}\\ \text{trabalhando sozinho}\end{array}}^{\frac{x}{6}\times t} + \overbrace{\begin{array}{c}\text{quantidade de farinha gasta}\\ \text{pelo padeiro trabalhando}\\ \text{com o ajudante}\end{array}}^{\frac{x}{2}\times(2{,}5-t)}$$

temos $x = \frac{1}{6}\,x\,t + \frac{1}{2}\,x\,(2{,}5 - t)$. A quantidade x de farinha que o padeiro tinha inicialmente era não nula. Logo, podemos dividir ambos os membros por x, encontrando $1 = \frac{1}{6}\,t + \frac{1}{2}\,(2{,}5 - t)$ e, portanto, $t = 0{,}75$ horas, ou seja, o padeiro trabalhou sozinho durante 45 minutos.

44. ***Muitas diagonais*** – Num poliedro qualquer, dois vértices distintos determinam uma diagonal apenas no caso em que não estejam numa mesma face.

No caso do prisma hexagonal, vemos na figura que o vértice v não forma uma diagonal com os vértices marcados com $*$. Levando o próprio v em conta, vemos que v não forma uma diagonal com exatamente nove vértices. Como o prisma tem doze vértices, segue que v forma uma diagonal com exatamente $12-9 = 3$ vértices. O mesmo raciocínio vale para qualquer vértice, e concluímos que, de cada vértice do prisma, partem exatamente três diagonais. Como a diagonal que parte de um vértice v para o vértice w é a mesma que parte de w para v, segue que o número de diagonais é $\dfrac{1}{2}\,12 \times 3 = 18$.





Seja V um vértice do poliedro. Observando a figura, vemos que V não forma uma diagonal com exatamente quatorze vértices, os treze marcados com X e mais o próprio V. Como o poliedro tem vinte e quatro vértices no total, sobram $24 - 14 = 10$ vértices, com os quais V forma uma diagonal. Logo, o número de diagonais desse poliedro é $\dfrac{1}{2}\,24 \times 10 = 120$.

45. ***Promoção de sabonete*** − A opção correta é (d).

Pela promoção, quem levar 2 unidades paga pelo preço de 1,5 unidade, logo quem levar 4 unidades paga pelo preço de 3 unidades, ou seja, leva quatro e paga três.

46. ***Qual é o ângulo?*** − A opção correta é (b).

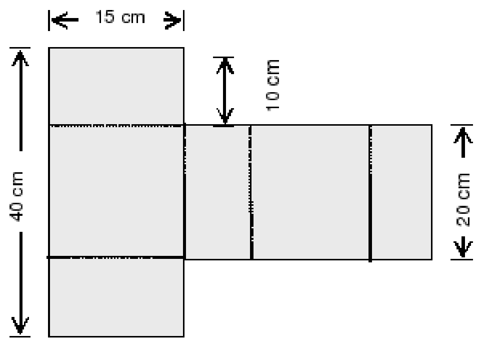
Como $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ são triângulos equiláteros, cada um de seus ângulos internos mede 60°. No triângulo $\triangle AGD$ temos

$$G\widehat{A}D = 180^\circ - 75^\circ - 60^\circ = 45^\circ \quad \text{e} \quad \mathrm{G\widehat{D}A} = 180^\circ - 65^\circ - 60^\circ = 55^\circ.$$

Portanto, $A\widehat{G}D = 180^\circ - 45^\circ - 55^\circ = 80^\circ$. Logo, no triângulo $\triangle CGH$, temos

$$x + 80^\circ + 60^\circ = 180^\circ,\ \text{donde } x = 40^\circ.$$

47. ***Caixa de papelão*** − A opção correta é (b).



A figura mostra as dobras que serão feitas para montar a caixa, que terá as dimensões seguintes: 20 cm de largura, 15 cm de comprimento e 10 cm de altura. Logo, seu volume será de

$$20 \times 15 \times 10 = 3\,000 \text{ cm}^3.$$

48. ***Soma de vizinhos*** − A opção correta é (b).

Seja x o primeiro termo da sequência. Como o segundo termo é 1 e, a partir do terceiro, cada termo é a soma dos dois anteriores, temos que

- o terceiro termo é $1 + x$;

- o quarto termo é $1 + (1 + x) = 2 + x$;
- o quinto termo é $(1 + x) + (2 + x) = 3 + 2x$;
- o sexto termo é $(2 + x) + (3 + 2x) = 5 + 3x$.

Como o quinto termo é $2\,005$, temos $3 + 2x = 2\,005$, donde $x = 1\,001$. Logo, o sexto termo da sequência é $5 + 3 \times 1\,001 = 3\,008$.

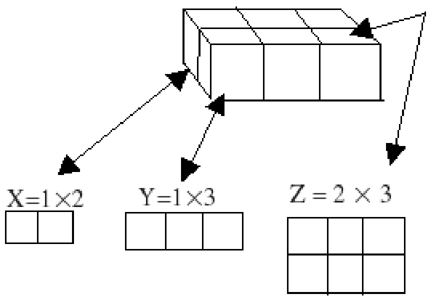
49. ***Algarismos crescentes*** – A opção correta é (d).

Os números em questão, com

- dois algarismos, são 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78 e 89 (8 números);
- três algarismos, são 123, 234, 345, 456, 567, 678 e 789 (7 números);
- quatro algarismos, são 1 234, 2 345, 3 456, ..., 6 789 (6 números);
- por fim, com cinco algarismos, somente 12 345,

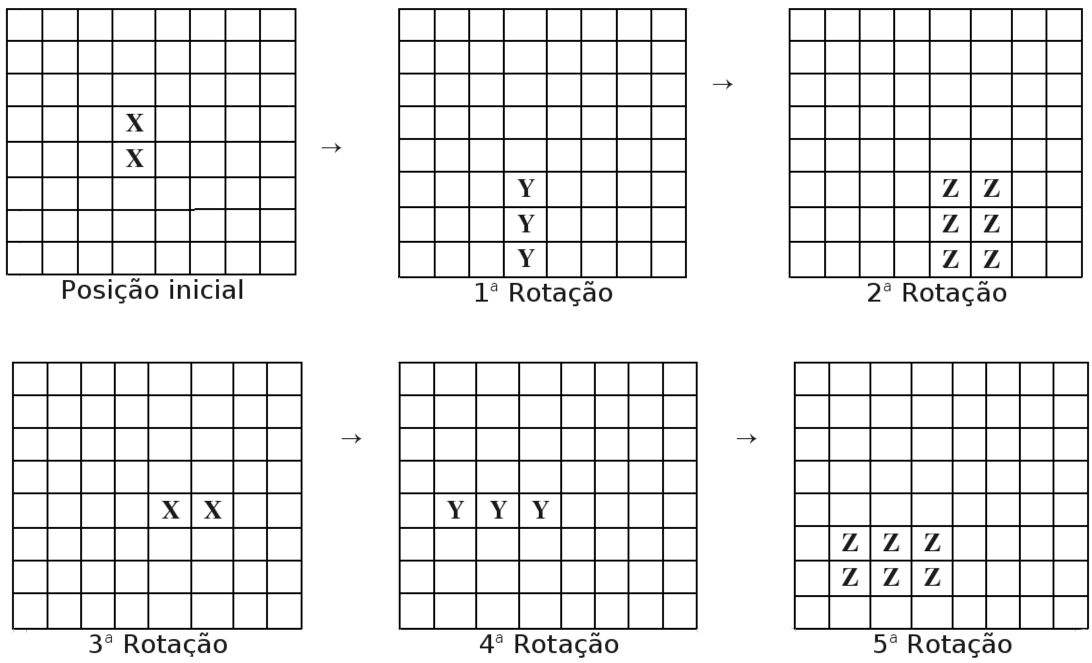
num total de $8 + 7 + 6 + 1 = 22$ números.

50. ***Bloco girante*** – A opção correta é (b).



De acordo com a figura, podemos concluir que as dimensões das faces X, Y e Z são 2, 3 e 6 cm^2, respectivamente. A seguir, indicaremos os movimentos feitos pelo bloco e as faces que entram em contato com os quadradinhos em cada etapa. Lembre que giramos o bloco cinco vezes.

As figuras a seguir mostram os quadradinhos do tabuleiro que ficam em contato com cada uma das três faces do bloco, desde a posição inicial até a final, após a última rotação.



Alguns quadradinhos entram em contato com as faces mais de uma vez, conforme figura a seguir, que mostra todos os quadradinhos que tiveram contato com as faces do bloco desde a posição inicial até a última rotação.

			X				
	Y	**Y**	**X/Y**	**X**	**X**		
	Z	**Z**	**Y/Z**	**Z**	**Z**		
	Z	**Z**	**Y/Z**	**Z**	**Z**		
			Y	**Z**	**Z**		

Contando nesta última figura, vemos que o bloco esteve em contato com 19 quadradinhos do tabuleiro.

51. ***Iterando um ponto*** − A opção correta é (d).

A partir da tabela

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	4	1	3	5	2

obtemos

$$f(4)=5,\ f(\underbrace{f(4)}_{5})=f(5)=2,\ f(f(\underbrace{f(4)}_{5}))=f(\underbrace{f(5)}_{2})=f(2)=1 \text{ e}$$

$$\underbrace{f(f(f(f(4)}_{4 \text{ vezes}})))=f(f(f(\underbrace{f(4)}_{5})))=f(f(\underbrace{f(5)}_{2}))=f(\underbrace{f(2)}_{1})=f(1)=4.$$

Como 2 004 é múltiplo de 4, segue que $\underbrace{f(f(f(f(\ldots f}_{2\,004 \text{ vezes}}(4)\ldots))))=4$. O diagrama a seguir ilustra essa afirmação.

$$\underbrace{4\overset{f}{\rightarrow}5\overset{f}{\rightarrow}2\overset{f}{\rightarrow}1\overset{f}{\rightarrow}4}_{4 \text{ vezes}}\underbrace{\overset{f}{\rightarrow}5\overset{f}{\rightarrow}2\overset{f}{\rightarrow}1\overset{f}{\rightarrow}4}_{8 \text{ vezes}}\underbrace{\overset{f}{\rightarrow}5\overset{f}{\rightarrow}2\overset{f}{\rightarrow}1\overset{f}{\rightarrow}4}_{12 \text{ vezes}}$$

$$\rightarrow\ldots\underbrace{\overset{f}{\rightarrow}5\overset{f}{\rightarrow}2\overset{f}{\rightarrow}1\overset{f}{\rightarrow}4}_{2\,004 \text{ vezes}}$$

52. ***Esmeralda e o 21*** − Primeiro vamos listar os números que têm o agrupamento 21 no meio de sua representação decimal.

- 21, 121, 221, ..., 921, num total de 10 números.
- 210, 211, ..., 219, num total de 10 números.

Também devemos contar os agrupamentos 21 obtidos a partir de um par de números consecutivos tal que o primeiro termina com 2 e o segundo começa com 1, que são os 11 casos seguintes.

$$12-13, 120-103, 112-113, 122-123, 132-133, 142-143,$$

$$152-153, 162-163, 172-173, 182-183, 192-193.$$

Assim, temos um total de $20+11=31$ agrupamentos 21 nesse número.

53. ***Muitos fatores*** – A opção correta é (d).

Cada um dos fatores é uma diferença de quadrados, isto é, $a^2 - b^2$, em que $a = 1$ e $b = 1/c^2 = (1/c)^2$. Usando a fatoração $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{225}\right)\\
&= \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{15^2}\right)\\
&= \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{15}\right)\left(1+\frac{1}{15}\right)\\
&= \frac{1}{2}\times\underbrace{\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}}_{1}\times\underbrace{\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}}_{1}\times\underbrace{\frac{5}{4}\times\cdots}_{1}\times\ldots\times\underbrace{\cdots\times\frac{14}{15}}_{1}\times\frac{16}{15} = \frac{1}{2}\times\frac{16}{15} = \frac{8}{15}\,.
\end{aligned}$$

54. ***Falta um ângulo*** – A opção correta é (a).

Os ângulos internos do quadrilátero dado são $50°$, $180° - 30° = 150°$, α e $180° - 40° = 140°$. Como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é $360°$, temos $50° + 150° + \alpha + 140° = 360°$, donde $\alpha = 20°$.

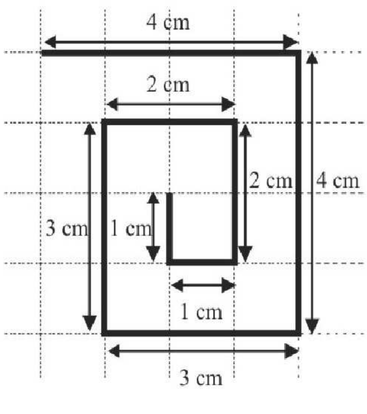
55. ***Soma de distâncias*** – A opção correta é (e).

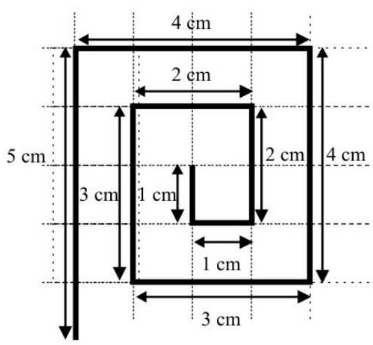
Temos $|z - x| = 3{,}7 - (-1) = 4{,}7$ e $|w - x| = 9{,}3 - (-1) = 10{,}3$. Logo,

$$|z - x| + |w - x| = 4{,}7 + 10{,}3 = 15.$$

56. ***Espiral do Artur*** – A opção correta é (d).

A figura mostra que a “espiral” é constituída por segmentos cujos comprimentos formam uma sequência finita da forma $1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \ldots, n, n$ (se os dois últimos segmentos da espiral têm o mesmo comprimento) ou, então, da forma $1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \ldots,$ $n, n, n+1$ (se os dois últimos segmentos da espiral têm comprimentos diferentes).





A soma dos k primeiros números naturais é dada por

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

e o comprimento total da espiral é 4 m $=$ 400 cm. Portanto,

$$2 \times \frac{n(n+1)}{2} = 1+1+2+2+3+3+\cdots+n+n = 400$$

ou, então,

$$2 \times \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = 1+1+2+2+\cdots+n+n+n+1 = 400,$$

de modo que $n(n+1) = 400$ ou $(n+1)^2 = 400$.

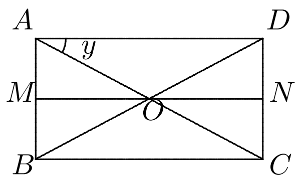
Entretanto, não existem dois números naturais consecutivos cujo produto seja 400, isto é, a equação $n(n+1) = 400$ não tem solução. Assim, $(n+1)^2 = 400$, de modo que $n+1 = 20$. Portanto, o último segmento da espiral tem 20 cm e o penúltimo 19 cm. Os comprimentos dos segmentos da espiral formam a sequência de números $1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \ldots, 19, 19, 20$. Assim, são $19 \times 2 + 1 = 39$ segmentos. Como sete já foram traçados, falta traçar 32.

57. ***Quais são os ângulos?*** – A opção correta é (d).

Temos $B\widehat{C}A = D\widehat{A}C = y$ (ângulos alternos internos) e $B\widehat{D}A = C\widehat{B}D = y$ (simetria). Seja O o ponto de interseção das duas diagonais.

Traçando o segmento MN paralelo aos lados AD e BC do retângulo, obtemos $C\widehat{O}N = B\widehat{C}A = y$ e $N\widehat{O}D = B\widehat{D}A = y$. Logo,

$$x = C\widehat{O}D = C\widehat{O}N + N\widehat{O}D = 2y.$$

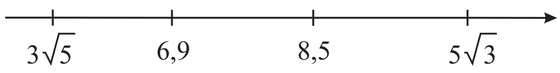


58. ***Raiz menor*** – A equação já foi dada na forma fatorada $a(x-m)(x-n) = 0$, logo suas raízes são $m = 3\sqrt{5}$ e $n = 5\sqrt{3}$. Devemos apenas decidir qual delas é a maior. Isso pode ser feito de duas maneiras, pelo menos.

Podemos elevar m e n ao quadrado, obtendo $m^2 = 9 \times 5 = 45$ e $n^2 = 25 \times 3 = 75$. Como $45 < 75$, resulta que $3\sqrt{5} = m = \sqrt{45} < \sqrt{75} < n = 5\sqrt{3}$.

Também podemos observar que $\sqrt{5} < 2{,}3$ e $1{,}7 < \sqrt{3}$, portanto,

$$m < 3 \times 2{,}3 = 6{,}9 < 8{,}5 = 5 \times 1{,}7 < n.$$



59. ***Comparando áreas*** – A opção correta é (c).

Os raios dos três discos menores são 1, 2 e 2 e o do disco maior é 3. Denotemos por b a área em branco. Então

$$v = 1\,\pi + 4\,\pi + 4\,\pi = 9\,\pi - b$$

e $w = 9\,\pi - b$, ou seja, $v = w$.

60. ***Menor raiz*** – A opção correta é (b).

- **1º Caso:** $x \geq 1$. Nesse caso, $x-1 \geq 0$ e, portanto, $|x-1| = x-1$. A equação dada toma a forma $(x-1)/x^2 = 6$, ou $6x^2 - x + 1 = 0$. Essa equação não tem raízes reais porque $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 6 \times 1 = 1 - 24$ é negativo. Logo, não temos soluções x maiores do que ou iguais a 1.
- **2º Caso:** $x < 1$. Nesse caso, $x-1 < 0$ e, portanto, $|x-1| = -(x-1) = 1-x$. A equação dada toma a forma $(1-x)/x^2 = 6$, ou $6x^2 + x - 1 = 0$. Essa equação tem as raízes

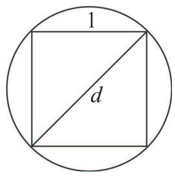
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 6 \times (-1)}}{2 \times 6} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{12} = \frac{-1 \pm 5}{12},$$

ou seja, $x = -\dfrac{1}{2}$ e $x = \dfrac{1}{3}$.

Com base nesses dois casos, concluímos que nossa equação tem apenas duas soluções, $-\dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{1}{3}$. Logo, a menor solução da equação é $-\dfrac{1}{2}$.

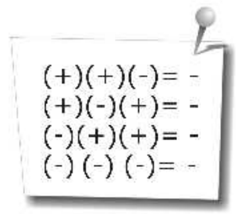
61. ***Toalha redonda*** – A opção correta é (d).

Para que a toalha cubra inteiramente a mesa e que tenha o menor diâmetro possível, o quadrado deve estar inscrito no círculo. A diagonal do quadrado é o diâmetro do círculo, logo, pelo Teorema de Pitágoras, temos $d^2 = 1^2 + 1^2$, ou seja, $d = \sqrt{2}$.

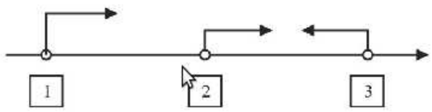


62. ***Soluções reais*** – A opção correta é (c).

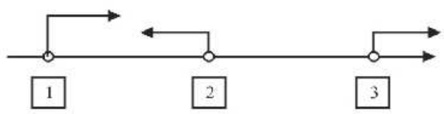
Para que um produto de três fatores seja negativo, devemos ter dois fatores positivos e um fator negativo, ou os três negativos. As possibilidades são as seguintes.



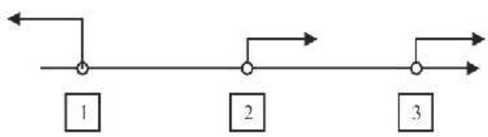
1) $\underbrace{(x-1)}_{+}\underbrace{(x-2)}_{+}\underbrace{(x-3)}_{-}$.
Isso equivale a $x > 1, x > 2$ e $x < 3$, ou seja, $2 < x < 3$.



2) $\underbrace{(x-1)}_{+}\underbrace{(x-2)}_{-}\underbrace{(x-3)}_{+}$.
Isso equivale a $x > 1, x < 2$ e $x > 3$, o que não é possível. Logo, não pode ocorrer esse caso.

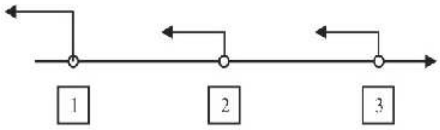


3) $\underbrace{(x-1)}_{-}\underbrace{(x-2)}_{+}\underbrace{(x-3)}_{+}$.
Isso equivale a $x < 1, x > 2$ e $x > 3$, o que não é possível. Logo, não pode ocorrer esse caso.



4) $\underbrace{(x-1)}_{-}\underbrace{(x-2)}_{-}\underbrace{(x-3)}_{-}$.

Isso equivale a $x < 1, x < 2$ e $x < 3$, ou seja, $x < 1$.



Logo, os únicos reais x satisfazendo $(x-1)(x-2)(x-3) < 0$ são os reais x tais que $x < 1$ ou $2 < x < 3$. Assim, a união de intervalos $(0,1) \cup (2,3)$ é o conjunto formado por todos os reais positivos de x tais que $(x-1)(x-2)(x-3) < 0$.

63. ***Cossenos crescentes*** – De acordo com a definição de cosseno, temos $\cos 25° = 1/(OM)$, $\cos 41° = 1/(ON)$ e $\cos 58° = 1/(OB)$. Na figura, vemos que $OM < ON < OB$. Logo, $\cos 58° < \cos 41° < \cos 25°$.

64. ***Central telefônica*** – A opção correta é (e).

Existem dois tipos de ramais que podem estar sendo usados. Temos os ramais com

- os dois algarismos iguais (00, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 e 99), num total 10, e os com
- os dois algarismos distintos. Nesse caso, temos $10 \times 9 = 90$ números, e metade deles podem ser usados.

Logo, o maior número possível de ramais em uso é $10 + 45 = 55$.

65. ***Horário de avião*** – Seja d a distância entre as duas cidades e seja h o horário de partida comum do ônibus, do trem e do avião. Como distância = velocidade $\times$ tempo, temos $d = 100\times(20-h)$ e $d = 300\times(14-h)$. Logo, $100\times(20-h) = 300\times(14-h)$, donde $h = 11$. Portanto, a distância entre as duas cidades é $d = 100 \times (20-11) = 900$ km. Assim, o avião gasta 1 hora da cidade A à cidade B e, portanto, o avião chega às 12 horas.

66. ***Discos de papelão*** – A opção correta é (c).

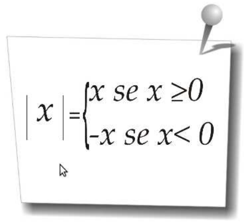
Lembre que a área de um círculo de raio r é πr^2. Se r é o raio dos círculos da figura, então a área não aproveitada é a área do quadrado, que é dada por $10 \times 10 = 100$ cm^2, menos a soma das áreas dos nove círculos, que é $9 \times \pi r^2$ cm^2. Ocorre que o raio de cada círculo é $r = 5/3$ cm, já que os diâmetros de três desses círculos somam um lado de 10 cm da folha de papelão. Assim, a área não aproveitada é dada por

$$100 - 9 \times \pi \times \left(\frac{5}{3}\right)^2 = 100 - 25\,\pi.$$

Usando a aproximação $\pi \approx 3{,}14$, resulta que a área não aproveitada mede

$$100 - 25\pi \approx 100 - 25 \times 3{,}14 = 21,5 \text{ cm}^2.$$

67. ***Afirmações absolutas***



(a) $|-108| = 108 > 100$, verdadeira.

(b) $|2-9| = |-7| = 7 = 9-2$, verdadeira.

(c) $|-6a| = |-6| \times |a| = 6\,|a|$, verdadeira.

(d) $|5-13| = |-8| = 8 \neq -8 = 5-13 = |5| - |13|$, falsa.

(e) $|a^2+5| = a^2+5$, verdadeira, pois $a^2+5 > 0$, para qualquer valor de a.

68. ***Fração radical*** – A opção correta é (e).

Elevando ao quadrado ambos os membros de $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = 5$, obtemos $\dfrac{x}{y} = 25$. Assim,

$$\frac{x+y}{2y} = \frac{1}{2} \times \frac{x+y}{x} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{y}\right) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{x}{y} + 1\right) = \frac{1}{2} \times (25+1) = 13.$$

69. ***Área de triângulo*** – A opção correta é (d).

Os triângulos $\triangle TKR$ e $\triangle GRS$ são proporcionais por serem triângulos retângulos com um ângulo agudo igual. Logo, temos $\dfrac{RS}{TK} = \dfrac{GS}{TR}$. Como $GS = TK$, segue que $(TK)^2 = RS \times TR = 2 \times 6 = 12$, ou seja, $TK = 2\sqrt{3}$. Também

$$KG = TR + RS = 6 + 2 = 8.$$

Assim, a área do triângulo $\triangle KGR$ mede

$$\frac{1}{2} \underbrace{KG}_{\text{base}} \times \underbrace{TK}_{\text{altura}} = \frac{1}{2}\left[\,8 \times 2\sqrt{3}\,\right] = 8\sqrt{3}\,.$$

70. ***Pares de inteiros*** – A opção correta é (c).

Temos

$$13 = \frac{a + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} + b} = \frac{\frac{ab+1}{b}}{\frac{1+ab}{a}} = \frac{(ab+1) \times a}{(1+ab) \times b} = \frac{a}{b}\,.$$

Logo, $a = 13\,b$. Como $a + b \leq 100$, segue que $14\,b \leq 100$ e, portanto, $b \leq 7{,}14$. Como b é inteiro, devemos ter $b \leq 7$. Logo, os pares são em número de sete, a saber,

$$(13,1), (26,2), (39,3), (52,4), (65,5), (78,6) \text{ e } (91,7).$$

71. ***Qual é a soma?*** – A opção correta é (c).

1º Caso: Se $x \leq 0$, então $|x| = -x$ e, pela primeira equação, temos $x + (-x) + y = 5$, ou seja, $y = 5$. Substituindo esse valor na segunda equação, obtemos $x = 6$, o que não é possível, pois estamos supondo $x \leq 0$. Logo, não há solução nesse caso $x \leq 0$.

2º Caso: Se $y \geq 0$, então $|y| = y$ e, pela segunda equação, temos

$$x + y - y = 6,$$

ou seja, $x = 6$. Substituindo esse valor na primeira equação, obtemos $y = -7$, o que não é possível, pois estamos supondo $y \geq 0$.

3º Caso: Se $x > 0$ e $y < 0$, então $|x| = x$ e $|y| = -y$. Pela primeira equação temos $2x + y = 5$ e, pela segunda, $x - 2y = 6$. Multiplicando $2x + y = 5$ por 2 e somando com $x - 2y = 6$, obtemos $5x = 16$, de modo que $x = 16/5$ e segue que $y = 5 - 2x = -7/5$. Assim, $x + y = 9/5$.

72. ***Círculo intermediário*** – A opção correta é (a).

A área do maior círculo é $13^2\,\pi = 169\,\pi$ e a do menor é $5^2\,\pi = 25\,\pi$, que também é a área do maior anel. Seja r o raio do círculo intermediário. Então, a área do maior anel é $169\,\pi - \pi\,r^2$. Logo, $169\,\pi - \pi\,r^2 = 25\,\pi$, ou seja, $\pi\,r^2 = 169\,\pi - 25\,\pi = 144\,\pi$, donde $r^2 = 144$ e $r = 12$ cm.

73. ***Frações incompletas***

(a) Observe que $21 \times 6 = 126$. Portanto, o numerador 21 foi multiplicado por 6 para obter o numerador 126 do primeiro quociente. Logo, o denominador _ _ também foi multiplicado por 6 para dar o denominador 8_ do primeiro quociente. O único número da forma 8_ que é divisível por 6 é 84, e $84 \div 6 = 18$. Podemos, então, completar as frações, obtendo

$$\frac{126}{8\underline{4}} = \frac{21 \times 6}{18 \times 6} = \frac{21}{\underline{1}\,\underline{8}}\,.$$

(b) Temos $4/5 = 0{,}8$ e queremos ter _ _8 $= 0{,}8 \times 33$_ . Observe que 33_ deve ser múltiplo de 5, portanto, só pode ser 330 ou 335. Entretanto,

$$0{,}8 \times 330 = 264 \neq \_\,\_8.$$

Assim, 33_ $= 335$, com $335 = 5 \times 67$, e _ _8 $= 268 = 4 \times 67$. Logo, só existe uma maneira de completar a fração,

$$\frac{\underline{2}\,\underline{68}}{33\underline{5}} = \frac{268 \div 67}{335 \div 67} = \frac{4}{5}\,.$$

74. ***Triângulos impossíveis***

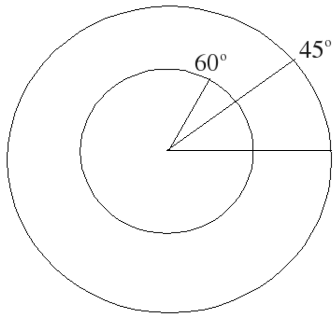
- Figura 1: Não está correta, porque a soma dos ângulos internos do triângulo não é $180°$. De fato, $74 + 42 + 42 = 158 < 180$.
- Figura 2: Não está correta, porque o comprimento dos lados não satisfaz o Teorema de Pitágoras: $18^2 = 324 \neq 369 = 144 + 225 = 12^2 + 15^2$. Logo, o triângulo não pode ser retângulo.
- Figura 3: Não está correta, porque um dos lados de um triângulo não pode ser menor do que a soma dos outros dois: $15 > 6 + 8$.

75. ***Razão de áreas*** – A opção correta é (b).

Como o arco de $60°$ do círculo I tem o mesmo comprimento que o arco de $45°$ no círculo II, concluímos que o raio do círculo I é menor do que o do círculo II. Denotemos por r e R os raios dos círculos I e II, respectivamente.

No círculo I, o comprimento do arco de $60°$ é igual a $1/6$ de seu comprimento, ou seja $2\pi r/6$. Analogamente, no círculo II, o comprimento do arco de $45°$ é igual a $1/8$ de seu comprimento, ou seja, $2\pi R/8$. Logo, $2\pi r/6 = 2\pi R/8$, ou seja, $r/R = 6/8 = 3/4$. Finalmente, temos

$$\frac{\text{área do círculo I}}{\text{área do círculo II}} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}\,.$$



76. ***Inequação errada*** – A opção correta é (c).

Nessa questão usaremos as propriedades de desigualdades seguintes. Podemos somar o mesmo número a ambos os membros de uma desigualdade sem alterar seu sentido. Podemos multiplicar ambos os membros de uma desigualdade por um número positivo sem alterar seu sentido. Assim,

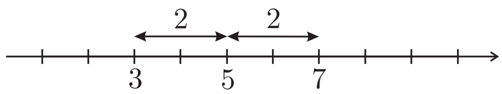
$$x > y \Rightarrow \begin{cases} x + z > y + z \text{ (somando } z \text{ qualquer a ambos os lados)} \\ xz > yz \text{ (muliplicando por } z > 0 \text{ em ambos os lados)} \end{cases}$$

Logo, (a) e (b) estão corretas, pois foi somado z e $-z$ a ambos os membros, bem como (d) e (e), pois ambos os membros foram multiplicados por $1/z^2$ e z^2, ambos positivos, já que $z \neq 0$. A opção (c) é falsa, porque z pode ser negativo. Por exemplo, se $x = 5, y = 3$ e $z = -2$, temos $5 > 3$ e, no entanto,

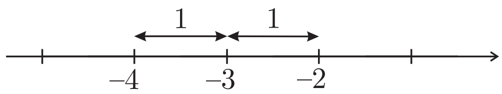
$$\underbrace{5 \times 2}_{xz} = -10 < -6 = \underbrace{3 \times (-2)}_{yz}\,.$$

77. ***Equações geométricas***

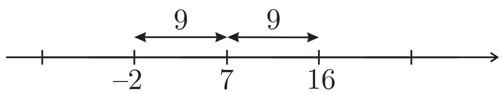
(a) $|x - 5| = 2$ significa que a distância de x a 5 é 2. Logo, as raízes são 3 e 7.



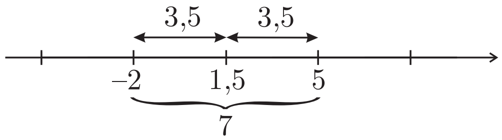
(b) $|x + 3| = 1$ significa que a distância de x a -3 é 1. Logo, as raízes são -4 e -2.



(c) Denotando $y = 3x$, a equação toma a forma $|y - 7| = 9$, o que equivale a dizer que a distância de y a 7 é 9. Logo, as raízes são -2 e 16. Como $y = 3x$, temos $3x = -2$ e $3x = 16$, de modo que as raízes da equação original são $x = -\frac{2}{3}$ e $x = \frac{16}{3}$.

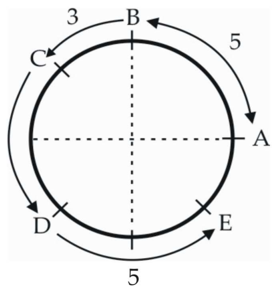


(d) As raízes da equação $|x+2| = |x-5|$ são os números equidistantes de -2 e de 5. No entanto, só pode haver um único número equidistante de dois outros, e que fica no meio do caminho entre os dois. Como a distância de 5 a -2 é 7, o ponto equidistante deve distar 3,5 de -2 e de 7. Logo, a solução é $x = 1{,}5$.



78. ***Pista circular*** – A opção correta é (c).

Vamos marcar os quatro pontos a partir de A. Como a pista mede 20 km, o comprimento de cada um dos quatro quadrantes é 5 km e podemos, então, marcar os pontos. Como $367 = 18 \times 20 + 7$, o carro deu 18 voltas completas e percorreu mais 7 km a partir de A. Logo, ele passa 2 km de B e para a 1 km de C. Portanto, C é o ponto mais próximo.



79. ***Maior comprimento*** – A opção correta é (e).

Note que

- AE é a hipotenusa de um triângulo de catetos com 5 cm e 9 cm;
- CF é a hipotenusa de um triângulo de catetos com 2 cm e 4 cm;
- AC é a hipotenusa de um triângulo de catetos com 3 cm e 4 cm;
- FD é a hipotenusa de um triângulo de catetos com 2 cm e 9 cm;
- CE é a hipotenusa de um triângulo de catetos com 2 cm e 5 cm.

Usando o Teorema de Pitágoras calculamos essas hipotenusas.

$$\begin{aligned}
\text{AE} &= \sqrt{5^2+9^2} = \sqrt{106} \approx 10{,}3 \\
\text{CF} &= \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20} \approx 4{,}47 \\
\text{CF} &= \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5 \\
\text{FD} &= \sqrt{2^2+9^2} = \sqrt{85} \approx 9{,}22 \\
\text{CE} &= \sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{29} \approx 5{,}39
\end{aligned}$$

Como CD $=$ 5 cm, obtemos AE $\approx$ 10,3, CD $+$ CF $\approx 5 + 4{,}47 = 9{,}47$, AC $+$ CF $\approx 5 + 4{,}47 = 9{,}47$, FD $\approx$ 9,22 e AC $+$ CE $\approx 5 + 5{,}39 = 10{,}39$. Logo, o maior segmento é AC $+$ CE, que mede 10,39 cm.

80. ***Desigualdade entre inteiros*** – A opção correta é (d).

Se $-3x^2 < -14$, então $3x^2 > 14$, ou $x^2 > \dfrac{1}{3}14 = 4\dfrac{2}{3}$. Como estamos olhando apenas para valores inteiros de x, então x^2 também é inteiro. Sendo $x^2 > 4\dfrac{2}{3}$, concluímos que x^2 é, no mínimo, 5. Dentre os números $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ somente quatro, a saber, $-5, -4, -3$ e 3 satisfazem $x^2 \geq 5$.

81. ***Equação cúbica*** – A opção correta é (d).

Observe que o polinômio cúbico dado é igual a $x\big(2\,007x^2+2\,006x+2\,005\big)$, portanto, $x=0$ é uma solução da equação dada e a opção (a) fica descartada. Como a equação é cúbica e $x=0$ é uma solução, a opção (e) fica descartada. Agora, para ver se a equação dada tem uma, duas ou três soluções, só precisamos ver se a equação de segundo grau $2\,007x^2+2\,006x+2\,005=0$ não tem solução, ou tem uma ou tem duas soluções. Mas o discriminante dessa equação é

$$\begin{aligned}\Delta &= 2\,006^2-4\times 2\,007\times 2\,005 = 2\,006^2-4(2\,006+1)(2\,006-1)\\ &= 2\,006^2-4(2\,006^2-1) = -3\times 2\,006^2+4<0,\end{aligned}$$

de modo que essa equação não possui raízes reais. Assim, a equação inicial tem uma única raiz real.

Observação: Uma outra maneira (e mais simples) de mostrar que $\Delta<0$ é observar que $2\,006<2\,007$ e $2\,006<4\times 2\,005$, portanto,

$$2\,006\times 2\,006<4\times 2\,005\times 2\,007 \quad \text{e} \quad 2\,006^2-4\times 2\,005\times 2\,007<0.$$

82. ***O perfume de Rosa*** – O volume de um cilindro é o produto da área da base pela altura. Como o raio da base mede 7 cm, a área da base é $\pi\times 7^2$ e, então, o volume do vidro é

$$\pi\times 7^2\times 10\text{ cm}^3 = 490\pi\text{ cm}^3 = \frac{490\pi}{1\,000}\text{ dm}^3 = 0{,}49\,\pi\text{ litros},$$

lembrando que $1\,000\text{ cm}^3 = 1\text{ dm}^3 = 1$ litro. Depois de duas semanas, restaram 0,45 litros de perfume, de modo que ela gastou $(0{,}49\,\pi-0{,}45)$ litros. Portanto, a fração que representa o volume gasto é

$$\frac{\text{volume gasto}}{\text{volume total}} = \frac{0{,}49\,\pi-0,45}{0,49\,\pi} = \frac{49\,\pi-45}{49\,\pi}\,.$$

83. ***Igualdade com inteiros*** – Como $2^n=m^2-1=(m+1)(m-1)$, estabelecemos que $m-1$ e $m+1$ são potências de 2. Como a diferença de $m+1$ e $m-1$ é 2, a única solução possível é $m-1=2$ e $m+1=2^2$, donde $m=3$. Assim, $2^n+1=3^2=9$ e obtemos $n=3$. A resposta é $m=n=3$.

84. ***O caminho da pulga*** – No primeiro pulo, a pulga percorre $10\times\left(\frac{1}{2}\right)$ m, no segundo pulo, ela percorre $10\times\left(\frac{1}{2}\right)^2$ m, e assim por diante. Depois de 7 pulos, a pulga terá percorrido

$$\begin{aligned}&10\Big(\frac{1}{2}\Big)+10\Big(\frac{1}{2}\Big)^2+10\Big(\frac{1}{2}\Big)^3+10\Big(\frac{1}{2}\Big)^4+10\Big(\frac{1}{2}\Big)^5+10\Big(\frac{1}{2}\Big)^6+10\Big(\frac{1}{2}\Big)^7\\ &= 10\left[\frac{1}{2}+\Big(\frac{1}{2}\Big)^2+\Big(\frac{1}{2}\Big)^3+\Big(\frac{1}{2}\Big)^4+\Big(\frac{1}{2}\Big)^5+\Big(\frac{1}{2}\Big)^6+\Big(\frac{1}{2}\Big)^7\right]\\ &= 10\times\frac{2^6+2^5+2^4+2^3+2^2+2+1}{2^7} = 10\times\frac{127}{128}\approx 9{,}9.\end{aligned}$$

Logo, em 7 dias, ela terá percorrido, aproximadamente 9,9 m. Em geral, depois de n dias, a pulga terá percorrido

$$10\Big(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\Big)\text{ metros.}$$

Para calcular a soma acima, note que $\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}$ é a soma dos n termos de uma progressão geométrica cujo primeiro termo é $a_1 = 1/2$ e cuja razão é $q = 1/2$. A fórmula para essa soma é

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{1/2(1-1/2^n)}{1-1/2} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Assim,

$$10\left(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right) = 10\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = 10 - \frac{10}{2^n}\,.$$

Tomando $n = 10$, obtemos

$$10 - \frac{10}{2^{10}} = 10 - \frac{10}{1\,024} = 10 \times \frac{1\,023}{1\,024} \approx 9{,}99.$$

Portanto, ao final do décimo dia, a pulga terá percorrido, aproximadamente, 9,99 metros.

A pulga estará a menos de 0,001 m do final do caminho quando ela já tiver percorrido, pelo menos, $9{,}999 = 10 - 0{,}001$ metros, ou seja, quando

$$10 - \frac{10}{2^n} \geq 10 - 0{,}0001,$$

o que equivale a $0{,}001 \geq 10/2^n$, ou $2^n \geq 10/0{,}001 = 10\,000$.

Agora, $2^{13} = 2^{10} \times 2^3 = 1\,024 \times 8 = 8\,192 < 10\,000 < 16\,384 = 2^{14}$, de modo que devemos tomar $n = 14$ e a pulga estará a menos do que 0,001 m do final do caminho a partir do décimo quarto dia.

85. ***Uma soma alternada*** – A opção correta é (d).

A expressão $(-1)^{n+1}$ na definição de S_n tem valor 1 se n for par e tem valor -1 se n for ímpar.

Solução 1: Associando parcelas consecutivas duas a duas, obtemos uma soma de várias parcelas iguais a -1: $(1-2)+(3-4)+(5-6)+\cdots$. Logo,

$$S_{1\,992} = \underbrace{(1-2)+(3-4)+\cdots+(1\,991-1\,992)}_{1\,992\div 2=996 \text{ parcelas}} = (-1)\times 996 = -996$$

e

$$S_{1\,993} = (1-2)+(3-4)+\cdots+(1\,991-1\,992)+1\,993 = -996+1\,993 = 997.$$

Assim, $S_{1\,992} + S_{1\,193} = -996 + 997 = 1$.

Solução 2: Como

$$S_{2n} = \underbrace{(1-2)+(3-4)+(5-6)+\cdots+\big[2n-(2n+1)\big]}_{n \text{ parcelas iguais a } -1},$$

obtemos $S_{2n} = -n$ e $S_{2n+1} = S_{2n}+(2n+1) = -n+2n+1 = n+1$. Assim, $S_{2n}+S_{2n+1} = 1$.

86. ***O raio da circunferência*** – A opção correta é (c).

Solução 1: Se o raio é r, então o comprimento de um arco de θ graus é $\dfrac{2\pi}{360}\theta\, r$. Assim, no problema dado, temos que

$$2\,000\,\mathrm{m} = \frac{2\pi}{360}\,300\,r = \frac{5\,\pi}{3}\,r\,,$$

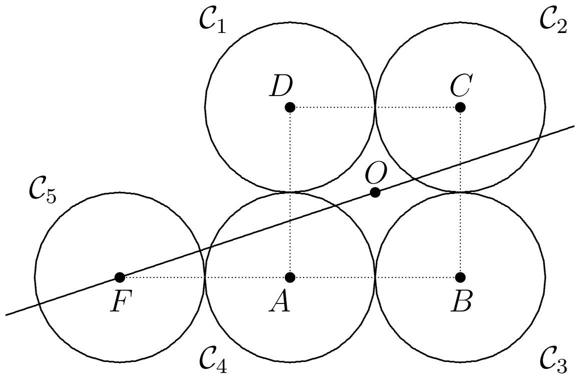
portanto $r = 2\,000 \times (3/5\pi) \approx 382{,}17$ m.

Solução 2: Como a circunferência tem 360°, um arco de 300° representa 5/6 da circunferência, portanto, seu comprimento de 2 km é 5/6 do comprimento da circunferência, isto é, $(5/6) \times 2\,\pi\, r = 2\,000$ m, portanto

$$r = \frac{2\,000 \times 6}{10\,\pi} = \frac{1\,200}{\pi} \approx 382{,}17 \text{ m.}$$

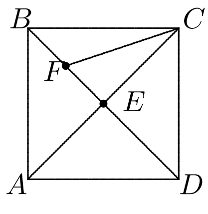
87. ***Quatro passageiros*** – O passageiro que quer ficar na janela tem três possíveis lugares para se sentar, o seguinte pode-se sentar em qualquer lugar livre, tendo, portanto, três possíveis lugares; o seguinte tem dois possíveis lugares e o último não tem escolha. Concluímos que o número dessas formas de se sentar é $3 \times 3 \times 2 = 18$.

88. ***Os cinco círculos*** – Observemos que qualquer linha que passe pelo centro O do quadrado $ABCD$, divide a área formada pelos círculos $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ e $\mathcal{C}_4$ pela metade. Por outro lado, qualquer linha reta que passe pelo centro F do círculo $\mathcal{C}_5$, divide a área desse círculo pela metade. Assim, a reta procurada é a reta FO.



89. ***O triângulo e o quadrado*** – As diagonais do quadrado $ABCD$ dividem o quadrado em 4 triângulos iguais, portanto, a área do triângulo $\triangle BCE$ mede uma quarta parte da área do quadrado, ou seja,

$$1 \div 4 = 0{,}25 \text{ cm}^2.$$



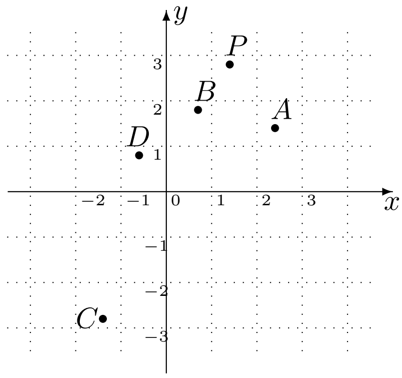
Como o comprimento de BF é a metade de BE e CE é a altura comum às bases BF e BE, concluímos que a área do triângulo $\triangle CBF$ necessariamente é a metade da área do triângulo $\triangle CBE$. Assim, a área do triângulo $\triangle CBF$ é 0,125 cm^2.

90. ***Uma refeição*** – Se S corresponde ao número de sanduíches e P ao número de pratos de refeição, então $5S + 7P = 90$ e, portanto,

$$P = \frac{90 - 5S}{7} = 5 \times \frac{18 - S}{7}\,.$$

Como queremos soluções inteiras não-negativas P e Q, vemos que 7 deve dividir $18-S$. Assim, S só pode ser 4, 11 ou 18 e, nesses casos, P é igual a 10, 5 ou 0, respectivamente. Portanto, temos somente três formas de fazer a compra sem receber troco, a saber, 4 sanduíches e 10 pratos, 11 sanduíches e 5 pratos, ou 18 sanduíches e nenhum prato.

91. ***Plano Cartesiano*** – Somando 1 à abscissa a do ponto $P=(a,b)$ transladamos esse ponto uma unidade para a direita, trocando a por $-a$ refletimos esse ponto pelo eixo y e dividindo a por 2, transladamos esse ponto à metade de sua distância do eixo x. Analogamente, trocar a ordenada b de P por $b-1$, ou $b-2$, translada P uma ou duas unidades para baixo, trocar b por $-b$ reflete o ponto pelo eixo x e trocar b por $b/2$ translada P para o ponto à metade de sua distância do eixo y. A figura mostra P junto com os quatro pontos $A=(a+1,b/2)$, $B=(a/2,b-1)$, $C=(-a,-b)$ e $D=(1-a,b-2)$ no plano cartesiano.



92. ***Soma dos terminados em 9*** – A soma das k primeiras parcelas de uma progressão aritmética é dada por $S_k=\frac{1}{2}(a_1+a_k)\,k$, em que a_1 e $a_k=a_1+(k-1)\,r$ são o primeiro e último termos, respectivamente, e r é a razão. Por exemplo, temos

$$1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}\big[1+(n-1)\big](n-1)=\frac{1}{2}n(n-1).$$

A soma dada é a de uma progressão aritmética de n parcelas com primeiro termo $a_1=9$ e razão $r=10$, de modo que temos $a_n=9+(n-1)\,10$ e, portanto,

$$S_n=\frac{1}{2}\Big[9+9+(n-1)\,10\Big]\,n=9n+(n-1)\,5n=5n^2+4n.$$

Como queremos $S_n\geq 10^5$, precisamos encontrar o menor inteiro positivo n tal que $5n^2+4n\geq 10^5$ ou, equivalentemente, $5n^2+4n-10^5\geq 0$. Para isso, resolvemos a equação de segundo grau $5x^2+4x-10^5=0$, obtendo as soluções

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16+20\times 10^5}}{10},$$

e a raiz positiva $x_1=\frac{1}{10}\big[-4+\sqrt{2\,000\,016}\,\big]\approx 141{,}02$. Como $5x^2+4x-10^5$ é positivo fora das raízes, por ter coeficiente dominante $5>0$, resulta que $n=142$ é o menor inteiro positivo n para o qual S_n é maior do que 10^5.

93. ***Três cilindros*** – O volume de um cilindro de raio R e altura h é dado por $\pi\,R^2h$.

(a) Os três volumes são $V_1=\pi\times 10^3=1\,000\,\pi$, $V_2=\pi\times 5^2\times 10=250\,\pi$ e $V_3=\pi\times 5^2\times 20=500\,\pi$, portanto, $V_1>V_3>V_2$.

(b) Como os cilindros V_2 e V_3 têm o mesmo raio, basta manter o raio do cilindro em 5 cm e a altura entre 10 e 20 cm; por exemplo, $h=15$ cm. Nesse caso, o volume V_4 do novo cilindro é $\pi\times 5^2\times 15=375\,\pi$ cm^3.

(c) Para construir um cilindro de volume V_5 entre V_1 e V_3, podemos tomar a menor das duas alturas, que é 10 cm, e diminuir o raio do cilindro de maior volume de 10 para 8 cm, obtendo um cilindro de volume $V_5 = \pi \times 8^2 \times 10 = 640\,\pi$ cm^3.

94. ***Porcentagem de mortalidade*** – A opção correta é (a).

A proporção de toda a população que fica doente da enfermidade é $\dfrac{15}{100}$ e, entre os que ficam doentes, a proporção dos que morrem é $\dfrac{8}{100}$. Assim, a proporção da população que morre pela doença é $\dfrac{15}{100} \times \dfrac{8}{100}$, o que corresponde a

$$\frac{15 \times 8}{100^2} = \frac{120}{10\,000} = \frac{1{,}2}{100} = 1{,}2\%.$$

95. ***Agenda de aulas*** – Se a aula da manhã é segunda ou sexta (em qualquer um dos três horários), então o dia da aula de tarde pode ser escolhido de três formas diferentes (em qualquer um dos dois horários), portanto, temos $2 \times 3 \times 3 \times 2 = 36$ formas diferentes de escolher o horário. No caso em que a aula de manhã seja no sábado, o dia da aula da tarde pode ser qualquer dia de segunda a quinta, portanto, temos $3 \times 4 \times 2 = 24$ possíveis formas de escolher o horário. Por último, se a aula da manhã é terça, quarta ou quinta, então a aula da tarde só pode ser escolhida de duas formas, portanto, temos $3 \times 3 \times 2 \times 2 = 36$ formas de escolher o horário. Assim, Eliane pode escolher seu horário de $36 + 24 + 36 = 96$ formas distintas.

96. ***Jogo de Cartas*** – A estratégia abaixo permite realizar o jogo com 17 movimentos. Em cada movimento, o primeiro número indica a pilha da qual a carta é tomada e o segundo a pilha em que a carta é colocada. Por exemplo, o primeiro movimento é (1) e 4 sobre 2 significa pegar a carta superior da pilha 4 e colocar sobre a pilha 2.

(1) 4 sobre 2	(2) 4 sobre 3	(3) 4 sobre 2	(4) 3 sobre 4	(5) 3 sobre 4	(6) 1 sobre 4
(7) 3 sobre 4	(8) 1 sobre 3	(9) 1 sobre 4	(10) 2 sobre 1	(11) 2 sobre 4	(12) 2 sobre 3
(13) 2 sobre 1	(14) 2 sobre 1	(15) 4 sobre 2	(16) 4 sobre 2	(17) 4 sobre 2	

O movimento 2 também poderia ser 4 sobre 1, o movimento 4 poderia ser 1 sobre 4, o movimento 5 poderia ser 1 sobre 4, o movimento 6 poderia ser 3 sobre 4. Os movimentos 4, 5 e 6 poderiam ser permutados em qualquer ordem. Teríamos, assim, pelo menos, seis maneiras de realizar o jogo com 17 movimentos.

Esse jogo poderia ser realizado com um número menor de movimentos?

97. ***Frações inteiras*** – Como

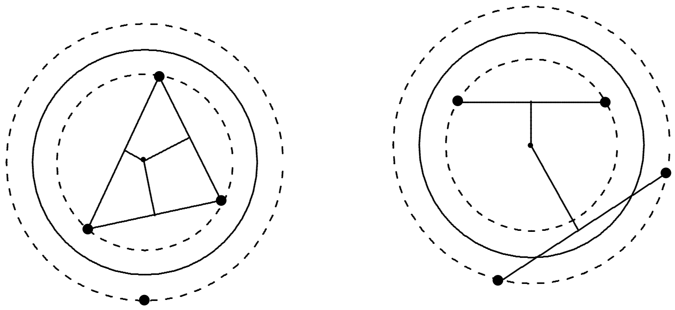
$$\frac{2n^2+4n+18}{3n+3} = \frac{2}{3}\left[\frac{(n^2+2n+1)+8}{n+1}\right] = \frac{1}{3}\left(2n+2+\frac{16}{n+1}\right),$$

segue que a expressão entre parênteses deve ser um múltiplo de 3 e, em particular, $n+1$ deve dividir 16. Assim, n pode ser 1, 3, 7 ou 15. Pela tabela ao lado, em cada um desses quatro casos, ou seja, para n igual a 1, 3, 7 ou 15, o quociente dado resulta ser um número inteiro.

n	$\dfrac{2n^2+4n+18}{3n+3}$
1	4
3	4
7	6
15	11

98. ***Quatro prefeitos e um círculo*** – O número de rodovias é igual ao número de pontos que podem ser o centro de um círculo (rodovia) que seja equidistante de quatro pontos (cidades) dados. Como nenhum círculo passa pelos quatro pontos dados, se algum círculo for equidistante dos quatro pontos, esse círculo não pode deixar todos os quatro pontos do lado de dentro ou todos do lado de fora, de modo que deve dividir o conjunto dos quatro pontos em dois, sem passar por algum deles. Assim, só podemos ter três tipos de configuração, de acordo com o número de pontos dentro e fora do círculo. No primeiro, o círculo equidistante deixa três pontos dentro e um fora; no segundo, dois dentro e dois fora e, no terceiro, um dentro e dois fora.

Nas figuras abaixo estão ilustrados os dois primeiros tipos, em que o círculo contínuo é o equidistante.



Na primeira figura, o centro do círculo equidistante coincide com o centro do círculo circunscrito ao triângulo formado pelos três pontos internos. Essa mesma configuração ocorre no terceiro tipo, em que o centro do círculo equidistante coincide com o centro do círculo circunscrito ao triângulo formado pelos três pontos externos. Assim, nesses dois tipos, o número de círculos equidistantes é igual ao número de triângulos que podemos formar com três dentre os quatro pontos, ou seja, quatro.

Na segunda figura, o centro do círculo equidistante está na mediatriz dos dois pontos internos e, também, na mediatriz dos dois pontos externos. Assim, nesse tipo, o número de círculos equidistantes é igual ao número de maneiras de dividir o conjunto de quatro pontos em dois conjuntos de dois pontos cada um, ou seja, três.

Logo, o número possível de projetos de rodovias circulares equidistantes das quatro cidades é $4+3=7$.

99. ***Fatoriais*** – Queremos $a\,b\,c = a! + b! + c!$ com algarismos $0 \leq a, b, c \leq 9$. Como $0! = 1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$ e $4! = 24$, algum dos algarismos a, b ou c deve ser maior do que 4, pois $0! + 1! + 2! + 3! + 4! = 34$ só tem dois dígitos. Se algum dos algarismos a, b ou c for maior do que ou igual a 6, teremos $a\,b\,c = a! + b! + c! > 6! = 720$, o que acarreta que algum dos algarismos a, b ou c é, pelo menos, igual a 7; mas então $a\,b\,c = a! + b! + c! > 7! = 5\,040$ tem, pelo menos, quatro dígitos, o que é uma impossibilidade.

Assim, algum dentre a, b e c é igual a 5 e os demais são menores do que 5. O menor número possível é $5! + 1! + 0! = 120 + 1 + 1 = 122$ e o maior número possível é $5! + 3! + 4! = 120 + 6 + 24 = 150$. Logo, o algarismo a das centenas é 1. Se o algarismo b das dezenas for 5, então $c \leq 4$ e

$$1! + 5! + c! = 1 + 120 + c! = 121 + c! \leq 121 + 4! = 121 + 24 = 145 \neq 15\,c.$$

Se o algarismo b das dezenas for 0, 2 ou 3, então $b!$ é igual a 1, 2 ou 6 e, como necessariamente $c = 5$, temos que $1! + b! + 5! = 1 + b! + 120 = 121 + b!$ é igual a 122, 123 ou 127, todos diferentes de $1b\,5$. Resta apenas a opção $b = 4$ e $c = 5$. Nesse caso, efetivamente $1! + 4! + 5! = 1 + 24 + 120 = 145$, como queríamos. Os três números inteiros são $a = 1, b = 4$ e $c = 5$.

100. ***O Riquinho*** – Os 1 000 reais de Riquinho foram repartidos em parcelas crescentes a partir de 1, de modo que $1+2+3+\cdots+n \leq 1\,000$. Como $1+2+3+\cdots+n$ é a soma dos n primeiros números inteiros a partir de 1, temos $1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2}(1+n)n$. Assim, queremos encontrar o maior n tal que $\frac{1}{2}(1+n)n = 1+2+3+\cdots+n \leq 1\,000$, ou seja, tal que $n^2 + n - 2\,000 \leq 0$.

Como $n^2 + n - 2\,000$ é igual a $-2\,000$ para $n = 0$ e o coeficiente dominante desse polinômio é $1 > 0$, sabemos que os valores de $n^2 + n - 2\,000$ são negativos para todo n entre 0 e a raiz positiva do polinômio quadrático $x^2 + x - 2\,000$. Pela fórmula de Bhaskara, a raiz positiva é dada por

$$x = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8\,000}}{2} \approx 44{,}22\,,$$

portanto $n^2 + n > 2\,000$ para $n \geq 45$. Assim, Riquinho distribuiu apenas 44 parcelas. Como Bernardo recebeu a segunda parcela, a quinta parcela $(5 = 2+3)$, a oitava parcela $(8 = 2 + 2 \times 3)$, e assim por diante, também recebeu a última, já que $44 = 2 + 14 \times 3$, num total de

$$2 + 5 + 8 + 11 + \cdots + 44 = \frac{1}{2}(44 + 2) \times 15 = 23 \times 15 = 345 \text{ reais.}$$

Observação: Depois de distribuir as 44 parcelas, ainda sobram

$$1\,000 - \frac{1}{2}(44 \times 45) = 1\,000 - 990 = 10$$

dos 1 000 reais de Riquinho.

101. ***Retângulo com dimensões inteiras*** – Sejam a e b os comprimentos dos lados do retângulo. Supondo $a \leq b$, temos $b^2 < a^2 + b^2 \leq 2b^2$, pois $a^2 \leq b^2$. As diagonais do retângulo medem $\sqrt{1\,993}$, portanto, pelo Teorema de Pitágoras, $a^2 + b^2 = 1\,993$. Assim, $b^2 < 1\,993 \leq 2b^2$, ou seja, $996{,}5 \leq b^2 < 1\,993$. Assim,

$$31 < \sqrt{996{,}5} \leq b < \sqrt{1\,993} < 45\,.$$

Como b é um número inteiro, $32 \leq b \leq 44$. Além disso, $a \leq b$ e, como a também é um número inteiro, $1\,993 - b^2 = a^2$ deve ser um quadrado perfeito.

Para calcular os valores de $a^2 = 1\,993 - b^2$, com b variando de 32 a 44, calculamos primeiro $1\,993 - 32^2 = 969$ e observamos que

$$\begin{aligned} 1\,993 - 33^2 &= 1\,993 - (32+1)^2 = (1\,993 - 32^2) - (2 \times 32 + 1) \\ &= 969 - 65 = 904 \end{aligned}$$

e, em geral, $1\,993 - (n+1)^2 = (1\,993 - n^2) - (2n + 1)$. Desse modo, é fácil obter a tabela seguinte.

b	a^2	b	a^2	b	a^2	b	a^2	b	a^2	b	a^2	b	a^2
32	969	33	904	34	837	35	768	36	697	37	624	38	549
39	472	40	393	41	312	42	229	43	144	44	57		

Como 144 é o único quadrado perfeito da lista, a única solução é um retângulo de lados medindo 43 e 12 cm.

102. ***Múltiplos de 3 e quadrados perfeitos*** – Escrevendo a para um número qualquer da lista, sabemos que a é um múltiplo de 3 e que $a+1$ é um quadrado perfeito, ou seja, $a+1=k^2$, para algum inteiro positivo k. Assim, $a=k^2-1=(k-1)(k+1)$.

Como a é divisível por 3, então ou $k+1$ ou $k-1$ é divisível por 3. Logo, k só não pode ser divisível por 3 e, portanto, a cada três inteiros k consecutivos (começando em 2), dois deles fornecem um número da lista: de fato, $k=2=1\times 3-1$ dá o primeiro número $a=2^2-1=3$ da lista; $k=4=1\times 3+1$ dá $a=4^2-1=15$, que é o segundo; $k=5=2\times 3-1$ dá $a=5^2-1=24$, que é o terceiro; $k=7=2\times 3+1$ dá o quarto $a=7^2-1=48$, e assim por diante. Em geral, uma posição par $2n$ da lista é dada por $k=n\times 3+1$, portanto a $2\,006^{\underline{a}}$ posição par é dada por $k=1\,003\times 3+1=3\,010$. Assim, o múltiplo de 3 na $2\,006^{\underline{a}}$ posição da lista é $a=3\,010^2-1=9\,060\,099$.

103. ***Cinco cartas*** – Simone não precisa virar a carta que tem o número **2** porque o outro lado, vogal ou consoante, de qualquer forma cumpre a condição "*Se uma carta tem uma vogal numa face, então ela tem um número par na outra*".

$$\boxed{\mathbf{2}}\quad\boxed{\mathbf{3}}\quad\boxed{\mathbf{M}}\quad\boxed{\mathbf{A}}\quad\boxed{\mathbf{E}}$$

Ela também não precisa virar a carta com a letra **M**, já que, do outro lado, o número pode ser par ou ímpar que a condição é satisfeita. Entretanto, a carta que tem o número **3** precisa ser virada para comprovar que do outro lado tem uma consoante, bem como as cartas com as letras **A** e **E**, para comprovar que do outro lado o número é par. Assim, Simone precisa virar somente 3 cartas.

104. ***O lucro de uma companhia*** – A opção correta é (c).

Nos primeiros R\$ 1 000,00, a companhia tem lucro de $1\,000\times 6\%=60$ reais e, para os R\$ 5 000,00 restantes, tem lucro de $5\,000\times 5\%=250$ reais. Logo, o lucro da companhia nesse dia é de R\$ 310,00.

105. ***Sequência triangular*** – Observe que o $21^{\underline{o}}$ termo é a soma de 21 números consecutivos. Para descobrir quais são esses números, basta encontrar a primeira parcela do $21^{\underline{o}}$ termo que é a soma de 21 números consecutivos. Observamos que, a partir do segundo termo, a primeira parcela do

$$\begin{aligned}
2^{\underline{o}}\text{ termo é }2 &= 1+1,\ \text{a do}\\
3^{\underline{o}}\text{ termo é }4 &= 2+1+1,\ \text{a do}\\
4^{\underline{o}}\text{ termo é }7 &= 3+2+1+1,\ \text{a do}\\
5^{\underline{o}}\text{ termo é }11 &= 4+3+2+1+1,\ \text{a do}\\
6^{\underline{o}}\text{ termo é }16 &= 5+4+3+2+1+1,
\end{aligned}$$

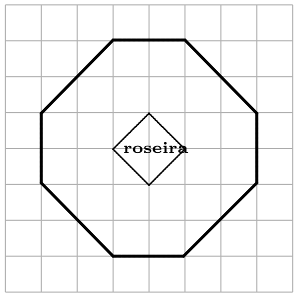
e assim por diante. Portanto, podemos ver que a primeira parcela do 21º termo é

$$20+19+\cdots+3+2+1+1=\frac{21\times 20}{2}+1=211$$

e que, portanto, o 21º termo é

$$211+212+\cdots+230+231=\frac{1}{2}(211+231)\times 21=221\times 21=4\,641.$$

106. ***O jardim octogonal*** – O comprimento total da cerca consiste na soma dos comprimentos dos contornos da roseira e do jardim, ambos utilizando diagonais dos quadradinhos da folha quadriculada. O contorno da roseira é formado por quatro diagonais e o do jardim por oito diagonais e oito lados. Assim, o comprimento total da cerca é de oito lados e doze diagonais de quadradinhos. Para descobrir o comprimento das diagonais, basta descobrir o comprimento dos lados dos quadradinhos. Para isso, utilizamos a informação fornecida relativamente à área do jardim.



Contando o número de quadradinhos do jardim, obtemos 24 quadradinhos inteiros e oito metades, o que é igual a 28 quadradinhos inteiros que representam 700 m^2 de área. Desse modo, cada quadradinho mede $700\div 28=25$ m^2 e, portanto, cada lado de quadradinho representa 5 m. Pelo Teorema de Pitágoras, a diagonal de cada quadradinho mede $d=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}$ m. Concluímos que o comprimento total da cerca é de $8\times 5+12\times 5\sqrt{2}=40+60\sqrt{2}$ m. Como o prefeito dispõe de R$ 650,00, cada metro dessa cerca pode custar, no máximo,

$$\frac{650}{40+60\sqrt{2}}=\frac{65}{4+6\sqrt{2}}\approx\frac{65}{4+6\times 1{,}414}=\frac{65}{12{,}484}\approx 5{,}21 \text{ reais.}$$

107. ***Número de caracteres*** – Na 1ª linha escrevemos os números de 1 a 9, cada um seguido de um espaço, o que ocupa 18 espaços; sobram 82 espaços. Cada número de dois algarismos mais um espaço ocupa três lugares na linha. Como $82=27\times 3+1$, completamos a 1ª linha com 27 números de dois algarismos, a partir do número 10. Assim, o último número da primeira linha é o 36 e sobra um espaço. Denotando cada espaço entre números por um traço, podemos representar a 1ª linha como segue.

$$1^{\text{a}}\text{ linha}:\ \underbrace{1-2-3-4-5-6-7-8-9-}_{18}\underbrace{10-\cdots-36--}_{81}$$

Mas $100=33\times 3+1$, portanto, podemos colocar 33 números de dois algarismos na segunda linha, cada um seguido de seu respectivo espaço, e no final da linha sobra um espaço.

$$2^{\text{a}}\text{ linha}:\ \underbrace{37-38-\cdots-69-}_{99}-$$

Na 3ª linha, colocamos os números de 70 a 99, ocupando $30\times 3=90$ espaços. Ocupamos os dez espaços restantes com os dois primeiros números de três algarismos, seguidos de um espaço; no final da linha, sobram dois espaços.

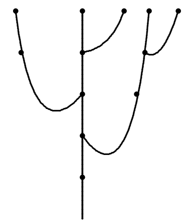
$$3^{\text{a}}\text{ linha}:\ \underbrace{70-71-\cdots-99-}_{90}\underbrace{100-101-}_{8}--$$

A partir da quarta linha, podemos colocar, em cada linha, $100 \div 4 = 25$ números de três algarismos com seus respectivos espaços. De 102 a 999, inclusive, temos $999 - 102 + 1 = 898$ números. Como $898 = 25 \times 35 + 23$, ocupamos 35 linhas, desde a 4ª até a 38ª, com esses números de três algarismos e ainda restam 23 desses números, que colocamos na 39ª linha, onde ocupam $23 \times 4 = 92$ espaços, restando oito espaços, que ocupamos com 1 000, restando três.

$$39^{\underline{a}} \text{ linha}: \underbrace{977 - \cdots - 999 -}_{92} \underbrace{1\,000 -}_{5} - - -$$

A partir da 40ª linha, podemos colocar, em cada linha, $100 \div 5 = 20$ números de quatro algarismos com seus respectivos espaços. Assim, nas 61 linhas restantes, podemos colocar exatamente $61 \times 20 = 1\,220$ números de quatro algarismos. Começando com 1 001, terminamos a 100ª linha com o número 2 220.

108. ***A árvore de Emília*** – Denotemos por g_n o número de galhos da árvore depois de n semanas. Como só depois de duas semanas aparece um galho, $g_2 = 1$. Na terceira semana esse galho produz um novo galho, ou seja, $g_3 = 2$. O número de galhos em uma semana é igual ao número de galhos que existiam na semana anterior, mais os galhos novos.



Entretanto, pela regra fornecida, os galhos novos nascem dos galhos que têm pelo menos duas semanas de idade, isto é, na semana $n+1$ tem um galho novo para cada galho que já existia na semana $n-1$. Assim, temos $g_{n+1} = g_n + g_{n-1}$, de modo que, a partir de $g_2 = 1$ e $g_3 = 2$, obtemos

$$\begin{aligned} g_4 &= 2 + 1 = 3 \\ g_5 &= 3 + 2 = 5 \\ g_6 &= 5 + 3 = 8 \\ g_7 &= 8 + 5 = 13 \\ g_8 &= 13 + 8 = 21 \end{aligned}$$

No fim de oito semanas, a árvore de Emília terá um total de 21 galhos.

109. ***Um teste vocacional***

(a) De exatas temos $232 + 112 = 344$ alunos e a probabilidade de escolher ao acaso um de exatas é $\dfrac{344}{1\,000} = 0{,}344$.

(b) Do sexo masculino temos $232 + 116 + 207 = 555$ alunos e a probabilidade de escolher ao acaso um da área de humanas é $\dfrac{116}{555} = 0{,}209$.

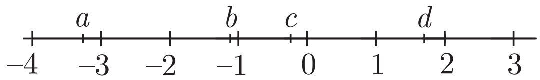
(c) De biológicas temos $207 + 180 = 387$ alunos e a probabilidade de escolher ao acaso um do sexo feminino é $\dfrac{180}{387} = 0{,}465$.

110. ***Dois setores circulares*** – Como $60° + 30° = 90°$, segue que a área destacada representa um quarto da área total do círculo. Como a área do círculo mede $20\ \text{cm}^2$, a área destacada mede $5\ \text{cm}^2$.

111. ***Compra de televisores*** – Digamos que Maria tenha encomendado n televisores, pagando R$ 1 994,00 por televisor. O total pago é $1\,994\,n$, e sabemos que nesse múltiplo de 1 994 não aparecem os algarismos 0, 7, 8 e 9. Para limitar o valor de n, observamos que
$$1\,994n = 2\,000n - 6n.$$
Se $6n < 300$, então o número $2\,000n - 6n$ tem 7 ou 8 ou 9 no algarismo das centenas (faça alguns exemplos, lembrando que $2\,000n$ termina com três zeros). Assim, devemos ter $6n \geq 300$, ou seja, $n \geq 50$.

Testando n igual a 50, 51, 52, 53, 54 e 55, obtemos 99 700, 101 694, 103 688, 105 682, 107 676 e 109 670, mas $n = 56$ dá 111 664. Assim, o menor número de televisores que Maria pode ter encomendado é 56.

112. ***Distância entre números*** – Observe que $|x - y|$ é igual à distância entre os pontos x e y e, em particular, $|x|$ é igual à distância entre x e a origem 0. Pela figura, temos
$$-4 < a < -3 < -2 < b < -1 < c < 0 < 1 < d < 2,$$
de modo que (a), (b), (c), (d) e (e) são verdadeiras e (f) é falsa, pois
$$|d| = d < 2 < 3 < |a|.$$



Também $1 < |a - b| < 3$, $1 < |c - d| < 3$, $0 < |b - c| < 2$ e $2 < |c - a| < 4$, o que acarreta que (g), (j) e (l) são verdadeiras e (h), (i) e (k) são falsas.

113. ***Cartões premiados*** – O cartão de dígitos $a\,b\,c\,d$ é premiado se $a + b = c + d$. Consideremos dois casos. Se o número de dígitos $c\,d$ de um cartão premiado for igual ao número de dígitos $a\,b$, então $a\,b\,c\,d = a\,b\,a\,b = a\,b \times 100 + a\,b = 101 \times a\,b$ e o número desse cartão é divisível por 101. Caso contrário, $c\,d \neq a\,b$ e, então há um outro cartão premiado, a saber, $c\,d\,a\,b$. A soma dos números desses dois cartões é
$$a\,b\,c\,d + c\,d\,a\,b = (a\,b \times 100 + c\,d) + (c\,d \times 100 + a\,b) = 101(a\,b + c\,d),$$
que também é divisível por 101. Como todo cartão premiado é de um desses dois tipos, a soma dos números de todos os cartões premiados é divisível por 101.

114. ***O preço da gasolina*** – A opção correta é (d).

Solução 1: O aumento do preço foi de $149{,}70 - 29{,}90 = 119{,}80$ reais, o que corresponde a
$$\frac{119{,}80}{29{,}90} \times 100\% = 400{,}66\%.$$

Solução 2: O preço praticamente passou de 30 para 150, isto é, foi multiplicado por 5, o que equivale ao preço passar de 100 para 500, caracterizando um aumento de 400%.

115. ***O triângulo de moedas*** – Supondo que o triângulo esteja formado por n linhas, foram usadas $1+2+3+\cdots+n$ moedas, ou seja,

$$\frac{1}{2}n(n+1) = 1+2+\cdots+n = 480-15 = 465,$$

o que fornece $n^2+n-930=0$. Resolvendo essa equação, obtemos

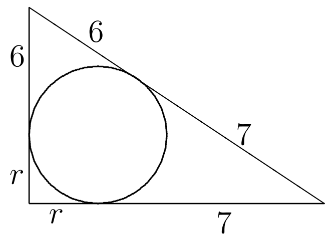
$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\times 930}}{2} = \frac{-1\pm 61}{2}\,.$$

Como $n=30$ é a única solução positiva dessa equação, o triângulo tem 30 linhas.

116. ***Circunferência e triângulo retângulo*** – Seja r o raio da circunferência inscrita no triângulo. Como o triângulo é retângulo, é fácil verificar que os catetos do triângulo medem $6+r$ e $7+r$ cm, conforme a figura. Pelo Teorema de Pitágoras, temos $(6+7)^2 = (r+6)^2+(r+7)^2$ e, desenvolvendo, resulta $169 = 13^2 = 2(r^2+13r)+85$, de modo que $r^2+13r=42$.

Assim, a área do triângulo mede

$$\frac{(r+6)(r+7)}{2} = \frac{r^2+13r+42}{2} = \frac{42+42}{2} = 42 \text{ cm}^2.$$



117. ***Soma de razão $\frac{1}{2}$*** – Como $S_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}$, segue que

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}\,,$$

de modo que $\frac{1}{2}S_n = S_n - \frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}$ e, portanto,

$$S_n = 1-\frac{1}{2^n}\,.$$

Como queremos $S_n > 0{,}99$, isso equivale a

$$1-\frac{1}{2^n} = S_n > 0{,}99 = 1-0{,}01 = 1-\frac{1}{100},$$

ou seja, a $2^n > 100$. Como $2^7 = 128 > 100 > 2^6 = 64$, $n=7$ é o menor n tal que $2^n > 100$, ou $S_n > 0{,}99$.

Observação: Note que, no início desta resolução, deduzimos o valor da soma da progressão geométrica de primeiro termo e razão ambos iguais a $1/2$, sem usar a fórmula dessa soma, a saber,

$$S_n = \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2^n}.$$

118. ***Soma de raízes quadradas***

(a) Como

$$r^2 = (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + 2(\sqrt{2})(\sqrt{3}) + (\sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6},$$

segue que $r^2 - 5 = 2\sqrt{6}$, ou $\sqrt{6} = \dfrac{r^2-5}{2}$.

(b) Pelo mesmo argumento,

$$\begin{aligned} s^2 &= (\sqrt{215}+\sqrt{300})^2 = 215 + 2\sqrt{215\cdot 300} + 300 \\ &= 515 + 10\sqrt{43\cdot 60} = 515 + 10\sqrt{2\,580} \\ &> 515 + 10\sqrt{2\,500} = 515 + 500 = 1\,015. \end{aligned}$$

119. ***Duas rodas*** – Enquanto a roda A dá 1 200 voltas, a roda B dá 1 500 voltas ou, equivalentemente, a roda A dá 4 voltas a cada 5 voltas da roda B. Denotemos por R o raio da roda A e por r o raio da roda B. O comprimento da roda A é $2\pi R$ e o da roda B é $2\pi r$, portanto, o comprimento de 4 voltas da roda A é $4\times(2\pi R)$ e o comprimento de 5 voltas da roda B é $5\times(2\pi r)$. Como esses dois comprimentos são iguais, temos que $4R = 5r$. Por outro lado, na figura vemos que $2(r+R) = 9$, de modo que

$$9 = 2(r+R) = 2r + 2\Big(\frac{5}{4}r\Big) = \Big(2+\frac{5}{2}\Big)r = \frac{9}{2}\,r,$$

e, assim, estabelecemos que $r = 2$ cm e $R = 2{,}5$ cm.

120. ***Dois divisores*** – A opção correta é (c).

O número $N = 2^{48}-1$ é muito grande mas, mesmo assim, podemos descobrir vários de seus divisores. Para isso, utilizamos a igualdade

$$(x-1)\big(x^{a-1}+x^{a-2}+\cdots+x+1\big) = x^a - 1.$$

Notamos que os divisores de 48 são 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 e 48. Tomando $x = 2^2$ e $a = 24$ na igualdade acima, estabelecemos que $x - 1 = 2^2 - 1 = 3$ é um divisor de $(2^2)^{24} - 1 = 2^{48} - 1 = N$. Analogamente, tomando $x = 2^3$ e $a = 18$, estabelecemos que $x - 1 = 2^3 - 1 = 7$ é um outro divisor de $(2^3)^{18} - 1 = 2^{48} - 1 = N$. Procedendo dessa maneira, verificamos que, para qualquer divisor d de 48, o número $2^d - 1$ é um divisor de N. Dessa forma, concluímos que $2^2 - 1 = 3$, $2^3 - 1 = 7$, $2^4 - 1 = 17$, $2^6 - 1 = 63$, $2^8 - 1 = 251$, e assim por diante, são divisores de N.

Além desses, podemos ainda obter outros divisores de N considerando os divisores pares $d = 2n$ de 48 e usando o produto notável

$$2^d - 1 = \big(2^n\big)^2 - 1 = \big(2^n+1\big)\big(2^n-1\big).$$

Como $2^d - 1$ é um divisor de N, também $2^n + 1$ é um divisor de N. Por exemplo, $d = 4 = 2\times 2$ fornece o divisor $2^2 + 1 = 5$ de N, $d = 6 = 2\times 3$ fornece o divisor $2^3 + 1 = 9$ de N, $d = 8 = 2\times 4$ fornece o divisor $2^4 + 1 = 17$ de N, $d = 12 = 2\times 6$ fornece o divisor $2^6 + 1 = 65$ de N, e assim por diante.

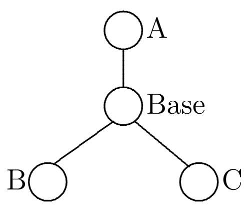
Note que já obtivemos dois divisores de $N = 2^{48} - 1$ entre 60 e 70, a saber, 63 e 65.

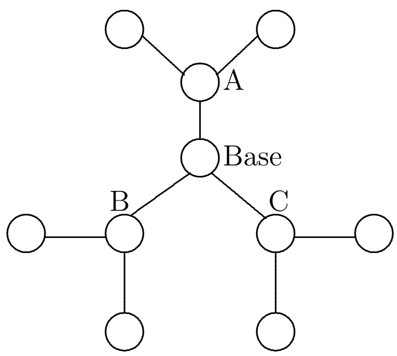
Observação: Com o auxílio de um computador, podemos ver que N é, realmente, um número muito grande, já que $N = 2^{48} - 1 = 281\,474\,976\,710\,655$, e obter sua fatoração, dada por

$$N = 2^{48} - 1 = 3^2 \times 5 \times 7 \times 13 \times 17 \times 97 \times 241 \times 257 \times 673.$$

Empregando o argumento exposto na resolução deste exercício, é possível encontrar vários divisores de números bastante grandes.

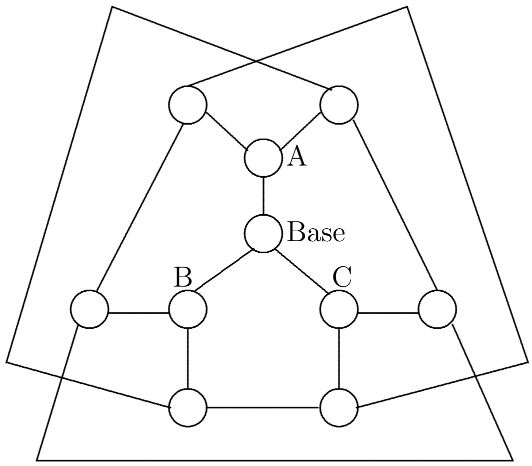
121. ***Rede de estações*** – O exemplo mostra que podemos conectar pelo menos sete estações dentro das condições propostas. Começamos com uma estação particular, e vamos pensar nela como se fosse a base da rede. Ela pode ser conectada a uma, duas, ou três estações, conforme mostra o primeiro dos dois diagramas a seguir. As estações A, B e C têm, ainda, duas linhas não utilizadas, portanto, podem ser conectadas a duas outras estações, como no segundo dos dois diagramas a seguir.





Agora, é impossível acrescentar mais estações, pois qualquer outra a mais não poderia ser conectada à base satisfazendo as condições do problema. Isso mostra que não podemos ter mais do que 10 estações.

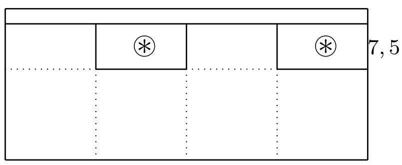
Vejamos, agora, se é possível montar uma rede com essas 10 estações. Observe, no diagrama acima, que apenas a base é conectada a todas as outras estações (através de um cabo ou de uma conexão via uma estação). As estações que estão nos extremos ainda possuem duas linhas não utilizadas, e agora vamos usá-las para *fechar* a rede. Veja o diagrama a seguir.



122. ***Bolas brancas e pretas*** – A opção correta é (b).

Inicialmente observe que, depois de cada substituição, o número de bolas brancas, ou permanece o mesmo, ou decresce de dois. Logo, o número de bolas brancas permanece par. Por outro lado, cada grupo de bolas removidas que contém pelo menos uma bola branca é substituído por outro grupo que também contém uma bola branca, portanto, o número de bolas brancas nunca é zero. Agora observe que a opção (b) é a única que inclui pelo menos duas bolas brancas, logo ela é a opção correta. Um modo de obter esse resultado é remover três bolas brancas 49 vezes até obter 149 pretas e duas brancas e, depois, remover uma preta e duas brancas 149 vezes.

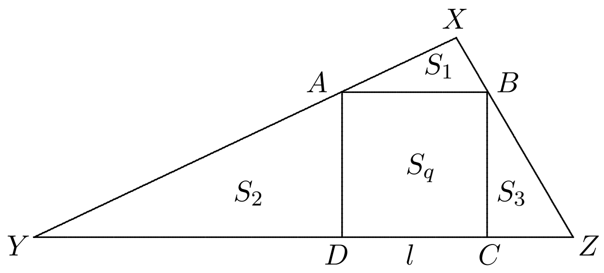
123. ***O cubo*** – Seja a a aresta do cubo que Alice quer construir. Como a área lateral do cubo mede $6a^2$ cm^2, devemos ter $6a^2 \leq 25 \times 60$, isto é, $a^2 \leq 250$ e, portanto, $a < 16$. Com $a = 15$ temos $4 = 60 \div 15$ quadrados de lado medindo 15 cm e sobra um retângulo de 60 por 10 cm. Podemos cortar fora um retângulo de 60 por 2,5 cm e os pedaços marcados com $\circledast$, de dimensões 15 por 7,5 cm. Assim, na figura, a linha pontilhada indica dobradura e a linha contínua indica corte; com os dois pedaços de cartolina marcados com $\circledast$ formamos a tampa.



124. ***Um quadrado e um triângulo***

Solução 1: Indiquemos por S_1, S_2 e S_3 as áreas dos triângulos $\triangle XAB$, $\triangle AYD$ e $\triangle BCZ$ e por S_q a área do quadrado $ABCD$, conforme indicado na figura. Se S denota a área do triângulo $\triangle XYZ$, então $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_q$ e como, por hipótese, $S_q = \big(7/32\big)\, S$, estabelecemos que

$$\frac{S_1+S_2+S_3}{S} = \frac{S-S_q}{S} = 1-\frac{S_q}{S}$$
$$= 1-\frac{7}{32} = \frac{25}{32}\,.$$



Como $\triangle XAB$ e $\triangle XYZ$ são triângulos semelhantes, a razão entre suas áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança, isto é,

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{XA}{XY}\right)^2.$$

Transladando horizontalmente o triângulo $\triangle BCZ$ de modo a justapô-lo ao triângulo $\triangle ADY$, obtemos um triângulo semelhante a $\triangle XYZ$, mas de área S_2+S_3. Assim,

$$\frac{S_2+S_3}{S} = \left(\frac{AY}{XY}\right)^2.$$

Somando esses dois quocientes obtidos e usando a proporção estabelecida acima, concluímos que

$$\frac{25}{32} = \frac{S_1+S_2+S_3}{S} = \frac{(XA)^2+(AY)^2}{(XY)^2} = \frac{(XA)^2+(XY-XA)^2}{(XY)^2}$$
$$= \frac{(XY)^2+2(XA)^2-2(XY)(XA)}{(XY)^2} = 1+2\left(\frac{XA}{XY}\right)^2 - 2\left(\frac{XA}{XY}\right),$$

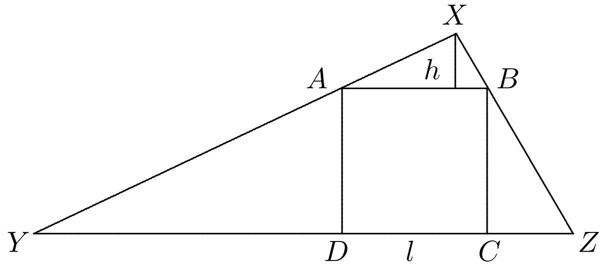
ou seja, a razão entre XA e XY procurada satisfaz a equação de segundo grau

$$2\left(\frac{XA}{XY}\right)^2 - 2\left(\frac{XA}{XY}\right) + \frac{7}{32} = 0\,.$$

Usando a fórmula de Bhaskara, obtemos dois valores possíveis para essa razão, a saber, $\dfrac{XA}{XY} = \dfrac{7}{8}$ e $\dfrac{XA}{XY} = \dfrac{1}{8}\,.$

Solução 2: Denotemos o comprimento do lado do quadrado $ABCD$ por l, a altura do triângulo $\triangle XYZ$ por H, a altura do triângulo $\triangle XAB$ por h e o comprimento do lado YZ por b. A área do quadrado é l^2 e a área do triângulo $\triangle XYZ$ é $\frac{1}{2}bH$. Como os triângulos XYZ e XAB são semelhantes, temos

$$\frac{l}{b} = \frac{h}{H} = \frac{XA}{XY}.$$



Portanto, $b = \dfrac{Hl}{h}$, a área do triângulo $\triangle XYZ$ é $\dfrac{1}{2}bH = \dfrac{H^2\,l}{2h} = \dfrac{(h+l)^2 l}{2h}$ e a razão procurada é dada por

$$\frac{XA}{XY} = \frac{h}{H} = \frac{h}{h+l} = \frac{1}{1+\frac{l}{h}}\,,$$

de modo que resta calcular a razão l/h.

Como a razão entre a área $\frac{(h+l)^2 l}{2h}$ do triângulo $\triangle XYZ$ e a área l^2 do quadrado é $32/7$, obtemos $7(h+l)^2 = 64hl$. Expandindo e dividindo por h^2, obtemos a equação quadrática

$$7\Big(\frac{l}{h}\Big)^2 - 50\Big(\frac{l}{h}\Big) + 7 = 0,$$

que tem soluções

$$\frac{l}{h} = \frac{50 \pm \sqrt{50^2 - 4\times 49}}{14} = \frac{25 \pm \sqrt{25^2 - 7^2}}{7} = \frac{25 \pm 24}{7}\,.$$

Assim, l/h tem dois possíveis valores, $1/7$ e 7 e, portanto, $\dfrac{XA}{XY}$ tem dois possíveis valores, $\dfrac{XA}{XY} = \dfrac{7}{8}$ e $\dfrac{XA}{XY} = \dfrac{1}{8}$.

125. ***A urna***

Solução 1: Os pares

$$\begin{array}{lllll} \{1,2\}, & \{1,3\}, & \{1,4\}, & \{1,5\}, & \{1,6\}, \\ \{2,3\}, & \{2,4\}, & \{2,5\}, & \{2,6\}, & \{3,4\}, \\ \{3,5\}, & \{3,6\}, & \{4,5\}, & \{4,6\}, & \{5,6\} \end{array}$$

são os únicos pares de bolas diferentes que podem ser retirados da urna. Logo, podem ser retirados da urna $5+4+3+2+1 = 15$ diferentes pares de bolas. Dentre esses, existem apenas 5 pares de bolas numeradas com números que diferem por uma unidade, a saber, $\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{4,5\}$ e $\{5,6\}$. Assim, a probabilidade que um desses pares seja retirado é $\dfrac{5}{15} = \dfrac{1}{3}$.

Solução 2: Observemos que se extrairmos a primeira bola com um número entre 2 e 5, então dentre as cinco bolas que ficam na urna, temos duas possíveis bolas que cumprem a condição do problema, portanto, nesse caso, a probabilidade que a segunda bola cumpra a condição é $\frac{2}{5}$ e a probabilidade que a primeira bola tenha um número entre 2 e 5 é $\frac{4}{6}$. Por outro lado, se a primeira bola extraída for 1 ou 6, só temos uma bola na urna que cumpre a condição, portanto, nesse caso, a probabilidade para a escolha da segunda bola é $\frac{1}{5}$ e a probabilidade da primeira bola ser 1 ou 6 é $\frac{2}{6}$. Assim, a probabilidade das bolas serem consecutivas é

$$\frac{4}{6}\times\frac{2}{5} + \frac{2}{6}\times\frac{1}{5} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

126. ***Soma das raízes de uma equação*** – Devemos considerar dois casos. Se $x+1 \geq 0$, então $|x+1| = x+1$ e a equação é $x^2+3x+2 = x+1$, ou seja, $x^2+2x+1 = 0$, que só possui a solução $x = -1$. Se $x+1 < 0$, então $|x+1| = -x-1$ e a equação é

$x^2 + 3x + 2 = -x - 1$, ou seja, $x^2 + 4x + 3 = 0$, que tem apenas a solução $x = -3$ no intervalo $x < -1$. Assim, as únicas soluções distintas da equação dada são -1 e -3, de modo que a soma de todas as raízes distintas da equação é -4.

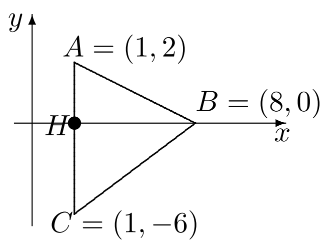
127. ***Produto de três números*** – Sejam $a, b, c, \ldots, i, j$ os números nos 10 círculos, conforme indicado no diagrama.

$$a \times b\,c \times d\,e\,f = g\,h\,i\,j$$

Observe que a, c e f não podem ser zero, pois $0 \times x = 0$, para qualquer x. entretanto, o produto dos três números é um número de quatro algarismos, portanto, $a\,b\,d < 10$ e os números que aparecem em $a\,b\,d$ são 1,2 e 3 ou 1,2 e 4. Observemos que a segunda opção é impossível de ocorrer, porque o mínimo produto que podemos obter nesse caso é $1 \times 23 \times 456 = 10\,488$, de modo que $a\,b\,d = 6$ e o produto é maior do que $6\,000$. Tampouco pode a ser 2 ou 3, porque nesse caso o mínimo valor que tem o produto é $2 \times 14 \times 356 = 9\,968$ e os outros produtos ficam maiores do que $10\,000$. Assim, $a = 1$. Continuando essa análise, chegaremos à solução dada no diagrama.

$$1 \times 2\,6 \times 3\,4\,5 = 8\,9\,7\,0$$

128. ***Área do triângulo*** – Para determinar a área de um triângulo, basta conhecer o comprimento de uma base e sua respectiva altura. Tomando AC como base, a altura corta AC no ponto $H = (1, 0)$, já que o segmento AC é vertical e o segmento HB é horizontal. Assim, a base AC mede 8 unidades e a altura BH relativa a essa base mede 7. Logo, a área do triângulo é $\frac{1}{2}\big(7 \times 8\big)2 = 28$ unidades de área.



129. ***Duas tabelas*** – Vemos que na primeira tabela cada linha é uma progressão aritmética de razão 3 e cada coluna é uma progressão aritmética de razão 7.

5	8	11	14	17
12	15	18	21	24
19	22	25	28	31
26	29	32	35	38
33	36	39	42	45

		39		
				87
56				
			★	

Digamos que na segunda tabela a razão das progressões aritméticas das linhas seja a e a das colunas seja b. Assim, obtemos $39 + 2a + 2b = 87$ e $39 - 2a + 3b = 56$.

$39-2a$	$39-a$	39	$39+a$	$39+2a$
$39-2a+b$				$39+2a+b$
$39-2a+2b$				87
56				
			★	

Somando essas duas equações, resulta $78+5b=143$, donde $b=13$. Subtraindo as duas igualdades que anteriormente foram somadas, obtemos $4a-b=31$. Segue que $a=11$. Assim, o número que estava na posição ★ era $39+a+4b=39+11+4\times 13=102$.

130. ***A sequência abc*** – Sabendo que $30=2(10+a)$, obtemos que $a=5$. Assim, $b=2(30+a)=2(30+5)=70$ e, portanto, $c=2(b+30)=2(70+30)=200$.

131. ***Perímetro e diagonal*** – A opção correta é (b).

Denotando por a e b os comprimentos dos lados do retângulo, temos $2a+2b=20$, de modo que $a+b=10$. O quadrado do comprimento da diagonal, dado pelo Teorema de Pitágoras, é $d^2=a^2+b^2$. Mas,

$$(a+b)^2+(a-b)^2=(a^2+2ab+b^2)+(a^2-2ab+b^2)=2a^2+2b^2=2d^2$$

e $(a+b)^2=100$, portanto $d^2=50-\frac{1}{2}(a+b)^2$. Assim, vemos que o mínimo do comprimento da diagonal ocorre quando $a=b$, caso em que $d=\sqrt{50}$.

132. ***As idades numa classe*** – Denotemos por a a idade comum dos alunos e por n o número de alunos dessa classe. Temos sete alunos com $a-1$ anos, dois com $a+2$ anos e os demais, ou seja, $n-9$ alunos, com a anos. Logo, a soma das idades de todos os alunos, que é 330, pode ser desdobrada em $330=7(a-1)+2(a+2)+(n-9)\,a=na-3$, de modo que $na=330+3=333=9\times 37$.

Como a classe tem mais do que 9 alunos, então $a=9$ e $n=37$, ou seja, a classe tem 37 alunos.

133. ***A mesa redonda*** – O perímetro de mesa ampliada é

$$140\times\pi+40\times 6\approx 140\times 3{,}14+240=679{,}60 \text{ cm}.$$

Se cada convidado precisa de 60 cm de espaço, poderão sentar-se à mesa, no máximo,

$$\frac{679{,}60}{60}\approx 11{,}3,$$

ou seja, 11 convidados.

134. ***Brincadeira com sete números***

Solução 1: Os sete números podem ser escritos como

$$\underbrace{n-3,n-2,n-1}_{3n-6},\ n,\ \underbrace{n+1,n+2,n+3}_{3n+6}\ .$$

Observando que $3n-6+12=3n+6$, estabelecemos que $n=12$. Logo, os números são $9+10+11+12=13+14+15$.

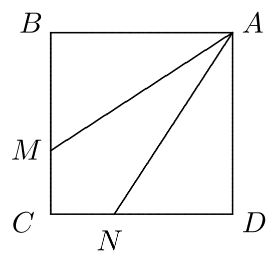
Solução 2: Sejam $n+1, n+2, \ldots, n+7$ os sete números consecutivos tais que

$$(n+1)+\cdots+(n+k)=(n+k+1)+\cdots+(n+7)$$

para algum k entre 1 e 6. Como todos os números à esquerda da igualdade são menores do que os números à direita, existem mais parcelas à esquerda, portanto, $k=6,5$ ou 4. Tomando $k=6$, obtemos $6n+1+2+3+4+5+6=n+7$, ou seja, $5n+14=0$, que não tem solução inteira. Também $k=5$ dá $5n+1+2+3+4+5=n+6+n+7$, ou seja, $3n+2=0$, que não tem solução inteira. Finalmente, com $k=4$ obtemos $4n+1+2+3+4=3n+5+6+7$, portanto, $n=8$ e $9+10+11+12=13+14+15$ é a única solução.

135. ***Um terreno compartilhado*** – Como as áreas dos triângulos $\triangle ABM$ e $\triangle ADN$ são iguais, temos

$$\tfrac{1}{2}(BM\times AB)=\tfrac{1}{2}(ND\times AD).$$



Como o terreno é quadrado, temos $AB=AD$, de modo que $BM=DN$ e, portanto, a figura $AMCN$ é simétrica em relação à diagonal AC. Logo, a área do triângulo $\triangle ACN$ é a metade da área do triângulo $\triangle ADN$. Agora, como esses triângulos têm a mesma altura, resulta $DN=2NC$ e, por simetria, $BM=2MC$. Concluímos que a distância ao vértice C do quadrado dos pontos M e N deve ser $1/3$ do comprimento do lado do quadrado.

136. ***As duas partículas*** – Denotemos as partículas por A e B e seja v a velocidade da partícula B. Supondo que A seja a mais rápida, temos que $v+2$ é a velocidade de A. Assim, o tempo que B demora para dar uma volta é $120/v$ e o tempo que A demora é $120/(v+2)$. Como esse tempo é três segundos inferior ao de B, temos a equação básica

$$\frac{120}{v}-3=\frac{120}{v+2}.$$

Simplificando, isso equivale a $v^2+2v-80=0$, cuja raiz positiva é

$$v=\frac{1}{2}\big[-2+\sqrt{4+320}\,\big]=-1+\sqrt{81}=8.$$

Portanto, a velocidade da partícula mais lenta é 8 m/s e a da mais rápida é 10 m/s.

137. ***Queda livre*** – No primeiro segundo, o corpo percorre 4,5 m e, como a distância percorrida aumenta 9,8 m a cada segundo em relação ao segundo anterior, o corpo percorre $4{,}5+9{,}8$ m no segundo segundo, $4{,}5+2\times 9{,}8$ m no terceiro segundo, $4{,}5+3\times 9{,}8$ m no quarto segundo e assim por diante, até o décimo primeiro segundo, em que o corpo percorre $4{,}5+10\times 9{,}8=102{,}5$ m. A distância total percorrida pelo corpo até o impacto é

$$\begin{aligned}&4{,}5+(4{,}5+9{,}8)+(4{,}5+2\times 9{,}8)+\cdots+(4{,}5+10\times 9{,}8)\\&\quad=4{,}5\times 11+9{,}8(1+2+\cdots+10)=49{,}5+9{,}8\times 55=588{,}5\text{ m}.\end{aligned}$$

138. ***Um caminho triangular*** – Se v representa a velocidade constante com que Janete caminha, então $v = (1\,992\text{ m})/(24\text{ min}) = 83\text{ m/min}$. Janete percorre o outro lado BC e a hipotenusa CA com a mesma velocidade de $v = 83$ m/min e gasta 2 horas e 46 minutos, o que é igual a 166 min. Assim, $BC + AC = 83 \times 166 = 13\,778$ m.

Mas, pelo Teorema de Pitágoras, a hipotenusa CA do triângulo satisfaz $(CA)^2 = (1\,922)^2 + (BC)^2$. Daí decorre que

$$\begin{aligned}(1\,992)^2 &= (CA)^2 - (BC)^2 = (CA+BC)(CA-BC)\\ &= 13\,778 \times (CA - BC),\end{aligned}$$

portanto $CA - BC = 1\,992^2/13\,778 = 288$ m. Assim, $CA + BC = 13\,778$ e $CA - BC = 288$. Subtraindo, obtemos $2BC = 13\,778 - 288 = 13\,490$ e, portanto, $BC = \frac{1}{2}13\,490 = 6\,745$ m.

139. ***O preço do feijão*** – A opção correta é (a).

Se b denota o preço final e a o preço inicial de um bem, então a variação é $b - a$ e o aumento percentual é

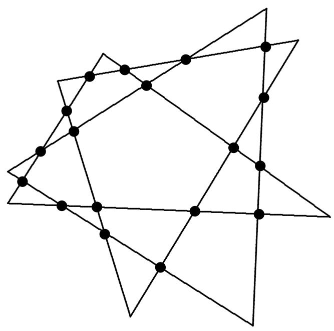
$$\frac{b-a}{a}.$$

Observe que os valores intermediários do bem não alteram a variação do aumento percentual num certo período. Usando apenas os dados de janeiro e de abril da tabela dada, obtemos os aumentos percentuais do

$$\begin{aligned}
&\text{feijão A:} \quad \frac{103{,}33 - 65{,}67}{65{,}67} = \frac{37{,}66}{65{,}67} = 0{,}57 = 57\%;\\
&\text{feijão B:} \quad \frac{109{,}50 - 73{,}30}{73{,}30} = \frac{36{,}20}{73{,}30} = 0{,}49 = 49\%;\\
&\text{feijão C:} \quad \frac{100{,}00 - 64{,}50}{64{,}50} = \frac{35{,}50}{64{,}50} = 0{,}55 = 55\%.
\end{aligned}$$

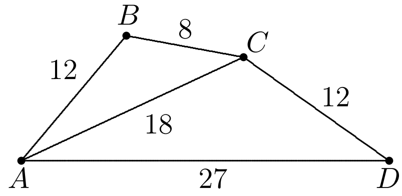
Portanto, o maior aumento percentual de preço foi o do feijão A e o menor foi o do feijão B.

140. ***Interseção de triângulos*** – Quando acrescentamos um novo triângulo a uma figura constituída de triângulos, ele corta cada um dos lados dos triângulos que já existiam em, no máximo, dois pontos. Inicialmente, começando com um só triângulo, não temos ponto de interseção algum. Acrescentando um segundo triângulo, introduzimos, no máximo, $2 \times 3 = 6$ pontos de interseção. Do mesmo modo, introduzindo um terceiro triângulo, introduzimos, no máximo, mais $2 \times 6 = 12$ pontos de interseção. Logo, três triângulos se intersectam em, no máximo, $6 + 12 = 18$ pontos. A figura mostra que esse caso de 18 pontos de interseção pode acontecer.



141. ***Comparar triângulos*** – De acordo com os dados do problema, temos

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{CD} = \frac{2}{3}\,.$$



Segue que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ACD$ têm seus lados proporcionais e, portanto, são semelhantes. Em particular, obtemos $B\widehat{A}C = C\widehat{A}D$.

142. ***Queima de velas*** – A opção correta é (c).

Como o verdadeiro comprimento das velas é irrelevante, podemos estipular qualquer tamanho para as velas, que a resposta será, sempre, a mesma. O mais simples é supor que ambas velas têm comprimento igual a uma unidade. Assim, a que queima em 3 horas queima à velocidade constante $1/3$ (de vela por hora) e a que queima em 4 horas queima à velocidade $1/4$ (de vela por hora). Logo, depois de algum tempo (em horas) t, uma queima $t/3$ (de vela) e a outra $t/4$ (de vela), de modo que o que sobra de uma vela depois de um tempo t é $1-t/3$ e da outra, $1-t/4$. Queremos saber quanto tempo decorre desde o instante $t=0$ até o momento em que o comprimento da vela que queima mais lentamente é o dobro do comprimento da que queima mais rapidamente, o que equivale a resolver a equação

$$1-\frac{t}{4} = 2\Big(1-\frac{t}{3}\Big) = 2-\frac{2t}{3}.$$

Como $\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{12}$, a única solução é $t=\dfrac{12}{5}=2\,\dfrac{2}{5}$ horas, o que equivale a 2 horas e 24 minutos. Assim, depois de 2 horas e 24 minutos, o comprimento de uma vela é o dobro do comprimento da outra. Como queremos que isso aconteça às 16 horas, as velas devem ser acesas às 13 horas e 36 minutos.

143. ***Uma distração*** – A opção correta é (b).

Solução 1: Seja x o número com que Júlia se distraiu. Ela deveria ter obtido $6x$ mas, com sua distração, obteve $x/6$. Logo, seu erro foi de $6\,x - x/6 = (35/6)x$ e, portanto, em termos percentuais, seu erro foi de $\dfrac{(35/6)x}{6\,x} = \dfrac{35}{36} \approx 0{,}9722 = 97{,}22\%$.

Solução 2: Se N é o valor que Júlia deveria ter obtido então, com seu erro, ela encontrou $N/36$, de modo que o erro absoluto cometido foi de $N - N/36 = (35/36)N$ e, portanto, o erro relativo foi de $\dfrac{35}{36}\times 100\% = 97{,}22\%$.

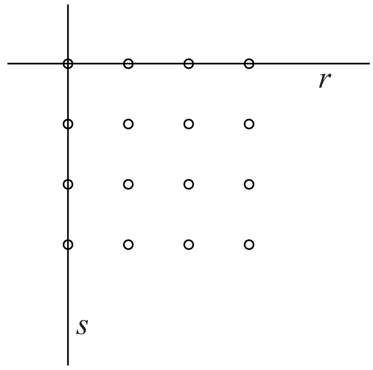
144. ***Problema de nota*** – Seja c o número de problemas resolvidos corretamente e seja e a soma do número de problemas resolvidos incorretamente e de problemas não resolvidos. Logo, $c+e=80$ e $5c-3e$ é o número de pontos do aluno na avaliação. No caso presente,

$$\begin{cases} c+e &= 80 \\ 5c-3e &= 8 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos $c=31$ e $e=49$. Logo, o aluno resolveu 31 problemas corretamente.

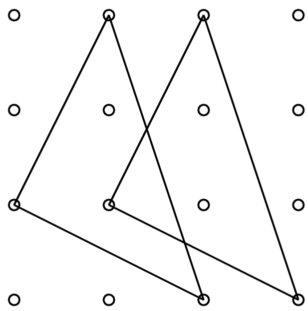
145. ***Quadrados e triângulos***

(a) Os únicos quadrados que não têm nenhum de seus lados paralelos nem à reta r, nem à reta s, são os do tipo 1 e os do tipo 2 (ver figuras).



Assim, há um total de seis quadrados, sendo quatro do tipo 1 e dois do tipo 2.

(b) Digamos que a distância vertical ou horizontal entre dois pontos contíguos do reticulado seja igual a uma unidade. O total desses triângulos é dezesseis, cada um deles com catetos iguais a $\sqrt{5}$ unidades e hipotenusa de $\sqrt{10}$ unidades. De fato, cada um dos quadrados do tipo 2, como visto em (a), nos dá quatro triângulos, por divisão ao longo de cada uma das duas diagonais obtendo, assim, oito triângulos. Os oito triângulos restantes são obtidos através de uma única translação horizontal ou vertical de cada um dos anteriores. Na figura, exemplificamos a única translação possível de um dos quatro triângulos obtidos de um quadrado do tipo 2.

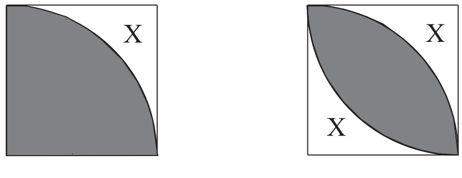


146. ***Cálculo de áreas***

(a) A área hachurada corresponde a um quarto da área de um círculo de raio r, portanto, a área hachurada é igual a $\dfrac{1}{4}\pi r^2$.

(b) Observe que a área da região marcada com X, que não está hachurada na figura (a), é igual à área do quadrado todo, diminuída da área da região hachurada, ou seja,

$$\text{área da região marcada com X} = r^2 - \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{1}{4}(4-\pi)r^2\,.$$



Voltando ao item (b), a área da região hachurada na figura (b) é igual à área do quadrado todo, menos duas vezes a área da região marcada com X, ou seja, é igual a

$$\text{área da região hachurada} = r^2 - 2 \times \frac{1}{4}(4-\pi)r^2 = \frac{1}{2}\pi\, r^2 - r^2\,.$$

147. ***Sequência de algarismos*** – Os números com um algarismo formam os 9 primeiros termos da sequência. Os 90 números de dois algarismos formam os 180 termos seguintes. Depois vêm os 2 700 termos correspondentes aos números de três algarismos, seguidos pelos 36 000 termos correspondentes aos números de quatro algarismos e finalmente, os 450 000 termos que são os correspondentes aos números de cinco algarismos. Logo, enumerando os termos da sequência, obtemos 488 889 termos.

$$\underbrace{a_1,\ldots,a_9}_{\text{1 alg}},\ \underbrace{a_{10},\ldots,a_{189}}_{\text{2 algs}},\ \underbrace{a_{190},\ldots,a_{2\,889}}_{\text{3 algs}},\ \underbrace{a_{2\,890},\ldots,a_{38\,889}}_{\text{4 algs}},\ \underbrace{a_{38\,890},\ldots,a_{488\,889}}_{\text{5 algs}}$$

Para escrever todos os termos de 1, 2, 3 e 4 algarismos, chegamos à 38 889ª posição da sequência. Logo, o algarismo na 206 788ª posição faz parte de um número de cinco algarismos, ou seja, está no bloco

$$\underbrace{a_{38\,890},\ldots,a_{488\,889}}_{\text{5 algs}}\,.$$

Esse bloco é da forma 10 000, 10 001, ... 99 999. Para ver quantos números de cinco algarismos existem desde a posição 38 889 até a posição 206 788, dividimos essa diferença por 5. Assim, $206\,788 - 38\,889 = 167\,899$ e $167\,899 = 5 \times 33\,579 + 4$. Portanto, precisamos de 33 579 números de cinco algarismos, mais os quatro primeiros algarismos do 33 580º número de cinco algarismos, que é 43 579, para chegar ao algarismo na posição 206 788.

Como o quarto algarismo do número 43 579 é 7, temos que o algarismo procurado é 7.

148. ***Soma constante*** – Para resolver este problema, o mais fácil é começar dispondo os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 numa tabela 3×3 de modo que a soma de cada linha, de cada coluna e de cada diagonal seja 15. Depois basta somar 662 a cada elemento da tabela, obtendo, por exemplo, a solução seguinte.

670	665	666
663	667	671
668	669	664

Assim como existem outras maneiras de dispor os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 na tabela, também existem outras soluções desse problema.

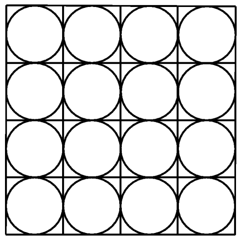
149. ***Contando os zeros*** – Inicialmente, verificamos como terminam as potências de 9, ou seja, listamos os dois últimos algarismos, os da dezena e da unidade, das potências 9^n, ordenadamente.

Se n for	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
9^n termina com	01	09	81	29	61	49	41	69	21	89	01	09	81

Assim, vemos que os dois últimos algarismos de 9^{10}, 9^{11} e 9^{12} são os mesmos de 9^0, 9^1 e 9^2. A partir 9^{10}, os dois últimos algarismos das potências começam a se repetir, formando uma sequência periódica de período 10. Como $2\,007 = 10 \times 200 + 7$ e os dois últimos algarismos de $9^{10\times 200}$ são 01, segue que os dois últimos algarismos de $9^{2\,007}$ são os dois últimos algarismos de 9^7, ou seja, 69. Então, os dois últimos algarismos de $9^{2\,007}+1$ são iguais a $69+1=70$. Assim, existe um único zero no final do número $9^{2\,007}+1$.

150. ***Círculos dentro do quadrado*** – A resposta desse problema é afirmativa: é possível colocar um certo número de círculos sem superposição dentro de um quadrado de 1 centímetro de lado, de tal forma que a soma dos raios desses círculos seja maior do que 2 008 centímetros.

Para exibir uma tal configuração, desenhamos linhas paralelas aos lados do quadrado, dividindo-o em n^2 quadradinhos menores; cada um desses quadradinhos tem lado igual a $1/n$. Dentro de cada um desses quadradinhos, desenhamos um círculo inscrito de raio igual a $1/2n$. No caso particular $n=4$, essa construção é dada na figura.



$$\begin{cases} n^2 = 4^2 = 16 \text{ círculos} \\ \text{lados dos quadradinhos} = \dfrac{1}{4} \\ \text{raio dos círculos} = \dfrac{1}{8} \\ \text{soma dos raios} = 16 \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

Desse modo, a soma dos raios dos n^2 círculos é igual a $n^2 \times 1/2n = n/2$. Como estamos interessados no caso desta soma ser maior do que 2 008, devemos ter $n/2 > 2\,008$, ou seja, $n > 4\,016$. Logo, dividindo o quadrado em $4\,017^2$ quadradinhos (ou mais), a soma dos raios dos círculos inscritos nos quadradinhos será maior do que 2 008.

151. ***Construindo um número*** – As condições dadas implicam que os números devem satisfazer todas as condições seguintes.

$$\begin{array}{rl}
\text{(i)} & \ldots\ \underline{\ 1\ }\ \underline{\quad}\ \underline{\ 1\ }\ \ldots \\
\text{(ii)} & \ldots\ \underline{\ 2\ }\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\ 2\ }\ \ldots \\
\text{(iii)} & \ldots\ \underline{\ 3\ }\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\ 3\ }\ \ldots \\
\text{(iv)} & \ldots\ \underline{\ 4\ }\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\ 4\ }\ \ldots
\end{array}$$

Vamos estudar as possíveis posições dos dois algarismos 4 em um número de oito algarismos. De acordo com (iv), existem apenas três possibilidades:

$$\begin{array}{ll}
\text{caso A:} & \underline{\ 4\ }\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\ 4\ }\ \underline{\quad}\ \underline{\quad} \\
\text{caso B:} & \underline{\quad}\ \underline{\ 4\ }\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\ 4\ }\ \underline{\quad} \\
\text{caso C:} & \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\ 4\ }\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\ 4\ }
\end{array}$$

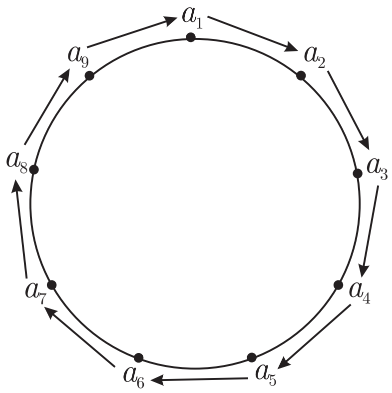
Em cada um desses casos, existem duas possibilidades de colocar os algarismos 3:

$$\begin{array}{llll}
\text{caso A:} & \underline{\ 4\ }\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\ 3\ }\ \underline{\quad}\ \underline{\ 4\ }\ \underline{\quad}\ \underline{\ 3\ } & \text{ou} & \underline{\ 4\ }\ \underline{\quad}\ \underline{\ 3\ }\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\ 4\ }\ \underline{\ 3\ }\ \underline{\quad} \\
\text{caso B:} & \underline{\ 3\ }\ \underline{\ 4\ }\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\ 3\ }\ \underline{\quad}\ \underline{\ 4\ }\ \underline{\quad} & \text{ou} & \underline{\quad}\ \underline{\ 4\ }\ \underline{\quad}\ \underline{\ 3\ }\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\ 4\ }\ \underline{\ 3\ } \\
\text{caso C:} & \underline{\ 3\ }\ \underline{\quad}\ \underline{\ 4\ }\ \underline{\quad}\ \underline{\ 3\ }\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\ 4\ } & \text{ou} & \underline{\quad}\ \underline{\ 3\ }\ \underline{\ 4\ }\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\ 3\ }\ \underline{\quad}\ \underline{\ 4\ }
\end{array}$$

Na tentativa de colocar os algarismos 1 e 2, percebemos que as duas possibilidade do caso B são impossíveis, bem como as primeiras possibilidades dos casos A e C. Os únicos casos que levam a soluções do problema são as segundas possibilidades dos casos A e C, que levam às duas únicas soluções

$$41\,312\,432 \quad \text{e} \quad 23\,421\,314.$$

152. ***Número na circunferência*** – Na figura a seguir representamos os nove algarismos escritos ao redor da circunferência.



Lendo os algarismos escritos ao redor da circunferência, de três em três, no sentido horário, obtemos os seguintes números de três algarismos cada:

$$a_1a_2a_3,\ a_2a_3a_4,\ a_3a_4a_5,\ a_4a_5a_6,\ a_5a_6a_7,\ a_6a_7a_8,\ a_7a_8a_9,\ a_8a_9a_1 \text{ e } a_9a_1a_2.$$

Para somar esses números usamos o algoritmo da adição, como indicado a seguir.

$$\begin{array}{cc}
 & a_1a_2a_3 \\
 & a_2a_3a_4 \\
 & a_3a_4a_5 \\
 & a_4a_5a_6 \\
+ & a_5a_6a_7 \\
 & a_6a_7a_8 \\
 & a_7a_8a_9 \\
 & a_8a_9a_1 \\
 & a_9a_1a_2 \\
\hline
 & ???????
\end{array}$$

Analisando esses nove números, notamos que todos têm os algarismos da unidade diferentes. Logo,

$$a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_1 + a_2 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45\,.$$

Do mesmo modo, esses nove números também têm todos os algarismos das dezenas e todos os algarismos das centenas diferentes. Logo, a soma dos algarismos das dezenas também é 45 e o mesmo ocorre com os algarismos das centenas. Portanto, para somar basta calcular $45 + 45 \times 10 + 45 \times 100 = 4\,995$. Assim, a soma dos nove números é $4\,995$.

153. ***Cada peça em seu lugar*** – A primeira informação é certamente falsa, pois se fosse verdadeira, o ouro estaria no cofre 2 ou 3, mas deveria estar no próprio cofre 1, para que a primeira informação fosse verdadeira. Essa contradição mostra que o ouro não está nem no cofre 2 nem no cofre 3. Por ser falsa a informação na porta do cofre 1, concluímos que o outro também não está nele. A segunda informação é certamente falsa, pois se fosse verdadeira, o ouro estaria no cofre 2, o que é incorreto. Logo, a primeira e a segunda informações são falsas. Portanto, o ouro não está no cofre 1, nem no 2 nem no 3, e a prata não está no cofre 1.

As únicas possibilidades que restam para o ouro são os cofres 4 ou 5. Se o ouro estivesse no cofre 4,

$$\underbrace{—}_{1},\ \underbrace{—}_{2},\ \underbrace{—}_{3},\ \underbrace{\text{ouro}}_{4},\ \underbrace{—}_{5},$$

a informação 4 seria a correta e o níquel estaria na cofre 3. Então a terceira informação deve ser falsa e deveríamos ter o bronze também no cofre 3, o que é uma impossibilidade. Logo, essa possibilidade fica descartada e o ouro deve estar no cofre 5.

$$\underbrace{—}_{1},\ \underbrace{—}_{2},\ \underbrace{—}_{3},\ \underbrace{—}_{4},\ \underbrace{\text{ouro}}_{5}.$$

De fato, com o ouro no cofre 5, a informação 5 é a correta e a platina está no cofre cujo número é superior, em uma unidade, ao que contém o bronze. Pela afirmação do cofre 3, que é falsa, teríamos o bronze no cofre 3. Logo, a platina está no cofre 4. Como a segunda afirmação é falsa, a prata não está no cofre 1, só podendo estar no cofre 2. Portanto, temos a solução seguinte.

$$\underbrace{\text{níquel}}_{1},\ \underbrace{\text{prata}}_{2},\ \underbrace{\text{bronze}}_{3},\ \underbrace{\text{platina}}_{4},\ \underbrace{\text{ouro}}_{5}.$$

154. ***Soma de quadrados*** – Como a razão da progressão aritmética é 2, os três números podem ser denotados por $n-2$, n e $n+2$. A soma de seus quadrados é um número de quatro algarismos iguais, digamos, $k\,k\,k\,k$, em que k é algum inteiro entre 1 e 9, ou seja,

$$k\,k\,k\,k = (n-2)^2 + n^2 + (n+2)^2 = 3n^2 + 8\,.$$

A partir deste ponto, apresentamos duas possibilidades de solução.

Solução 1: Como $k\,k\,k\,k - 8 = 3n^2$ é um múltiplo de 3, o resto da divisão de $k\,k\,k\,k$ por 3 é igual ao resto da divisão de 8 por 3, que é 2. Mas $k\,k\,k\,k = k \times 1\,111$ e o resto da divisão de $1\,111$ por 3 é 1, de modo que o resto da divisão de k por 3 é 2. Como $1 \leq k \leq 9$, só podemos ter k igual a 2, 5 ou 8. Como na Solução 1, os casos $k=2$ e $k=8$ são impossíveis e $k=5$ é a única opção, caso em que $n=43$ e os três números procurados são 41, 43 e 45, que constituem a única solução para o problema.

Solução 2: Como $k\,k\,k\,k = 3n^2 + 8$, obtemos

$$3n^2 = k\,k\,k\,k - 8 = (k\,k\,k \times 10 + k) - (9-1) = (k\,k\,k \times 10 - 9) + (k+1).$$

Mas $kkk \times 10 - 9 = k\,k\,(k-1)\,1$ é múltiplo de 3, portanto também $k+1$ é um múltiplo de 3. Como $1 \leq k \leq 9$, só podemos ter k igual a 2, 5 ou 8. No caso $k=2$, obtemos

$$n^2 = \frac{2\,222 - 8}{3} = 738 = 2 \times 369,$$

o que é impossível, pois 738 não é um quadrado perfeito. Analogamente, se $k=8$, obtemos

$$n^2 = \frac{8\,888 - 8}{3} = 2\,960 = 2^4 \times 5 \times 37,$$

o que, novamente, é impossível, já que esse último número não é um quadrado perfeito. Resta, portanto, a última opção, $k=5$. Nesse caso,

$$n^2 = \frac{5\,555 - 8}{3} = 1\,849 = 43^2\,,$$

portanto, $n=43$ e os três números em progressão aritmética procurados são 41, 43 e 45, que constituem a única solução para o problema.

155. ***Adivinhe o número***

Solução 1: Seja x o número procurado. Observe que $x+2$ é divisível por 3, 4, 5 e 6. O menor múltiplo comum desses números é 60. Logo, $x+2=60$ e, então, $x=58$.

Solução 2: Seja x o número procurado. O resto da divisão de x por 3 é 1. Portanto, x é da forma $x=3a+1$, com $a \geq 0$ inteiro. A seguir, queremos determinar de que forma deve ser a para que $x=3a+1$ deixe resto 2 na divisão por 4, isto é, para que $3a$ deixe resto 1 na divisão por 4. Qual deve ser o resto da divisão de a por 4? Por um lado, se esse resto for 3, então a é da forma $a=4b+3$, de onde segue que $3a=12b+9=4\cdot(3b+2)+1$ deixa, de fato, resto 1 na divisão por 4. Por outro lado, podemos verificar que qualquer outro resto não funcionaria. Se, por exemplo, a deixasse resto 2 na divisão por 4, teríamos $a=4b'+2$ e $3a=12b'+6=4\cdot(3b'+1)+2$ deixaria resto 2 e não 1 na divisão por 4.

Substituindo $a=4b+3$ em $x=3a+1$, obtemos $x=12b+10$. Usamos agora que x deixa resto 3 na divisão por 5. Como 10 é múltiplo de 5, $12b$ também deixa resto 3 na divisão por 5. Mas $12b=10b+2b$ e $10b$ é múltiplo de 5. Logo, $2b$ deixa resto 3 na divisão por 5. Então, b deixa resto 4 na divisão por 5. De fato, por um lado, se $b=5c+4$, então $2b=10c+8=5\cdot(2c+1)+3$ deixa realmente resto 3 na divisão por 5. Por outro lado, como acima, podemos verificar que 4 é o único resto que funciona. Então, $b=5c+4$ e $x=12b+10=12\cdot(5c+4)+10=60c+58$. Concluímos que as soluções do problema são os números x da forma $x=60n+58$, com $n \geq 0$ inteiro. O menor deles, para $n=0$, é $x=58$.

156. ***Um código*** – Observe que

$$AOBMEP = AOB \times 1\,000 + MEP \text{ e } MEPAOB = MEP \times 1\,000 + AOB.$$

Denotemos $AOB=m$ e $MEP=n$. Pelos dados do problema, temos

$$6 \times AOBMEP = 7 \times MEPAOB,$$

donde $6\cdot(1\,000\,m+n) = 7\cdot(1\,000\,n+m)$, ou $6\,000\,m-7\,m = 7\,000\,n-6\,n$ ou, ainda, $5\,993\,m = 6\,994\,n$. Dividindo ambos os lados por 13, concluímos que $461\,m = 538\,n$. A fatoração de 538 em fatores primos é $538 = 2\times 269$ e 461 é primo. Portanto, 538 e 461 são primos entre si. Logo, 461 divide n e 538 divide m. Como AOB e MEP são números de três algarismos, só podemos ter as soluções $n=461$, ou $n=822$, e $m=538$. É fácil verificar que $6\times 538\,461 = 3\,230\,766 = 7\times 461\,538$ e que $6\times 538\,822 = 3\,232\,932 \neq 5\,757\,766 = 7\times 822\,538$. Portanto, $n=822$ não serve, sendo $AOB=538$ e $MEP=461$ a única solução. Assim, os algarismos são $A=5, O=3, B=8, M=4, E=6$ e $P=1$.

157. ***Calculando distâncias***

Solução 1: Observe que é conhecido o ângulo $A\widehat{B}D$. De fato, o triângulo $\triangle ABC$ é equilátero, portanto, $A\widehat{B}C=60^\circ$ e, como $C\widehat{B}D=90^\circ$, obtemos $A\widehat{B}D=150^\circ$. Assim, aplicando a Lei dos Cossenos ao triângulo $\triangle ABD$, resulta

$$AD^2 = 3^2+4^2-2\cdot 3\cdot 4\cos 150^\circ = 25+24\cos 30^\circ = 25+12\sqrt{3}\,.$$

Segue que $AD=\sqrt{25+12\sqrt{3}}$ cm.

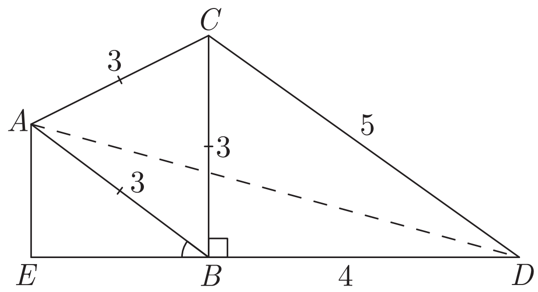
Solução 2: Seja E o ponto sobre a reta BD tal que o triângulo $\triangle AEB$ seja retângulo no vértice E (veja figura). Nesse triângulo, temos

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30^\circ=\frac{EB}{AB}=\frac{EB}{3} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}=\operatorname{sen} 30^\circ=\frac{AE}{AB}=\frac{AE}{3},$$

portanto,

$$EB = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad AE = \frac{3}{2};$$

em particular, $ED = 4 + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

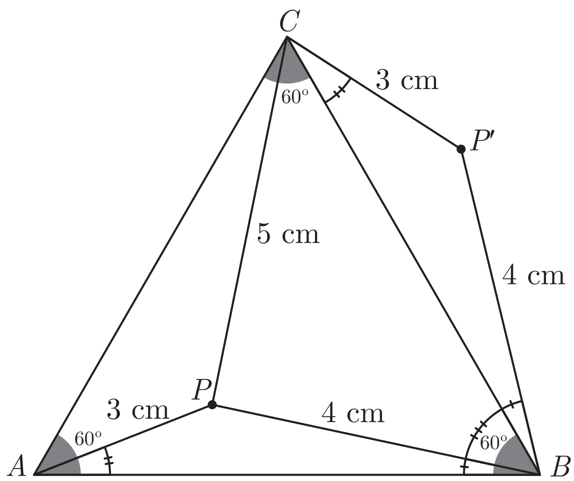


Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo $\triangle AED$, obtemos

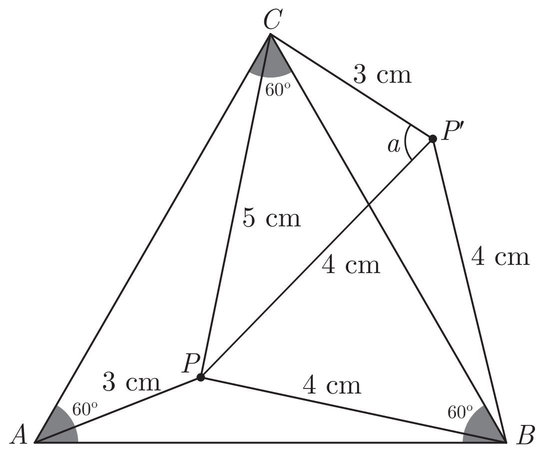
$$AD^2 = AE^2 + ED^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{8+3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 25 + 12\sqrt{3}.$$

Segue que $AD = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$ cm.

158. ***Calculando lados de um triângulo*** – Como o triângulo $\triangle ABC$ é equilátero, seus ângulos são todos iguais a 60°. Sobre o lado CB desse triângulo, construímos um novo triângulo $\triangle CBP'$, congruente ao triângulo $\triangle ABP$, tal que $P\widehat{A}B = P'\widehat{C}B$ e $A\widehat{B}P = C\widehat{B}P'$ (girando o triângulo $\triangle ABP$ no sentido horário por 60° em torno do ponto B).



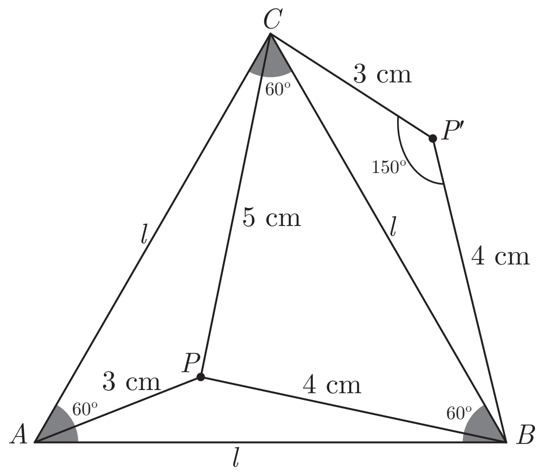
Note que o ângulo $P\widehat{B}P'$ é congruente ao ângulo $A\widehat{B}C$, ou seja, mede 60°. Assim, se traçarmos o segmento PP', temos que o triângulo $\triangle PBP'$, que já é isósceles, pois $PB = BP' = 4$ cm é, de fato, equilátero e, em consequência, temos que $PP' = 4$ cm.



Denotando o ângulo $P\widehat{P'}C$ por a, aplicamos a Lei dos Cossenos ao triângulo $\triangle CPP'$ e obtemos

$$5^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos a,$$

ou seja, $25 = 25 - 24 \cos a$. Segue que $\cos a = 0$ e, portanto, $a = 90°$. Dessa forma, estabelecemos $C\widehat{P'}B = a + 60° = 90° + 60° = 150°$.



Agora, denotando o lado do triângulo $\triangle ABC$ por l, aplicamos a Lei dos Cossenos ao triângulo $\triangle CBP'$ e obtemos

$$l^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 150° = 25 + 12\sqrt{3}.$$

Segue que $\sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$ cm é o comprimento dos lados do triângulo equilátero $\triangle ABC$.

159. ***Amigo oculto*** – Primeiramente observemos que o número de formas de distribuir os presentes sem nenhuma restrição é $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$. Daí temos que tirar os casos “ruins”, isto é, os casos em pelo menos um amigo tirou o seu próprio presente. Esses casos a eliminar podem ser listados pelo número de amigos que tiram seu próprio presente.

- Os 5 amigos ficaram com seus próprios presentes. Só há uma possibilidade de acontecer isso.
- Exatamente 4 amigos ficaram com seus próprios presentes. Isso não é possível.
- Exatamente 3 amigos ficaram com seus próprios presentes. Nessa situação, os outros dois amigos trocam os presentes. Assim, escolhemos 3 pessoas dentre as 5, isto é, $\dfrac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2} = 10$ possibilidades.

- Exatamente 2 amigos ficaram com seus próprios presentes. Nesse caso, escolhemos 2 pessoas dentre as 5, isto é, $\dfrac{5\times 4}{2}=10$ possibilidades. Os outros 3 amigos trocam os presentes entre si, dando um total de $10\times 2=20$ possibilidades.
- Por último, exatamente um amigo ficou com seu próprio presente. Nesse caso, escolhemos uma pessoa dentre um total de 5, multiplicando pelo número de formas que os outros amigos não fiquem com seu presente, que são 9 maneiras. Logo, nessa situação, temos um total de $5\times 9=45$ possibilidades.

Portanto, temos $120-45-20-10-1=44$ maneiras de distribuir os presentes sem que alguém fique com seu próprio presente.

160. ***Contando soluções*** – A equação dada é equivalente a $xy=144(x+y)=144x+144y$, portanto, isolando x, obtemos $x=\dfrac{144y}{y-144}$. Como x e y devem ser inteiros positivos, o denominador $y-144$ deve ser um número inteiro positivo, digamos, $y-144=n$. Substituindo essa expressão no valor de x, obtemos

$$x=\frac{144(n+144)}{n}=144+\frac{144^2}{n}.$$

Como x deve ser um número inteiro, n deve ser um divisor de 144^2. Sendo $144^2=12^4=2^8\cdot 3^4$, seus divisores são os números d da forma $d=2^a\cdot 3^b$, com $0\leq a\leq 8$ e $0\leq b\leq 4$. Como há 9 valores possíveis para a e 5 valores possíveis para b, concluímos que 144^2 tem $9\times 5=45$ divisores.

Assim, para cada divisor n de 144^2, obtemos uma solução

$$(x,y)=\left(144+\frac{144^2}{n},n+144\right)$$

da equação $\dfrac{xy}{x+y}=144$ dada. Portanto, essa equação possui 45 pares de números inteiros positivos (x,y) que a satisfazem.

161. ***Determinando uma sequência*** – Sejam $a_1,a_2,\ldots,a_{80}$ os números dessa sequência. Para cada $i\geq 1$, temos

$$\begin{cases} a_{i+1} & = & a_i\cdot a_{i+2}, \\ a_{i+2} & = & a_{i+1}\cdot a_{i+3}. \end{cases}$$

Consequentemente, $a_{i+1}=a_i\cdot a_{i+1}\cdot a_{i+3}$ e, como $a_{i+1}\neq 0$, já que o produto dos termos da sequência é $8\neq 0$, segue $a_i\cdot a_{i+3}=1$.

Quaisquer dois números da sequência, cujos índices distem 3 um do outro, são tais que o seu produto é igual a 1. Portanto, o produto de seis números consecutivos nessa sequência é, sempre, igual a 1. Sendo o produto dos 40 primeiros termos da sequência igual a 8, concluímos que o produto dos quatro primeiros termos também é 8, pois os 36 termos restantes formam seis grupos de 6 termos consecutivos da sequência e, em cada grupo desses, o produto é igual a 1. Isto é, $a_1a_2a_3a_4=8$. Como $a_i\cdot a_{i+3}=1$, segue que $a_1a_4=1$ e, daí, $a_2a_3=8$.

Temos, também, a hipótese de que os 80 termos da sequência têm produto igual a 8, donde podemos concluir que $a_1a_2=8$, já que os 78 últimos termos podem ser agrupados em 13 grupos de 6 termos consecutivos, cada um com produto igual a 1, como já vimos.

Então, de $a_2a_3=8$, $a_1a_2=8$ e $a_2=a_1a_3$, segue que $a_1a_2^2a_3=64$ e $a_2^3=64$. Assim,

$$a_1=2,a_2=4 \text{ e } a_3=2.$$

Observe, ainda, que a sequência inteira está, agora, determinada. De fato, temos

$$2, 4, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2, 4, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \ldots,$$

em que os seis primeiros termos ficam se repetindo, sempre na mesma ordem.

162. ***Construindo uma cerca*** – A soma dos comprimentos dos três lados (os que não são de pedra) é 140 m.

   (a) Se os dois lados vizinhos ao muro de pedra têm 40 m cada um, os dois juntos têm 80 m e o terceiro lado terá $140 - 80 = 60$ m.

   (b) Se o maior dos lados a ser cercado tiver 85 m, ele não pode estar ser vizinho ao muro de pedras, porque nesse caso esses dois lados mediriam $85 \times 2 = 170$ m, que é maior do que 140 m. Logo, ele deveria ser paralelo ao muro de pedra e, nesse caso, cada um dos outros lados mediria 27,5 m, o que também não é possível, já que a cerca é composta de pedaços inteiros de 1 m cada um.

   Os dois lados que encostam no muro de pedra podem ter 65 m cada um porque nesse caso, o outro teria $140 - 2 \times 65 = 10$ m, o que não contraria as condições dadas.

163. ***Um quadrilátero especial*** – Como os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ACD$ são retângulos e têm a mesma hipotenusa AC, pelo Teorema de Pitágoras temos $x^2 + 11^2 = y^2 + 7^2$, onde $AB = x$ e $DC = y$. Então,

$$(y - x)(y + x) = y^2 - x^2 = 72 = 2^3 \times 3^2$$

e, portanto, $y - x$ e $y + x$ são divisores de 72. Para cada fatoração de 72, precisamos resolver um sistema de duas equações com duas incógnitas, como na tabela a seguir, e identificar os casos em que existem soluções inteiras.

Fator de 72		Medidas de		Observações
$y+x$	$y-x$	x	y	
72	1	-	-	Não há solução inteira
36	2	17	19	Possui solução inteira
24	3	-	-	Não há solução inteira
28	4	12	16	Possui solução inteira
12	6	3	9	Possui solução inteira
9	8	-	-	Não há solução inteira

Assim, há três soluções inteiras para o comprimento dos lados x e y.

164. ***Três quadrados*** – Os triângulos retângulos $\triangle AEB$ e $\triangle EHF$ são congruentes, pois seus ângulos $E\widehat{B}A$ e $F\widehat{E}H$ são iguais (lados respectivos perpendiculares) e as hipotenusas são iguais (lados de um quadrado). Então, $AE = FH$. Pelo Teorema de Pitágoras,

$$\text{área de } BEFG = BE^2 = AB^2 + AE^2 = AB^2 + FH^2 = 30 + 20 = 50\,\text{cm}^2.$$

165. ***Bolinha de gude***

Solução 1: Denotemos por x, y e z o número de bolinhas que cada um tinha no início da partida. Temos

	1º	2º	3º
Início	x	y	z
1ª rodada	$x-y-z$	$2y$	$2z$
2ª rodada	$2(x-y-z)$	$2y-2z-(x-y-z)$	$4z$
3ª rodada	$4(x-y-z)$	$2(3y-x-z)$	$4z-2(x-y-z)-(3y-x-z)$

Como cada um terminou a partida com 64 bolinhas, segue que

$$\begin{cases} 4(x-y-z) &= 64 \\ 2(3y-x-z) &= 64 \\ 4z-2(x-y-z)-(3y-x-z) &= 64 \end{cases}$$

donde

$$\begin{cases} x-y-z &= 16 \\ -x+3y-z &= 32 \\ -x-y+7z &= 64 \end{cases}$$

Para resolver o sistema, somamos a primeira com a segunda equações e a primeira com a terceira, obtendo

$$\begin{cases} y-z &= 24; \\ -y+3z &= 40. \end{cases}$$

Daí, obtemos $z = 32$ e $y = 56$, portanto, $x = 16 + 56 + 32 = 104$. Assim, o primeiro jogador começou a partida com 104 bolinhas, o segundo, com 56 e o terceiro, com 32.

Solução 2: Preenchemos a tabela "de baixo para cima", isto é, do final para o início do jogo. Começamos com 64 nas três casas finais.

	1º	2º	3º
Início			
Após a 1ª rodada			
Após a 2ª rodada			
Após a 3ª rodada	64	64	64

Como os dois primeiros jogadores dobraram a quantidade de bolinhas na terceira rodada, cada um tinha 32 bolinhas e o terceiro jogador deu 32 a cada um deles. Deduzimos que ele possuía $64 + 32 + 32 = 128$ bolinhas.

	1º	2º	3º
Início			
Após a 1ª rodada			
Após a 2ª rodada	32	32	128
Após a 3ª rodada	64	64	64

Quem perdeu a segunda rodada foi o segundo jogador. Logo, a tabela era

	1º	2º	3º
Início			
Após a 1ª rodada	16	32+16+64=112	64
Após a 2ª rodada	32	32	128
Após a 3ª rodada	64	64	64

Finalmente,

	$1^{\underline{o}}$	$2^{\underline{o}}$	$3^{\underline{o}}$
Início	$16+56+32=104$	56	32
Após a $1^{\underline{a}}$ rodada	16	$32+16+64=112$	64
Após a $2^{\underline{a}}$ rodada	32	32	128
Após a $3^{\underline{a}}$ rodada	64	64	64

Assim, o primeiro jogador começou a partida com 104 bolinhas, o segundo, com 56 e o terceiro, com 32.

166. ***Uma soma*** – Inicialmente, observe que $\dfrac{1}{k\cdot(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$. Logo,

$$\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{2\,007\cdot 2\,008}=\frac{1}{2\,007}-\frac{1}{2\,008}.$$

Assim, temos

$$S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2\,006}-\frac{1}{2\,007}+\frac{1}{2\,007}-\frac{1}{2\,008}$$

e, portanto, $S=1-\dfrac{1}{2\,008}=\dfrac{2\,007}{2\,008}$.

167. ***Dobrando papel*** – Sejam E e F os pontos de interseção, como na figura. Sejam $AB=2a$ e $BC=2b$. Então $AM=MB=DN=NC=a$ e $ME=EN=b$. Traçamos AN e denotamos por P o ponto de interseção dos segmentos AN e BD. Os segmentos AN e MC são paralelos (pois $AM=NC$ e $AM\parallel NC$). Como M é o ponto médio de AB e $MF\parallel AP$, temos que F é o ponto médio do segmento PB. Analogamente, P é o ponto médio do segmento DF e segue que $DP=PF=FB$. Por simetria, verificamos que $PE=EF$ e, então, $EF/FB=1/2$. Por outro lado, área$(\triangle MBE)=\frac{1}{4}$ área$(\triangle ABD)=125$ e, como $\triangle MEF$ e $\triangle MBE$ têm a mesma altura relativamente ao vértice M e a base do primeiro é $1/3$ da base do segundo, concluímos que

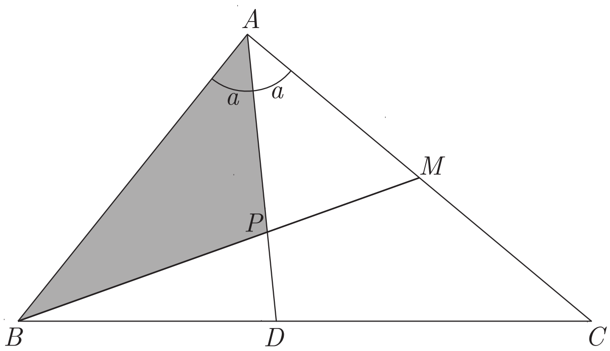
$$\text{área}(\triangle MEF)=\frac{1}{3}\,125\ \text{cm}^2.$$

168. ***Uma área*** – Os triângulos $\triangle ABM$ e $\triangle ABC$ têm a mesma altura d em relação às respectivas bases AM e AC. Como M é o ponto médio de AC, obtemos

$$\frac{\text{área }(\triangle ABM)}{\text{área }(\triangle ABC)}=\frac{\frac{1}{2}\ AM\cdot d}{\frac{1}{2}\ AC\cdot d}=\frac{AM}{AC}=\frac{1}{2},$$

de modo que

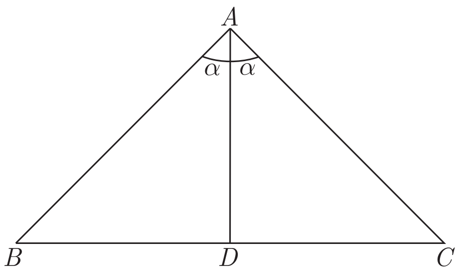
$$\text{área }(\triangle ABM)=\frac{1}{2}\ \text{área }(\triangle ABC)=\frac{1}{2}\ 100=50\ \text{cm}^2.$$



Analogamente,

$$\frac{\text{área }(\triangle ABP)}{\text{área }(\triangle ABM)}=\frac{BP}{BM}\,.$$

Teorema das Bissetrizes Internas



$\frac{AC}{DC}=\frac{AB}{BD}$

Pelo Teorema das Bissetrizes Internas,

$$\frac{BP}{PM}=\frac{AB}{AM}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}\,,$$

portanto, $PM=\dfrac{3}{2}BP$. Então obtemos

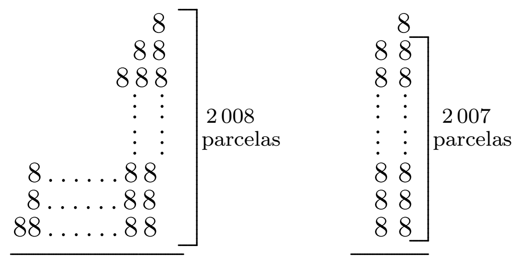
$$\frac{\text{área }(\triangle ABP)}{\text{área }(\triangle ABM)}=\frac{BP}{BM}=\frac{BP}{BP+PM}=\frac{BP}{BP+\frac{3}{2}\,BP}=\frac{BP}{\frac{5}{2}\,BP}=\frac{2}{5},$$

de modo que área $(\triangle ABP)=\dfrac{2}{5}$ área $(\triangle ABM)=\dfrac{2}{5}\cdot 50=20\text{ cm}^2$.

169. ***Últimos algarismos***

Solução 1: Como só queremos saber os dois últimos algarismos, basta conhecer as duas últimas colunas dessa soma (a das dezenas e a das unidades), ou seja,

$$8+88\times 2\,007=8+\ldots 16.$$



Como $8+16=24$, os dois últimos algarismos do número são 24.

Solução 2: Observemos que os dois últimos algarismos do número dado são iguais aos dois últimos algarismos do número

$$8+\overbrace{88+\cdots+88}^{2\,007}=8+2\,007\times 88,$$

que também coincidem com os dois últimos algarismos de $8+7\times 88=624$. Logo, os dois últimos algarismos do número procurado são 24.

170. ***Idades múltiplas*** – Quando Isabel tem a anos, sua mãe tem $20+a$ anos. Se a é divisor de $20+a$, então $(20+a)/a=(20/a)+1$ é um número inteiro e, consequentemente, $20/a$ também é inteiro. Então, a é um divisor de 20 e, portanto, a pode ser 1, 2, 4, 5, 10 ou 20. Assim, temos um total de 6 vezes em que as idades das duas são múltiplos.

Isabel	1	2	4	5	10	20
Mãe	21	22	24	25	30	40

Observe que, depois dos 20 anos de Isabel, nunca mais a idade da mãe será um múltiplo da idade de Isabel.

171. ***Blocos diferentes*** – O volume do cubo é $10\times 10\times 10=1\,000\text{ cm}^3$. O volume V de um bloco é o produto de suas três medidas, altura $(=a)$, largura $(=l)$ e comprimento $(=c)$.

Para construir cada bloco, Ana deve usar todos os bloquinhos, portanto, o volume de cada bloco é

$$V = \text{altura} \times \text{largura} \times \text{comprimento} = a\,l\,c = 1\,000 \text{ cm}^3.$$

Assim, precisamos saber de quantas maneiras podemos escrever 1 000 como o produto de três números inteiros positivos a, l e c. Para isso, fatoramos 1 000, obtendo $a\,l\,c = 1\,000 = 2^3 \times 5^3$.

Solução 1: Podemos encontrar todos esses números listando as dimensões a, l e c dos blocos. Sem perda de generalidade, podemos supor que $a \leq l \leq c$. Então $a^3 \leq alc \leq 1\,000$ e, portanto, $a \leq 10$. Logo, $a = 1, 2, 4, 5, 8$ ou 10. Mas se $a = 8$, então $lc = 125 = 5^3$ e, como $8 \leq l \leq c$, não há como obter medidas inteiras para l e c. Assim, a só pode ser 1, 2, 4, 5 ou 10. A tabela mostra as 19 possibilidades para esses blocos.

a	l	c	a	l	c
1	1	1 000	2	2	250
	2	500		4	125
	4	250		5	100
	5	200		10	50
	8	125		20	25
	10	100	5	5	40
	20	50		8	25
	25	40		10	20
4	5	50			
	10	25	10	10	10

Solução 2: Podemos encontrar todos esses números listando as potências de 2 e 5, sem esquecer que uma das medidas pode ser 1 (no caso de potência 0). A tabela mostra as 19 possibilidades para esses blocos.

potência de 2	potência de 5	a	l	c
3	3	1	1	$2^3 \times 5^3$
		1	2^3	5^3
1, 2	3	1	2	$2^2 \times 5^3$
		1	2^2	2×5^3
		2	2^2	5^3
1, 1, 1	3	2	2	2×5^3
3	1, 2	1	$2^3 \times 5$	5^2
		1	$2^3 \times 5^2$	5
		2^3	5	5^2
3	1, 1, 1	5	5	$2^3 \times 5$
1, 2	1, 2	1	2×5	$2^2 \times 5^2$
		1	2×5^2	$2^2 \times 5$
		2	5	$2^2 \times 5^2$
		2^2	2×5	5^2
		2^2	2×5^2	5
		2	$2^2 \times 5$	5^2
1, 2	1, 1, 1	5	2×5	$2^2 \times 5$
1, 1, 1	1, 2	5	2×5	2×5^2
1, 1, 1	1, 1, 1	2×5	2×5	2×5

172. ***Quadro negro*** – Inicialmente observe que, de 1 a 77, Joana apagou 11 múltiplos de 7 e 7 múltiplos de 11. Como 77 é múltiplo de 7 e de 11, então ela apagou $11+7-1=17$ números, sobrando $77-17=60$ números. Agora, agrupando os 10 000 primeiros números em grupos de 77 números consecutivos, esse raciocínio se aplica em cada uma das linhas abaixo, isto é, em cada linha sobraram 60 números.

$$\begin{array}{rcccc}
1^{\underline{a}}\text{ linha:} & 1, & 2, & \ldots, & 77 \\
2^{\underline{a}}\text{ linha:} & 78, & 79, & \ldots, & 154 \\
3^{\underline{a}}\text{ linha:} & 155, & 158, & \ldots, & 231 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

Como, $2\,008 = 33 \times 60 + 28$, sabemos que entre os primeiros $33 \times 77 = 2\,541$ números, $33 \times 60 = 1\,980$ números ficaram sem apagar.

$$\begin{array}{rcccc}
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
33^{\underline{a}}\text{ linha:} & \ldots, & \ldots, & \ldots, & 2\,541.
\end{array}$$

Ainda faltam contar 28 números. Vamos, então, examinar a $34^{\underline{a}}$ linha, que começa com 2 542. Como os números apagados estão nas colunas 7, 11, 14, 21, 22, 28, 33, 35, etc., e até a $35^{\underline{a}}$ coluna foram apagados oito números, restam $35-8=27$ números na $34^{\underline{a}}$ linha. Logo, depois de apagados os múltiplos de 7 e de 11 nessa linha, o $28^{\underline{o}}$ número é 2 577. Assim, o número na $2\,008^{\underline{a}}$ posição é o 2 577.

173. ***Conjunto sem múltiplos*** – Inicialmente, observemos que o conjunto $\{51, 52, 53, \ldots, 100\}$ tem 50 elementos e nenhum de seus elementos é múltiplo de outro. Assim, o subconjunto com o maior número de elementos e que satisfaz a propriedade exigida tem, no mínimo, 50 elementos. Para concluir que 50 é o maior número possível de elementos de um subconjunto que satisfaça a propriedade exigida, basta mostrar que todo subconjunto com mais de 50 elementos possui dois números múltiplos. Para isso, denotamos $B = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ e dividimos B em 50 subconjuntos disjuntos, considerando os diversos subconjuntos de B cujos elementos são do tipo número ímpar $\times 2^k$, com k natural. Como existem apenas 50 números ímpares entre 1 e 100, obtemos cinquenta subconjuntos dois a dois disjuntos construídos dessa forma, como segue.

- $A_1 = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\} = B \cap \{1 \times 2^k \mid \text{para algum } k = 0, 1, 2, 3, \ldots\}$;
- $A_2 = \{3, 6, 12, 24, 48, 96\} = B \cap \{3 \times 2^k \mid \text{para algum } k = 0, 1, 2, 3, \ldots\}$;
- $A_3 = \{5, 10, 20, 40, 80\} = B \cap \{5 \times 2^k \mid \text{para algum } k = 0, 1, 2, 3, \ldots\}$;

$$\vdots$$

- $A_{50} = \{99\} = B \cap \{99 \times 2^k \mid \text{para algum } k = 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Observe que B é a união desses cinquenta subconjuntos, isto é,

$$B = \{1, 2, \ldots, 100\} = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{50},$$

e que, se dois elementos de B estiverem num mesmo subconjunto A_i, então um deles é múltiplo do outro. Assim, se um subconjunto A de B tiver mais do que 50 elementos, podemos afirmar que existem pelo menos dois elementos de A num mesmo subconjunto A_i e, portanto, um deles é múltiplo do outro. Isso prova que 50 é o número máximo de elementos de qualquer subconjunto de B que não possua dois elementos tais que um deles seja múltiplo do outro.

174. ***Brincando com a calculadora*** – O resultado é o mesmo número inicial $a\,b\,c$ de três algarismos. De fato, se $a\,b\,c$ é um número de três algarismos, então o número de seis algarismos $a\,b\,c\,a\,b\,c$ é da forma $a\,b\,c\,a\,b\,c = 1\,000 \times a\,b\,c + a\,b\,c = 1\,001 \times a\,b\,c$.

Como $1\,001 = 7 \times 11 \times 13$, dividindo, sucessivamente, $a\,b\,c\,a\,b\,c$ por 7, 11 e 13, obtemos

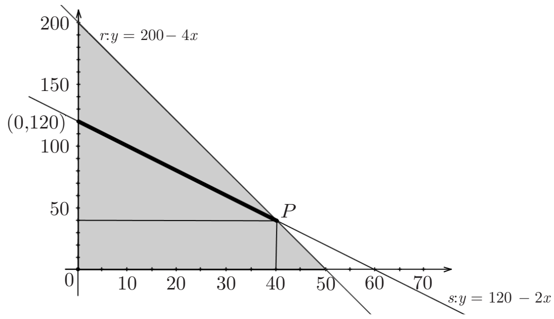
$$\frac{a\,b\,c\,a\,b\,c}{7 \times 11 \times 13} = \frac{1\,001 \times a\,b\,c}{1\,001} = a\,b\,c.$$

175. ***No galinheiro*** – Sejam x e y, respectivamente, o número de galinhas e de pintinhos no galinheiro.

(a) Temos $4x + 2y = 240$, ou seja, $2x + y = 120$. Como 8 kg = 8 000 g, temos $160x + 40y \leq 8\,000$. Assim, $4x + y \leq 200$.

Em resumo, os números x de galinhas e y de pintinhos satisfazem

$$(*) \begin{cases} 2x + y = 120 \\ 4x + y \leq 200 \end{cases}$$



(b) A reta $2x + y = 120$ corta o eixo Ox em $x = 60$ e o eixo Oy em $y = 120$. A reta $4x + y = 200$ corta o eixo Ox em $x = 50$ e o eixo Oy em $y = 200$. Os gráficos dessas retas estão dadas na figura, em que a desigualdade $4x + y \leq 200$ é representada pela região sombreada. Observe que, na figura, as condições $(*)$ são representadas pelo segmento que liga os pontos P e $(0, 120)$. As coordenadas do ponto P são a solução do sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 120 \\ 4x + y = 200, \end{cases}$$

ou seja, $x = 40$ e $y = 40$ e, portanto, $P = (40, 40)$.

(c) Temos que $2 \times 20 + 80 = 120$ e $4 \times 20 + 80 \leq 200$. Logo, $x = 20$ e $y = 80$ satisfazem as condições $(*)$ e, por isso, o galinheiro comporta, sim, 20 galinhas e 80 pintinhos. Agora, $2 \times 30 + 100 \neq 120$, logo, $x = 30$ e $y = 100$ não satisfazem as condições $(*)$ e, por isso, o galinheiro não comporta 30 galinhas e 100 pintinhos.

(d) O número máximo de galinhas é 40 e, nesse caso, teremos também 40 pintinhos. O número máximo de pintinhos é 120 e, nesse caso, teremos 0 galinhas.

176. ***Um número perfeito*** – Se $2^{31} - 1$ é um número primo, seu único divisor próprio é o número 1. Então, os divisores próprios de $2^{30}(2^{31} - 1)$ são

$$1,\ 2,\ 2^2,\ \ldots,\ 2^{29},\ 2^{30},\ (2^{31} - 1),\ 2(2^{31} - 1),\ 2^2(2^{31} - 1),\ \ldots\ 2^{29}(2^{31} - 1).$$

A soma S desses divisores é

$$S = [1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{29} + 2^{30}] + (2^{31} - 1)[1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{29}]\,.$$

Em cada um dos dois colchetes aparece a soma S_n de uma progressão geométrica de n termos, sendo o primeiro termo igual a 1 e a razão igual a 2: o primeiro colchete é S_{31}, com 31 termos e o segundo é S_{30}, com trinta termos. Usando a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica, obtemos

$$S_{31} = \frac{2^{31}-1}{2-1} = 2^{31}-1 \quad \text{e} \quad S_{30} = \frac{2^{30}-1}{2-1} = 2^{30}-1.$$

Então a soma dos divisores próprios de $2^{30}(2^{31}-1)$ é

$$S = (2^{31}-1) + (2^{31}-1)[2^{30}-1] = (2^{31}-1)(1+2^{30}-1) = 2^{30}(2^{31}-1).$$

Logo, essa soma é igual a $2^{30}(2^{31}-1)$, como queríamos provar.

177. ***Quinze minutos a mais*** – Sabemos que a velocidade é a razão da distância percorrida pelo tempo gasto.

Solução 1: Denotando por t o tempo gasto, em horas, pelo carro mais lento, o que faz a viagem a uma velocidade de 60 km/h, sabemos que o tempo gasto pelo outro carro é de $t-1/4$, já que 15 minutos é um quarto de hora. Como ambos percorrem a mesma distância, segue que $60 \times t = 70 \times (t-1/4)$, portanto, $t = 7/4$ horas, ou 1 hora e três quartos de hora. Logo, a distância entre as duas cidades é $60 \times 7/4 = 105\,\text{km}$.

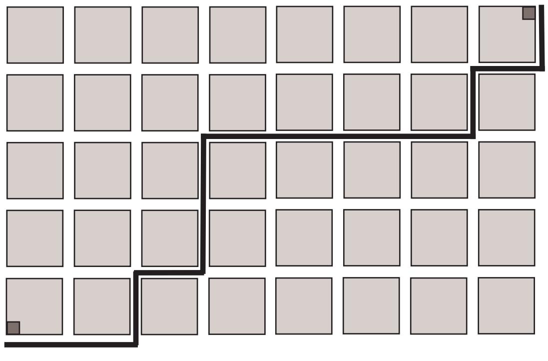
Solução 2: Vamos representar por d a distância, em quilômetros, entre as cidades A e B e por T o tempo gasto, em horas, pelo carro mais veloz. Como o outro carro gasta 15 minutos a mais para fazer o mesmo percurso, temos que o tempo gasto pelo carro mais lento é igual a $T+0,25$ horas, pois 15 min = 0,25 h. Como o carro mais veloz anda a 70 km/h, temos $70 = d/T$ e, como o mais lento anda a 60 km/h, temos $60 = d/(T+0,25)$. Assim,

$$d = 70 \times T = 60(T+0,25),$$

ou seja, $T = 1{,}5$ h, e a distância entre as cidades A e B é igual a $d = 70 \times 1{,}5 = 105$ km.

178. ***Outros caminhos*** – Qualquer que seja o trajeto de Júlia da sua casa até a escola, se ela deseja seguir um caminho mais curto, ela deve percorrer exatamente oito quarteirões para a direita e cinco quarteirões para cima. Um caminho mais curto ligando a sua casa até a escola é, então, uma sequência de "travessias de quarteirões", sendo oito delas no sentido horizontal (para a direita) e cinco no sentido vertical (para cima). Assim, para definir um caminho mais curto, ela precisa apenas decidir em que ordem fará essas treze travessias.

Para isso, imaginemos oito cartelas impressas com a letra D e cinco cartelas impressas com a letra C. Uma permutação qualquer dessas cartelas pode ser interpretada como um caminho mais curto a ser percorrido por Júlia. Por exemplo, a sequência de cartelas DDCDCCDDDD-CDC define o caminho indicado na figura dada.



Para determinar o número de maneiras pelas quais podem ser ordenadas essas cartelas, devemos contar de quantas maneiras diferentes se pode colocar cinco cartelas com a letra C em uma fila com treze lugares vagos, sendo os demais oito lugares na fila ocupados com as cartelas com a letra D.

Inicialmente, devemos escolher um dos treze lugares vagos para colocar uma letra C. Colocada essa letra, sobram doze lugares vagos para a segunda letra C. Colocada essa letra, sobram onze lugares vagos para a terceira letra, dez lugares para a quarta letra e, finalmente, nove lugares para a quinta letra C. Agora, uma vez colocadas as cinco letras C, qualquer permutação dessas letras entre si não altera a distribuição das letras na fila. Como a quantidade de permutações de cinco objetos é $5! = 120$, pelo *princípio multiplicativo* temos que o número de maneiras de ordenar as treze cartelas é dado por

$$\frac{13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9}{120} = 1\,287,$$

de modo que existem 1 287 caminhos mais curtos diferentes da casa de Júlia até a escola.

179. ***Escrevendo no tabuleiro*** – Começando com a letra **A**, ela pode ser escrita em qualquer uma das nove casas do tabuleiro. Uma vez escrita a letra **A**, sobram seis casas nas quais pode ser escrita a letra **B**. Uma vez escritas as letras **A** e **B** no tabuleiro, sobram três casas para a letra **C** ser escrita. Assim, pelo *princípio multiplicativo*, existem $9 \times 6 \times 3 = 162$ maneiras diferentes das letras **A**, **B** e **C** serem escritas no tabuleiro.

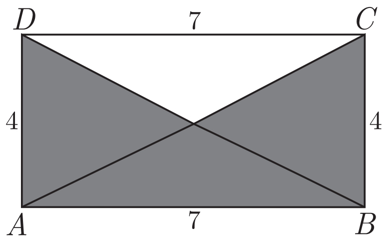
180. ***Fração e percentagem*** – A opção correta é (d).

Se um número x é diminuído de 40%, ele passa a valer 60% de x, ou seja, $0{,}6x$. Do mesmo modo, quando um número y é diminuído de 60%, ele passa a valer $0{,}4y$. Portanto, a fração x/y passa a ter o valor

$$\frac{0{,}6x}{0{,}4y} = \frac{6}{4}\frac{x}{y} = 1{,}5 \times \frac{x}{y}\,,$$

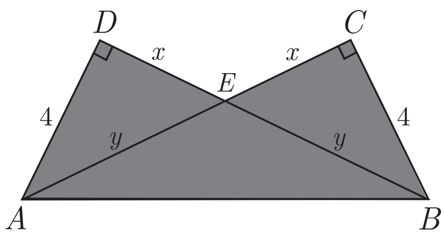
o que significa que a fração x/y aumentou 50% do seu valor.

181. ***Triângulos sobrepostos*** – Os pontos A, B, C e D formam o retângulo $ABCD$.



Como as diagonais de um retângulo o dividem em quatro triângulos de mesma área, a área sombreada é igual a três quartos da área do retângulo $ABCD$. Assim, a área sombreada é igual a $\frac{3}{4}(7 \times 4) = 21$ cm^2.

Vejamos, agora, o caso da outra figura. Sejam $x = DE = CE$, $y = AE = BE$ e E o ponto de interseção dos segmentos AC e BD.



A área sombreada é a soma das áreas dos triângulos ADE e ABC, ou seja,

$$\frac{4\times x}{2}+\frac{4\times 7}{2}=2x+14.$$

Logo, basta calcular x. Temos que $x+y=7$ e, pelo Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo AED, também $y^2=x^2+4^2$. Substituindo $y=7-x$ nessa última equação, obtemos $(7-x)^2=x^2+16$, de modo que $49-14x+x^2=x^2+16$, ou seja,

$$x=\frac{49-16}{14}=\frac{33}{14}\,.$$

Finalmente, a área sombreada é dada por $2\times\frac{33}{14}+14=\frac{33}{7}+14=\frac{131}{7}\ \mathrm{cm}^2$.

182. ***Dois motoristas*** – Sabemos que a velocidade é a razão da distância percorrida pelo tempo gasto. Seja d a distância entre as duas cidades A e B.

- O primeiro motorista percorre a distância de $2d$ à velocidade constante de 80 km/h, portanto, o tempo total gasto por esse motorista é

$$t=\frac{2\,d}{80}=\frac{d}{40}\ \text{horas.}$$

- O segundo motorista percorre a distância d na ida à uma velocidade constante de 90 km/h e, na volta, percorre a mesma distância d à velocidade constante de 70 km/h. Logo, o tempo gasto na ida e volta é

$$t=\frac{d}{70}+\frac{d}{90}=\frac{16\,d}{630}=\frac{8\,d}{315}\ \text{horas.}$$

Como

$$\frac{d}{40}=\frac{8d}{320}<\frac{8d}{315}\,,$$

verificamos que o motorista que viaja à velocidade constante de 80 km/h é o que gasta menos tempo no percurso de ida e volta.

183. ***Soma e inverte*** – Como 0 não é o inverso de número algum, qualquer sequência que comece e termine em 0 deve ser dada por

$$0\xrightarrow{+1}1\longrightarrow\cdots\longrightarrow-1\xrightarrow{+1}0.$$

Uma sequência dessas é a seguinte.

$$0\xrightarrow{+1}1\xrightarrow{+1}2\xrightarrow{+1}3\xrightarrow{-i}-\frac{1}{3}\xrightarrow{+1}\frac{2}{3}\xrightarrow{+1}\frac{5}{3}\xrightarrow{+1}\frac{8}{3}\xrightarrow{-i}-\frac{3}{8}\xrightarrow{+1}\frac{5}{8}\xrightarrow{+1}\frac{13}{8}\xrightarrow{+1}\frac{21}{8}$$

$$\xrightarrow{-i}-\frac{8}{21}\xrightarrow{+1}\frac{13}{21}\xrightarrow{-i}-\frac{21}{13}\xrightarrow{+1}-\frac{8}{13}\xrightarrow{+1}\frac{5}{13}\xrightarrow{-i}-\frac{13}{5}\xrightarrow{+1}-\frac{8}{5}\xrightarrow{+1}-\frac{3}{5}\xrightarrow{+1}\frac{2}{5}$$

$$\xrightarrow{-i}-\frac{5}{2}\xrightarrow{+1}-\frac{3}{2}\xrightarrow{+1}-\frac{1}{2}\xrightarrow{+1}\frac{1}{2}\xrightarrow{-i}-2\xrightarrow{+1}-1\xrightarrow{+1}0.$$

Uma outra sequência, bem mais curta e simples é, simplesmente,

$$0\xrightarrow{+1}1\xrightarrow{-i}-1\xrightarrow{+1}0.$$

184. ***Carro flex***

(a) Com cada litro de gasolina, que custa R\$ 2,49, o carro roda 12,3 quilômetros. Logo, o preço do quilômetro rodado é de $\dfrac{2{,}49}{12{,}3}$ reais. Se o carro fizer y quilômetros por litro de álcool, o preço do quilômetro rodado com álcool é de $\dfrac{1{,}59}{y}$ reais. Para que a utilização do álcool seja mais vantajosa, financeiramente, é necessário que

$$\frac{1{,}59}{y} < \frac{2{,}49}{12{,}3}, \quad \text{ou seja, que} \quad y > \frac{1{,}59 \times 12{,}3}{2{,}49} = 7{,}85.$$

Assim, o consumo desse carro com álcool deve ser maior do que 7,85 km/l.

(b) Supondo que o consumo do carro seja de x km/l de gasolina e de y km/l de álcool, queremos saber quando o custo com gasolina é maior do que o custo com álcool, isto é, quando

$$\frac{2{,}49}{x} > \frac{1{,}59}{y},$$

o que acarreta $2{,}49\,y > 1{,}59\,x$, ou seja, $y > 0{,}64\,x$, já que x e y são valores positivos. Um exemplo disso é o carro como o do item (a), que consuma 12,3 km/l de gasolina e 8 km/l de álcool. Ou, então, um carro que faça 10 km/l de gasolina e 7 km/l de álcool.

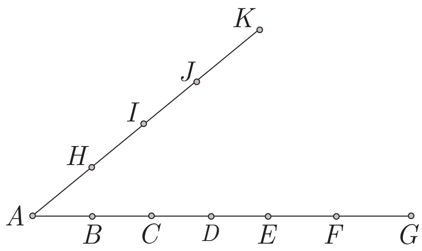
(c) Com cada litro de gasolina, que custa R\$ 2,49, o carro roda x quilômetros. Logo, o preço de 100 quilômetros rodados é de $g(x) = 100\,\dfrac{2{,}49}{x} = \dfrac{249}{x}$ com gasolina. Com cada litro de álcool, que custa R\$ 1,59, o carro roda $\dfrac{x}{2} + 1$ quilômetros. Logo, o preço de 100 quilômetros rodados com álcool é de $a(x) = 100\,\dfrac{1{,}59}{\frac{x}{2}+1} = \dfrac{318}{x+2}$.

(d) Para que o custo seja o mesmo, basta ter $\dfrac{249}{x} = g(x) = a(x) = \dfrac{318}{x+2}$, ou seja, $249\,(x+2) = 318\,x$, cuja solução é $x = 7{,}22$ km/l, que deve ser o consumo com gasolina. Para que o custo seja o mesmo, o consumo do carro com álcool deve ser de $\dfrac{7{,}22}{2} + 1 = 4{,}61\,\text{km/l}$.

(e) Supondo que o consumo do carro seja de x km/l de gasolina e de $\dfrac{x}{2} + 1$ km/l de álcool, queremos saber quando o custo com álcool é menor do que o custo com gasolina, isto é, quando $\dfrac{3{,}18}{x+2} < \dfrac{2{,}49}{x}$, o que acarreta $0{,}69\,x < 4{,}98$, ou seja, $x < 7{,}22$, já que x é um valor positivo. Assim, só é financeiramente vantajoso abastecer com álcool se o consumo com gasolina for menor do que 7,22 km/l. Um exemplo disso é um carro que faça 6 km/l de gasolina e, portanto, 4 km/l com álcool: nesse caso, por exemplo, o custo de 100 quilômetros rodados com gasolina é de $g(6) =$ R\$ 41,50 e com álcool é de $a(6) =$ R\$ 39,75. Observe que, a partir de um consumo de 7,22 km/l de gasolina, é financeiramente vantajoso abastecer só com gasolina; por exemplo, se o carro fizer 10 km/l de gasolina e, portanto, 6 km/l de álcool, o custo de 100 quilômetros rodados com gasolina é de $g(10) =$ R\$ 24,90 e com álcool é de $a(10) =$ R\$ 26,50.

Observação: Todos os valores utilizados nessas soluções foram arredondados na segunda casa decimal.

185. ***Contando triângulos*** – Sejam $A, B, \ldots, K$ os onze pontos marcados, como na figura dada.



Dividiremos a contagem em três casos.

(i) Um vértice é A. Nesse caso, um vértice do triângulo deve estar no conjunto $\{H, I, J, K\}$ e o outro vértice no conjunto $\{B, C, D, E, F, G\}$. Como existem quatro escolhas para um vértice e seis escolhas para o outro vértice, a quantidade de triângulos com um vértice no ponto A é $6 \times 4 = 24$.

(ii) Dois vértices em $\{B, C, D, E, F, G\}$. O número de possíveis escolhas de dois dentre esses seis pontos é

$$C_6^2 = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15.$$

O outro vértice do triângulo é qualquer um dos quatro pontos H, I, J ou K. Daí, a quantidade desses triângulos é $4 \times 15 = 60$.

(iii) Dois vértices em $\{H, I, J, K\}$. O número de possíveis escolhas de dois dentre esses quatro pontos é

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \times 3}{2} = 6.$$

Como o outro vértice pode ser escolhido de seis maneiras diferentes no conjunto $\{B, C, D, E, F, G\}$, resulta que a quantidade desses triângulos é $6 \times 6 = 36$.

Logo, $24 + 60 + 36 = 120$ é a quantidade de triângulos cujos vértices são tomados dentre os onze pontos da figura.

186. ***Quadrado perfeito*** – Seja x um número de oito algarismos, da forma $x = 9999 * * * *$.

Como o menor desses números é 99 990 000 e o maior é 99 999 999, temos que

$$99\,990\,000 \leq x \leq 99\,999\,999.$$

Observemos que $10\,000^2 = 100\,000\,000 = 99\,999\,999 + 1$ e que

$$9\,999^2 = \left(10\,000 - 1\right)^2 = 10\,000^2 - 20\,000 + 1 = 99\,980\,001.$$

Isso mostra que $9\,999^2 < x < 10\,000^2$, ou seja, x está compreendido entre dois quadrados perfeitos consecutivos. Assim, x não pode ser um quadrado perfeito, ou seja, não existe algum quadrado perfeito da forma $9999 * * * *$.

187. ***Diferença quase nula*** – A desigualdade $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} < 0{,}01$ é equivalente a $\sqrt{n} < 0{,}01 + \sqrt{n-1}$. Como os dois lados da desigualdade são números positivos, podemos elevar ambos membros ao quadrado para obter a desigualdade equivalente

$$\left(\sqrt{n}\right)^2 < \left(0{,}01 + \sqrt{n-1}\right)^2.$$

Mas isso equivale a $n < 0{,}01^2 + 0{,}02\sqrt{n-1} + n - 1$, donde obtemos

$$\sqrt{n-1} > \frac{1 - 0{,}01^2}{0{,}02} = \frac{1 - \frac{1}{100^2}}{\frac{2}{100}} = \frac{100^2 - 1}{200}\,.$$

Elevando, novamente, ao quadrado os dois membros (não negativos) dessa desigualdade, obtemos

$$n-1>\frac{(100^2-1)^2}{200^2}=\frac{100^4-2\times 100^2+1}{4\times 100^2}=\frac{100^2}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4\times 100^2}$$

ou seja,

$$n-1>2\,500-\frac{1}{2}+\frac{1}{40\,000}$$

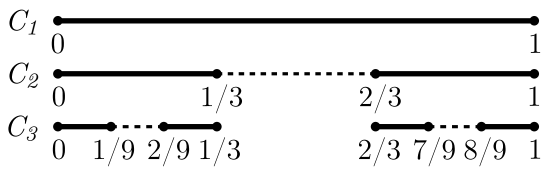
e, finalmente,

$$n>2\,500+\frac{1}{2}+\frac{1}{40\,000}\,.$$

Como $\frac{1}{2}+\frac{1}{40\,000}<1$, temos que o menor número inteiro que satisfaz essa última desigualdade é 2 501. Assim, estabelecemos que o menor número inteiro positivo que satisfaz a desigualdade dada é o número 2 501.

188. ***Conjunto de Cantor***

(a) De acordo com a definição do conjunto de Cantor, temos o desenho seguinte.



(b) 1/3 é uma extremidade de C_2, portanto, pertence ao conjunto de Cantor. $3/81=1/27$ e $1/27$ é uma extremidade de C_4, portanto, 3/81 pertence ao conjunto de Cantor. 4/9 está entre 1/3 e 2/3, portanto, está no terço central de C_1, que foi removido de C_2; assim, 4/9 não pertence ao conjunto de Cantor. 4/81 está entre 1/27 e 2/27, portanto, está no terço central do primeiro segmento de C_3, que foi removido de C_4; assim, 4/81 não pertence ao conjunto de Cantor.

(c) Observe que C_1 tem comprimento 1, C_2 tem comprimento 2/3, C_3 tem comprimento 4/9, C_4 tem comprimento 8/27 e C_5 tem comprimento 16/81. Assim, os comprimentos de $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n, \ldots$ formam uma progressão geométrica de razão $q=2/3$ e primeiro termo $a_1=1$, como segue.

$$1,\ \frac{2}{3},\ \left(\frac{2}{3}\right)^2,\ \left(\frac{2}{3}\right)^3,\ \left(\frac{2}{3}\right)^4,\ldots,\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1},\ldots$$

Em particular, o comprimento de C_n é $(2/3)^{n-1}$.

189. ***Enchendo uma piscina*** – Como as torneiras A e B despejam água na piscina com vazão constante, o volume de água despejado na piscina de cada uma das torneiras é proporcional ao tempo em que ela fica aberta. Assim, se durante duas horas a torneira A enche 15% do volume da piscina, então em 4 horas ela encherá 30% do volume da piscina.

Mas, quando as torneiras A e B ficam simultaneamente abertas durante quatro horas, elas conseguem encher 50% do volume da piscina. Daí, temos que a torneira B enche $50\%-30\%=20\%$ do volume da piscina em quatro horas.

Para saber quanto tempo a torneira B deve ficar aberta para encher os 35% restantes do volume da piscina, basta utilizar a regra de três.

horas		percentual
4	$\rightarrow$	20%
x	$\rightarrow$	35%

Logo, a torneira B gastará $x = \dfrac{35 \times 4}{20} = 7$ horas para encher os 35% restantes.

190. ***Probabilidade de ser um número par***

Solução 1: Sejam a e b os números escritos nas bolas retiradas por José e Maria, respectivamente. Existem, então, nove possibilidades para a e oito possibilidades para b. Desse modo, existem $9 \times 8 = 72$ possibilidades para o número $a\,b$. Para contar quantos desses números $a\,b$ são pares, precisamos analisar separadamente dois casos, como segue.

- Ambos números a e b são pares.
- O número a é ímpar e o número b é par.

No primeiro caso, em que a e b são pares, existem quatro possibilidades para a e três possibilidades para b. Desse modo, existem $4 \times 3 = 12$ possibilidades ao todo.

No segundo caso, em que a é ímpar e b é par, existem cinco possibilidades para a e quatro possibilidades para b. Desse modo, existem $5 \times 4 = 20$ possibilidades.

Portanto, a probabilidade de o número $a\,b$ ser par é $\dfrac{12+20}{72} = \dfrac{32}{72} = \dfrac{4}{9}$.

Solução 2: A paridade do número a ser formado depende da paridade do número escrito na bola a ser retirada por Maria. Dentre os números inteiros de 1 a 9, existem cinco ímpares, 1, 3, 5, 7 e 9, e quatro pares, 2, 4, 6 e 8. Portanto, a probabilidade de que o número a ser formado seja par é $\dfrac{4}{5+4} = \dfrac{4}{9}$.

191. ***Múltiplo de 7*** – $N = (n+6m)(2n+5m)(3n+4m)$ é um múltiplo de 7.

Solução 1: Inicialmente, observemos que, denotando $k = n - m$, temos

$$\begin{aligned} N &= (n+6m)(2n+5m)(3n+4m) \\ &= (n+7m-m)(2n+7m-2m)(3n+7m-3m) \\ &= (n-m+7m)\big[2(n-m)+7m\big]\big[3(n-m)+7m\big] \\ &= (k+7m)(2k+7m)(3k+7m). \end{aligned}$$

Como 7 é primo e divide N, então pelo menos um dos três fatores $k+7m$, $2k+7m$ ou $3k+7m$ de N é múltiplo de 7.

(i) Se $k+7m$ é múltiplo de 7, então $\dfrac{k+7m}{7} = \dfrac{k}{7} + m$ é inteiro, logo k é múltiplo de 7. Segue que $2k$ e $3k$ também são múltiplos de 7 e, portanto, os três fatores $k+7m$, $2k+7m$ e $3k+7m$ de N são múltiplos de 7. Concluímos que N é múltiplo de 7^3.

(ii) Se $2k+7m$ é múltiplo de 7, então $\dfrac{2k+7m}{7} = \dfrac{2k}{7} + m$ é inteiro, logo $2k$ é múltiplo de 7. Como 2 e 7 são primos entre si, segue que k é múltiplo de 7, o que leva ao caso anterior e N resulta ser múltiplo de 7^3.

(iii) Se $3k+7m$ é múltiplo de 7, analogamente concluímos que k é múltiplo de 7, o que leva ao caso anterior e N é múltiplo de 7^3.

Assim, estabelecemos que N é múltiplo de 7^3.

Solução 2: Consideremos os números $A = n+6m$, $B = 2n+5m$ e $C = 3n+4m$. Como o número primo 7 divide o produto $N = A \times B \times C$, então 7 divide pelo menos um desses fatores. Para concluir que 7^3 divide N, basta mostrar, portanto, que se 7 divide algum dos números A, B ou C então 7 divide cada um deles.

Suponhamos que 7 divida A. Então 7 divide $2A$. Mas $2A = 2n + 12m = B + 7m$. Como 7 também divide $7m$, segue que 7 divide B. Da mesma forma, como 7 divide A, segue que 7 divide $3A$. Mas $3A = 3n + 18m = C + 14m$. Como 7 também divide $14m$, concluímos que 7 divide C.

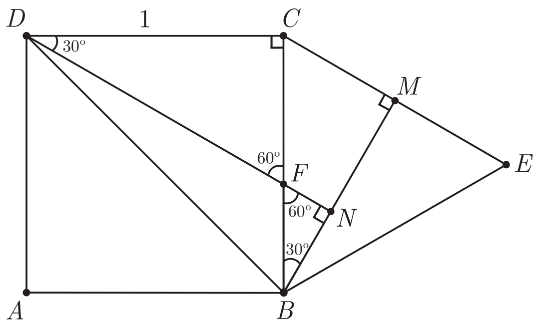
Suponhamos que 7 divida B. Então 7 divide $4B$. Mas $4B = 8n+20m = A+7(n+2m)$. Como 7 também divide $7(n+2m)$, segue que 7 divide A. Como já foi mostrado acima, dividindo A, 7 também divide C.

Suponhamos que 7 divida C. Então 7 divide $5C$. Mas $5C = 15n + 20m = A + 7(2n + 2m)$. Como 7 também divide $7(2n + 2m)$, segue que 7 divide A. Como já foi mostrado acima, dividindo A, 7 também divide B.

192. ***Os ângulos* $15°$ *e* $75°$** – Como DB é a diagonal de um quadrado de lado medindo 1 cm, o Teorema de Pitágoras garante que $DB^2 = 1^1 + 1^2 = 2$, ou seja, $DB = \sqrt{2}$. Recordemos que

$$\cos 60° = \operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}; \qquad \operatorname{tg} 60° = \frac{\operatorname{sen} 60°}{\cos 60°} = \sqrt{3};$$
$$\operatorname{sen} 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad \operatorname{tg} 30° = \frac{\operatorname{sen} 30°}{\cos 30°} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(a) O triângulo $\triangle BCE$ é equilátero, logo seus ângulos internos medem $60°$. A partir dessa informação, obtemos os ângulos assinalados na figura.



No triângulo $\triangle CDF$ temos $\operatorname{sen} 60° = \dfrac{CD}{DF} = \dfrac{1}{DF}$. Como $\operatorname{sen} 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, segue que $\dfrac{1}{DF} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e, portanto, que $DF = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Ainda no triângulo $\triangle CDF$ temos $\cos 60° = \dfrac{CF}{DF} = \dfrac{CF}{2\sqrt{3}/3}$. Mas $\cos 60° = \dfrac{1}{2}$, de onde se conclui que $\dfrac{1}{2} = \dfrac{CF}{2\sqrt{3}/3}$, ou seja, $CF = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Segue que $BF = 1 - CF = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Temos, agora,

$$\frac{1}{2} = \operatorname{sen} 30° = \frac{FN}{BF} = \frac{FN}{1 - \sqrt{3}/3}, \quad \text{de modo que} \quad FN = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}$$

e

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30° = \frac{BN}{BF} = \frac{BN}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}, \quad \text{de modo que} \quad BN = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

Assim, calculamos os três lados do triângulo $\triangle DBN$, como segue.

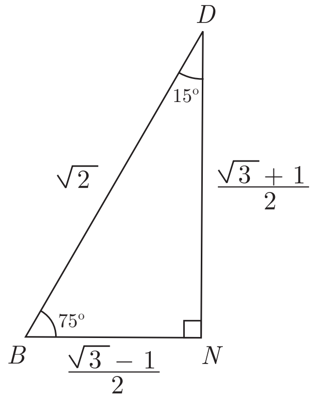
- $DB = \sqrt{2}$;
- $DN = DF + FN = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} + \dfrac{3 - \sqrt{3}}{6} = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}$;
- $BN = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}$.

(b) No triângulo $\triangle DBN$ temos $D\widehat{B}N = 45° + 30° = 75°$, donde concluímos que $B\widehat{D}N = 15°$. Assim, temos

$$\cos 75° = \frac{BN}{DB} = \frac{\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

e

$$\cos 15° = \frac{DN}{DB} = \frac{\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

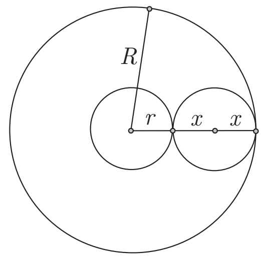


Resta observar que sen $75° = \cos 15°$, sen $15° = \cos 75°$ e que

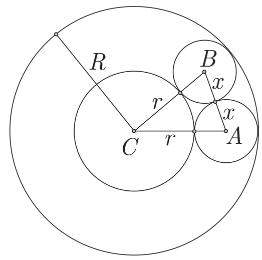
$$\text{tg}\, 75° = \frac{\text{sen}\, 75°}{\cos 75°} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \text{tg}\, 15° = \frac{\text{sen}\, 15°}{\cos 15°} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}.$$

193. ***Círculos tangentes***

(a) Na figura dada estão desenhadas dois círculos concêntricos de raios r e R e um círculo de raio x, simultaneamente tangente aos dois círculos concêntricos. Logo, $r + 2x = R$, donde $x = \dfrac{R-r}{2}$.

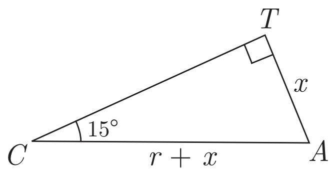


(b) Na figura dada temos dois círculos tangentes de raio x que também são tangentes aos dois círculos concêntricos de raios r e R. Os pontos A, B e C são os centros desses círculos. Para traçar doze círculos de raio x na região entre os dois círculos concêntricos, devemos ter $A\widehat{C}B = \dfrac{360°}{12} = 30°$.



Se T é o ponto de tangência dos círculos de raio x, então T é ponto médio do segmento AB e $A\widehat{C}T = 15°$. Nesse triângulo retângulo temos

$$\text{sen}\, 15° = \frac{AT}{AC} = \frac{x}{r+x}.$$



Observe que

$$\begin{aligned}\text{sen}\, 15° &= \text{sen}\,(45° - 30°) = \text{sen}\, 45° \cos 30° - \cos 45° \text{sen}\, 30° \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\end{aligned}$$

o que coincide com o valor obtido na questão precedente. Mas $x = \dfrac{R-r}{2}$, do que concluímos que $\dfrac{R-r}{R+r} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Dividindo por r o numerador e o denominador do membro esquerdo dessa igualdade obtemos

$$\frac{\dfrac{R}{r} - 1}{\dfrac{R}{r} + 1} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Segue que $4\Big(\dfrac{R}{r}-1\Big)=\big(\sqrt{6}-\sqrt{2}\big)\Big(\dfrac{R}{r}+1\Big)$ e, finalmente,

$$\frac{R}{r}=\frac{4+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4-\sqrt{6}+\sqrt{2}}.$$

Observação: Uma outra maneira de obter o valor de $\operatorname{sen} 15^\circ$ é utilizar a fórmula $\operatorname{sen}\big(\theta/2\big)=\sqrt{(1-\cos\theta)/2}$ do ângulo metade. Para $\theta=30^\circ$, obtemos

$$\operatorname{sen} 15^\circ=\operatorname{sen}\frac{30^\circ}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{3}/2}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

Repetindo o argumento apresentado acima com esse valor do seno, obtemos

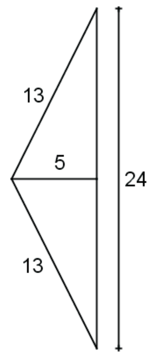
$$\frac{R}{r}=\frac{2+\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}}.$$

É bastante curioso e nada evidente, à primeira vista, que essas duas expressões envolvendo radicais sejam iguais:

$$\frac{4+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4-\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}}.$$

194. ***Mudando a base*** – Num triângulo isósceles, a altura relativa à base coincide com a mediana. Traçando essa altura no triângulo dado, de base 10, obtemos dois triângulos retângulos com catetos medindo 5 e h e hipotenusa 13. Pelo Teorema de Pitágoras, temos $h^2+5^2=13^2$, donde $h^2=13^2-5^2=144$ e, portanto, $h=\sqrt{144}=12$. Logo, a área do triângulo dado é

$$A=\frac{b\times h}{2}=\frac{10\times 12}{2}=60\,\text{cm}^2.$$



Agora "colamos" os dois triângulos retângulos ao longo do cateto medindo 5, obtendo um triângulo isósceles com $12+12=24$ cm de base, lados de 13 cm e altura relativa à base igual a 5 cm. Logo, esse novo triângulo isósceles também tem área igual a $\dfrac{24\times 5}{2}=60$ cm^2.

195. ***Clube de Matemática*** – Sejam H e M os números de homens e mulheres, respectivamente, no clube. Temos duas possibilidades. <u>Se eu sou um menino</u>, temos $M=H-1$ e, quando falta um menino, o número total de pessoas no clube é

$$M+H-1=H-1+H-1=2H-2.$$

Logo, $H-1=M=\frac{3}{4}(2H-2)$, de modo que $H=1$. Mas então, $M=1-1=0$, o que não é possível. Assim, necessariamente, <u>eu sou uma menina</u>, e, portanto, $M=H+1$ e temos $H+1=\frac{3}{4}(2H+1-1)$, donde $H=2$ e $M=3$.

196. ***Uma calculadora diferente***

Solução 1: Para calcular $(2*3)+(0*3)$ utilizamos as propriedades (i), (ii) e (iii), obtendo

$$\begin{aligned}(2*3)+(0*3)&\overset{\text{(iii)}}{=}(2+0)*(3+3)\\&=(6+(-4))*(6+0)\\&\overset{\text{(iii)}}{=}(6*6)+((-4)*0)\\&\overset{\text{(i) (ii)}}{=}6+(-4)\times 2\\&=6-8=-2.\end{aligned}$$

Para calcular $1\,024 * 48$, observe que $1\,024 = 976 + 48$. Assim,

$$\begin{aligned} 1\,024 * 48 &= (976 + 48) * (0 + 48) \\ &= (976 * 0) + (48 * 48) \\ &= 976 \times 2 + 48 \\ &= 1\,952 + 48 = 2\,000. \end{aligned}$$

Solução 2: Pelas propriedades (i), (ii) e (iii),

$$\begin{aligned} a * b &= ((a - b) + b) * (0 + b) \\ &= ((a - b) * 0) + (b * b) \\ &= (a - b) \times 2 + b \\ &= 2a - 2b - b \\ &= 2a - b, \end{aligned}$$

para quaisquer inteiros a e b. Assim,

$$(2 * 3) + (0 * 3) = (2 \times 2 - 3) + (2 \times 0 - 3) = 1 - 3 = -2$$

e

$$1\,024 * 48 = 2 \times 1\,024 - 48 = 2\,048 - 48 = 2\,000.$$

Observação: Existe uma única operação $*$ sobre os inteiros com as propriedades (i), (ii) e (iii) do enunciado, a saber, $a * b = 2a - b$, como mostramos na segunda solução. No entanto, mesmo restringindo o domínio de $*$ aos inteiros não negativos, é possível mostrar que uma operação com as propriedades (i), (ii) e (iii) do enunciado existe, e é única, sendo dada por $a * b = 2a - b$, só que, agora, precisamos nos restringir a *números inteiros não negativos* a, b tais que $2a \geq b$, para que o resultado da operação ainda seja um número inteiro não negativo. Denotemos o conjunto dos inteiros não negativos por $\mathbb{N}^*$.

É claro que a dedução feita na segunda solução se aplica somente se $a \geq b$ pois, nesse caso, $a - b \in \mathbb{N}^*$. Para provar a existência e unicidade da operação $a * b$ nos inteiros não negativos tais que $2a \geq b$, precisamos de um argumento mais sutil, como segue.

Supondo que a operação $a * b$ esteja definida em $\mathbb{N}^*$ sempre que $2a \geq b$, dando um resultado em $\mathbb{N}^*$ e satisfazendo as propriedades (i), (ii) e (iii) do enunciado, afirmamos que $a * b = 2a - b$ vale sempre. De fato, dado $c \in \mathbb{N}^*$, temos $c * (2c) = 0$, já que podemos cancelar $2c$ de ambos lados da igualdade

$$2c = (2c) * (2c) = (c + c) * (2c + 0) = (c * (2c)) + (c * 0) = (c * (2c)) + 2c.$$

Agora, dados $a, b \in \mathbb{N}^*$, com $2a \geq b$ e $b > a$, temos $2a - b, b - a \in \mathbb{N}^*$ e

$$\begin{aligned} a * b &= \big((2a - b) + (b - a)\big) * \big((2a - b) + (2b - 2a)\big) \\ &= (2a - b) * (2a - b) + (b - a) * (2(b - a)) \\ &= (2a - b) + 0 = 2a - b. \end{aligned}$$

Finalmente, para $a, b \in \mathbb{N}^*$, com $2a \geq b$ e $a \geq b$, isso já foi mostrado na segunda solução. Assim, $a * b = 2a - b$ vale para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}^*$ tais que $2a \geq b$.

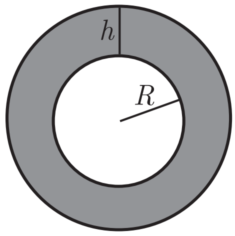
197. ***Cercando o globo terrestre*** – Como o raio da Terra é muito grande, e foi dado apenas um acréscimo de 1 m ao comprimento do fio ao longo do Equador, parece que a folga entre o fio e o Equador é muito pequena. Mais ainda, se trocarmos a Terra por Júpiter ou por uma

bolinha de gude e realizarmos essa mesma experiência, parece que a altura da folga entre o fio aumentado e o "equador" dessa esfera também muda, sendo que quanto maior a esfera considerada, menor é a folga entre o fio e o "equador" da esfera.

Mostremos que essa ideia intuitiva é falsa e que a altura da folga, entre o fio e o Equador, sempre é de aproximadamente 16 cm, independentemente do raio da esfera em que a experiência for realizada.

Consideremos a circunferência de comprimento $2\pi R$ de um círculo de raio R e também a circunferência de comprimento igual a $2\pi R + 1$ de um outro círculo de mesmo centro, de raio igual a $R + h$. Assim, h é a altura da "folga" entre as duas circunferências. Como a circunferência de um círculo de raio $R + h$ tem comprimento igual a $2\pi(R + h)$, obtemos a igualdade

$$2\pi R + 1 = 2\pi(R + h) = 2\pi R + 2\pi h$$



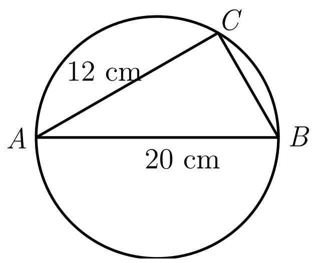
que, simplificada, fornece $1 = 2\pi h$, ou seja,

$$h = \frac{1}{2\pi} \approx \frac{1}{6{,}28} \approx 0{,}16.$$

Portanto, independentemente do valor de R, a altura da folga obtida com 1 m a mais de fio é, sempre, de aproximadamente 16 cm. Em particular, somente uma formiga é capaz de passar por debaixo desse fio.

198. ***Comprimento de uma corda*** – Sendo AB um diâmetro, o triângulo $\triangle ABC$ está inscrito numa semicircunferência, implicando que esse triângulo é retângulo no vértice C. Pelo Teorema de Pitágoras,

$$BC^2 = AB^2 - AC^2,$$



ou seja,

$$BC^2 = 20^2 - 12^2 = 256 = 16^2.$$

Assim, obtemos que $BC = 16$.

199. ***Dois irmãos*** – Sejam x e y as idades atuais dos dois irmãos e z a idade do pai. Temos

$$\begin{cases} x - y &= 3 \\ z - 1 &= 2[(x-1) + (y-1)] &= 2x + 2y - 4 \\ z + 20 &= (x + 20) + (y + 20) &= x + y + 40 \end{cases}$$

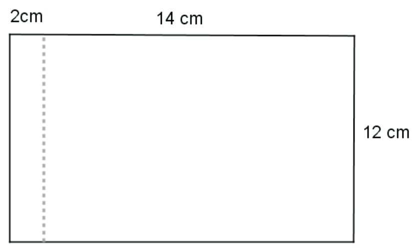
Uma maneira simples de encontrar z é multiplicar a terceira equação por 2 e do resultado subtrair a segunda equação, obtendo $2z + 40 - (z - 1) = 80 - (-4)$, o que implica $z = 43$. Usando as duas primeiras equações podemos calcular, agora, a idade dos dois filhos. Pela primeira equação, $x = y + 3$ e, pela segunda, $43 - 1 = 2x + 2y - 4$, ou seja, $x = 23 - y$. Somando essas duas equações obtidas, encontramos $2x = 26$, donde $x = 13$ e, portanto, $y = 10$.

200. ***Canelonis de ricota*** – Colando os retângulos de massa ao longo do maior lado, Pedro obtém um cilindro de base circular com 10 cm de comprimento e 16 cm de altura. O volume que ele, então, recheia com ricota é o volume V = área da base $\times$ altura desse cilindro. A área da base é dada por $\pi \times r^2$, onde r denota o raio da base. Vamos, então, calcular o raio

sabendo que o perímetro da base é 10 cm. Temos $2\pi r = 10$, ou seja, $r = 5/\pi$. Assim, o volume de ricota para cada caneloni é dado, nesse caso, por

$$V = \pi \times \frac{5^2}{\pi^2} \times 16 = \frac{16 \times 25}{\pi} = \frac{400}{\pi}\,\mathrm{cm}^3\,.$$

Agora, colando os retângulos de massa ao longo do menor lado, Pedro obtém um cilindro de base circular com 14 cm de perímetro e 12 cm de altura.



O raio da base agora é dado por $r' = 14/2\pi = 7/\pi$. Assim, o volume de ricota para cada caneloni é dado, nesse caso, por

$$V' = \pi \times \frac{7^2}{\pi^2} \times 12 = \frac{588}{\pi}\,\mathrm{cm}^3\,.$$

Finalmente, para calcular o novo gasto com ricota, usamos uma regra de três direta.

Volume (cm^3)		Ricota(g)
$\frac{400}{\pi}$	$\longrightarrow$	500
$\frac{588}{\pi}$	$\longrightarrow$	x

Segue que

$$x = \frac{500 \times 588}{400} = 735\,\mathrm{g}\,,$$

de modo que agora Pedro gasta 235 g a mais de ricota por caneloni.

201. ***Cálculo de segmentos*** – O triângulo $\triangle ABP$ é retângulo com catetos $AB = 1\,200$ e $BP = 150 + 350 = 500$. Pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$AP^2 = 1\,200^2 + 500^2 = (144 + 25) \times 10^4 = 169 \times 10^4 = (13 \times 10^2)^2\,,$$

de modo que $AP = 13 \times 10^2 = 1\,300$ m. Analogamente, considerando o triângulo retângulo $\triangle PCD$, temos

$$DP^2 = 350^2 + 1\,200^2 = (7^2 + 12^2 \times 2^2)(5^2 \times 10^2) = 25^2 \times 50^2,$$

donde $DP = 1\,250$ m. Os triângulos $\triangle PCQ$ e $\triangle PBA$ são retângulos com um ângulo em comum, logo são semelhantes e segue que

$$\frac{PQ}{PA} = \frac{PC}{PB} = \frac{CQ}{AB}\,.$$

Substituindo os valores conhecidos, obtemos

$$\frac{PQ}{1\,300} = \frac{350}{500} = \frac{CQ}{1\,200}\,.$$

Assim,

$$PQ = \frac{350 \times 1\,300}{500} = 910\,\mathrm{m} \quad \text{e} \quad CQ = \frac{350 \times 1\,200}{500} = 840\,\mathrm{m}.$$

202. ***Prá chegar junto!*** – Sabemos que a velocidade é a razão da distância percorrida pelo tempo gasto. Como as velocidades de Luisa e Ada são constantes, a distância percorrida por cada uma é proporcional ao tempo decorrido. Logo, se Ada percorre $3\,000 - 120 = 2\,880$ m no mesmo tempo em que Luisa percorre $3\,000$ m, então Ada percorrerá $3\,000$ m no mesmo tempo em que Luisa percorrer d m, numa rega de três direta.

$$\begin{array}{ccc} \text{Luisa} & \to & \text{Ada} \\ 3\,000 & \to & 2\,880 \\ d & \to & 3\,000 \end{array}$$

Assim, $d = \dfrac{3\,000^2}{2\,880} = 3\,125$ e Luisa deve partir 125 m antes do ponto A para chegar junto com Ada ao ponto B.

203. ***Um professor enfurecido*** – Quem teve x como nota mensal vai ter um desconto de $x\%$ sobre essa nota, ou seja vai perder

$$x\% \text{ de } x = \frac{x}{100} \times x = \frac{x^2}{100}\,.$$

Logo, uma nota inicial de x, depois do castigo, fica sendo $x - \dfrac{x^2}{100}$. Consideremos essa função "nota depois do castigo", dada por

$$f(x) = x - \frac{x^2}{100}\,.$$

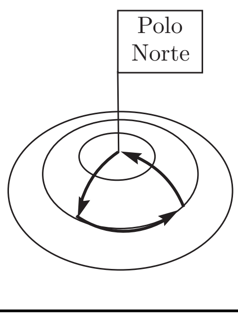
Como as notas máximas e mínimas são 0 e 100, podemos considerar essa função apenas no domínio $[0, 100]$, ou seja, para $0 \leq x \leq 100$. O gráfico de f é uma parábola com concavidade para baixo. O valor mínimo dessa função é 0, que ocorre em $x = 0$ e $x = 100$ e o valor máximo ocorre no vértice, ou seja, no ponto $x = 50$, que é a média aritmética entre as duas raízes 0 e 100 de f.

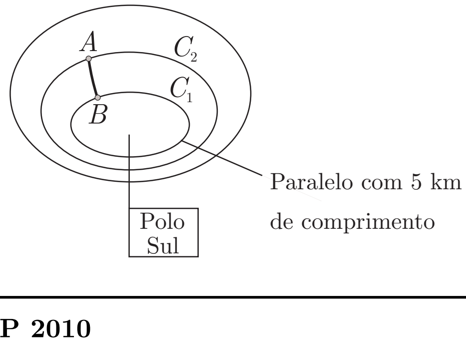
(a) A maior nota depois do castigo é para os alunos que, antes do castigo, tiraram 50. Essa nota é
$$f(50) = 50 - \frac{50^2}{100} = 25\,.$$

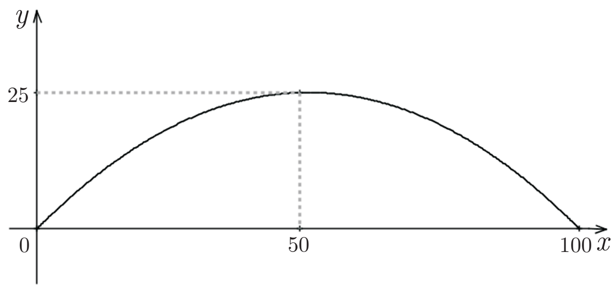
(b) A menor nota é 0 e ocorre para os alunos que tiraram 0 ou, pasmem, 100 antes do castigo. De fato, $f(0) = f(100) = 0$.

(c) Para cada nota maior do que 50 há uma outra nota, menor do que 50, que acaba sendo igual depois do castigo. De fato, pela simetria da parábola, $f(50-n) = f(50+n)$, para cada $0 \leq n \leq 50$. Por exemplo, quem tirou 30 acaba com a mesma nota 21 de quem tirou 70, pois $f(30) = 21 = f(70)$. Assim, procede a reclamação dos alunos que tiraram notas boas.

204. ***O percurso de um atleta*** – O Polo Norte da Terra é o ponto mais fácil de ser identificado como solução: saindo o atleta do Polo Norte, correndo 5 km para o Sul, depois 5 km para o Leste e finalmente 5 km para o Norte, ele volta novamente para o Polo Norte.







Vamos determinar outros ponto da Terra que satisfazem as hipóteses do problema. Consideremos o paralelo (linha paralela ao Equador) de comprimento 5 km. Existem dois deles, um próximo ao Polo Norte e outro próximo ao Polo Sul. Vamos denotar por C_1 o que está mais próximo do Polo Sul e por C_2 o paralelo que está 5 km ao Norte de C_1, distância essa medida ao longo de um meridiano. Afirmamos que qualquer ponto A sobre o paralelo C_2 satisfaz as hipóteses do problema. De fato, saindo de A e caminhando 5 km para o Sul, chega-se a um ponto B do paralelo C_1. Como C_1 mede 5 km, saindo de B e caminhando 5 km para o Leste retorna-se novamente a B. Finalmente, saindo de B e caminhando 5 km para o norte, retorna-se novamente ao ponto de partida A.

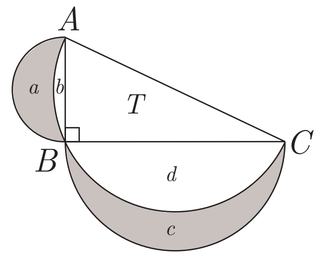
205. ***Áreas iguais*** – Seja T a área do triângulo $\triangle ABC$ e denotemos por a e c as áreas internas aos semicírculos de diâmetros AB e BC mas externas ao semicírculo de diâmetro AC e por b e d as áreas compreendidas entre os catetos do triângulo e o semicírculo de diâmetro AC. Segue que a área do semicírculo de diâmetro AB é dada por $a+b$, portanto,

$$a+b=\frac{1}{2}\pi\Big(\frac{AB}{2}\Big)^2=\frac{\pi}{8}\,AB^2,$$

a área do semicírculo de diâmetro BC é dada por $c+d$, portanto,

$$c+d=\frac{1}{2}\pi\Big(\frac{BC}{2}\Big)^2=\frac{\pi}{8}\,BC^2$$

e a área do semicírculo de diâmetro AC é dada por $b+d+T$, portanto,



$$b+d+T=\frac{1}{2}\pi\Big(\frac{AC}{2}\Big)^2=\frac{\pi}{8}\,AC^2.$$

e, em particular, $b+d=\dfrac{\pi}{8}\,AC^2-T$. Além disso, o Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo retângulo $\triangle ABC$ fornece $AC^2=AB^2+BC^2$ ou, então, $AB^2+BC^2-AC^2=0$. Assim,

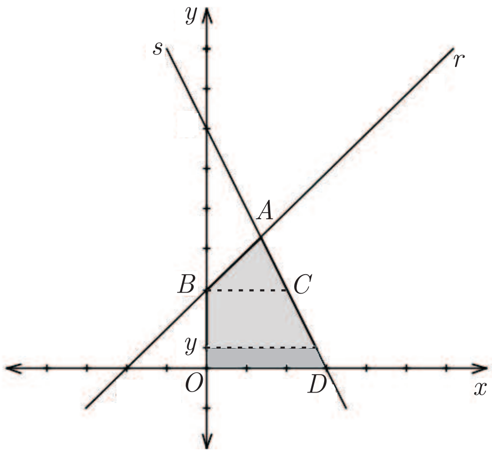
$$a+c=(a+b)+(c+d)-(b+d)=\frac{\pi}{8}\big(AB^2+BC^2-AC^2\big)+T=T,$$

ou seja, a soma $a+b$ das áreas sombreadas é igual à área T do triângulo retângulo $\triangle ABC$.

206. ***Função definida por área***

(a) A reta r passa pelo ponto $(0,2)$, portanto, tem equação dada por $y=mx+2$. Como essa reta também passa pelo ponto $(-2,0)$, temos $0=-2m+2$, o que implica $m=1$. Assim, a equação de r é $y=x+2$. A reta s passa pelo ponto $(0,6)$, portanto, tem equação dada por $y=mx+6$ e, como também passa pelo ponto $(3,0)$, temos $0=3m+6$, o que implica $m=-2$. Assim, a equação de s é $y=-2x+6$.

(b) Denotemos por A o ponto de encontro das retas r e s, $B = (0,2), O = (0,0)$, $D = (3,0)$ e por C o ponto de corte da reta s com a reta horizontal por B, como na figura dada. Por definição, $f(0)$ é a soma das áreas do triângulo $\triangle ABC$ e do trapézio $BODC$.



Para determinar as coordenadas de A, igualamos $x + 2 = -2x + 6$, obtendo $x = 4/3$. Substituindo esse valor na equação de r ou s resulta $y = 10/3$, ou seja, $A = (4/3, 10/3)$. O ponto C pertence à reta s e à reta $y = 2$, portanto, $-2x + 6 = 2$, ou seja, $x = 2$, e obtemos $C = (2,2)$. A altura do triângulo $\triangle ABC$ em relação à base BC é $h = 10/3 - 2 = 4/3$, portanto, a área do triângulo $\triangle ABC$ é igual a $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{4}{3} \times 2 = \dfrac{4}{3}$. Já a área do trapézio $BODC$ é $2 \times \dfrac{3+2}{2} = 5$, de modo que

$$f(0) = \frac{4}{3} + 5 = \frac{19}{3}\,.$$

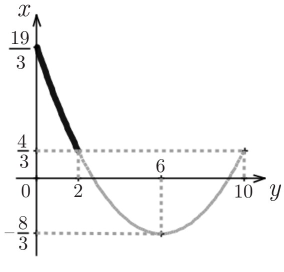
(c) Observe que $f(y)$ é igual a $f(0)$ menos a área do trapézio de altura y e bases 3 e x, sendo x a abscissa do ponto da reta s que tem ordenada y, ou seja, satisfaz $y = -2x+6$. Assim, $x = (6-y)/2 = 3 - \frac{1}{2}y$ e a área desse trapézio é dada por

$$\frac{3+x}{2}\,y = \frac{3+3-\frac{1}{2}y}{2}y = 3y - \frac{1}{4}y^2$$

e obtemos, para $0 \leq y < 2$,

$$f(y) = \frac{19}{3} - 3y + \frac{1}{4}y^2 = \frac{1}{4}y^2 - 3y + \frac{19}{3}\,.$$

(c) O gráfico de $f(y) = \dfrac{y^2}{4} - 3y + \dfrac{19}{3}$ é uma parábola côncava para cima. As coordenadas do vértice V dessa parábola são $x = \dfrac{3}{2/4} = 6$ e



$$y = f(6) = \frac{6^2}{4} - 3 \times 6 + \frac{19}{3} = -9 + \frac{19}{3} = -\frac{8}{3}\,,$$

ou seja, $V = \big(6, -8/3\big)$. Como $f(2) = 1 - 6 + \dfrac{19}{3} = \dfrac{4}{3}$, o gráfico de f, com $0 \leq y < 2$, é o segmento de parábola em linha grossa na figura dada.

207. ***PA e PG*** – Os quatro termos de uma progressão aritmética de razão r podem ser escritos como

$$x,\ x+r,\ x+2r,\ x+3r.$$

Assim, os três números em progressão geométrica são $x,\ x+2r,\ x+3r$. Então, pela própria definição de progressão geométrica, $x+2r$ é a média geométrica de x e $x+3r$, ou seja,

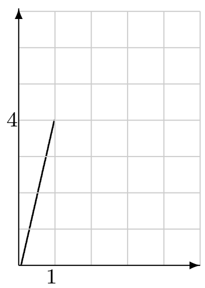
$$x\left(x+3r\right)=\left(x+2r\right)^2.$$

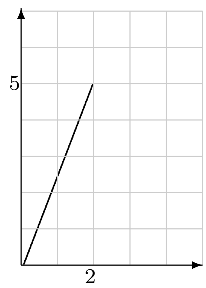
Segue daí que $x^2+3xr=x^2+4xr+4r^2$ e, portanto, $-xr=4r^2$. O caso $r=0$ não é interessante, pois daria origem a progressões constantes. Supondo $r\neq 0$, obtemos $-x=4r$.

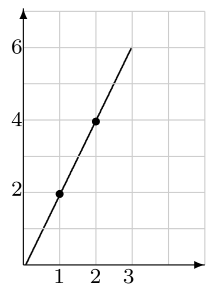
Atribuindo valores não-nulos a x, obtemos soluções do problema. Por exemplo, para $x=4$, obtemos ($r=-1$ e) a progressão aritmética $4,3,2,1$ tal que os números 4, 2, 1 formam uma progressão geométrica. Note que esse problema tem uma infinidade de soluções, uma para cada valor escolhido de $x\neq 0$.

208. ***Plano cartesiano*** – Comecemos examinando alguns casos.

- $f(1)$ é o número de pontos inteiros sobre o segmento que liga $(0,0)$ ao ponto $(1,4)$, portanto, $f(1)=0$.
- $f(2)$ é o número de pontos inteiros sobre o segmento que liga $(0,0)$ ao ponto $(2,3)$, portanto, $f(2)=0$.
- $f(3)$ é o número de pontos inteiros sobre o segmento que liga $(0,0)$ ao ponto $(3,6)$. Como nesse segmento estão os dois pontos inteiros $(1,2)$ e $(2,4)$, segue que $f(3)=2$.







Vejamos, agora, o caso geral. Note que se um ponto inteiro (x,y) está sobre o segmento que une $(0,0)$ a $(n,n+3)$, sem ser uma das extremidades, então $0<x<n$ e $0<y<n+3$. Fixado n, temos dois casos: ou 3 divide n ou 3 não divide n.

1º Caso: 3 divide n. Mostremos que $f(n)=2$. De fato, vamos supor que $n=3k$, com k inteiro. Queremos encontrar todos os pontos inteiros do segmento que une a origem $(0,0)$ ao ponto $(3k,3k+3)$. Seja (x,y) um desses pontos. Então

$$\frac{x}{y}=\frac{3k}{3k+3}=\frac{k}{k+1}.$$

Como a última fração acima é irredutível, deduzimos que x é um múltiplo de k e, como $0<x<n=3k$, necessariamente $x=k$ ou $x=2k$. Os únicos pontos inteiros são, portanto, $(k,k+1)$ e $(2k,2k+2)$. Assim, $f(n)=2$.

2º Caso: 3 não divide n. Mostremos que $f(n)=0$. Vamos precisar do seguinte resultado.

Lema. Se 3 não divide n, então n e $n+3$ são primos entre si.

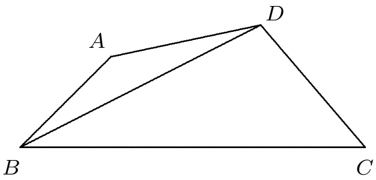
Demonstração. Suponhamos que o MDC entre n e $n+3$ seja $d>1$. Então d divide n e $n+3$, portanto d divide $(n+3)-n=3$. Logo, como $d>1$, temos $d=3$, o que não é possível, porque partimos da hipótese de que 3 não divide n. Assim, o MDC de n e $n+3$ é 1, provando o lema. $\square$

Mostremos, agora, que os únicos pontos inteiros sobre o segmento que une $(0,0)$ a $(n, n+3)$ são as extremidades. De fato, suponhamos que esse segmento contenha algum ponto inteiro (x, y) diferente das extremidades. Então $0 < x < n$ e

$$\frac{x}{y} = \frac{n}{n+3}\,.$$

Mas, pelo lema, a fração $\dfrac{n}{n+3}$ é irredutível, portanto, x é múltiplo de n, o que não pode acontecer porque $0 < x < n$. Assim, concluímos que $f(n) = 0$.

209. ***Trabalhando com um quadrilátero*** – Lembre que qualquer lado de um triângulo é maior do que a diferença e menor do que a soma dos outros dois lados. No triângulo ADB temos $AD - AB < BD < AD + AB$ e no triângulo CBD temos $BC - CD < BD < BC + CD$.



Substituindo os valores conhecidos, obtemos $9 - 5 < BD < 5 + 9$ e $17 - 5 < BD < 17 + 5$, ou seja,

$$4 < BD < 14 \quad \text{e} \quad 12 < BD < 22.$$

Dessas duas desigualdades concluímos que $12 < BD < 14$ e, como BD é inteiro, só podemos ter $BD = 13$.

210. ***O triângulo de Reuleaux*** – O triângulo de Reuleaux é formado por 4 regiões, um triângulo equilátero e três calotas. Cada calota é um sexto de um círculo de raio 1, do qual foi retirado um triângulo equilátero de lado 1. Pelo Teorema de Pitágoras, a altura desse triângulo equilátero mede

$$\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,,$$

portanto, a área desse triângulo equilátero é dada por

$$\frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\,.$$

A área de um setor circular que é um sexto do círculo de raio 1 é dada por $\frac{1}{6}\pi$, portanto, a área de cada calota é dada pela diferença

$$\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\,.$$

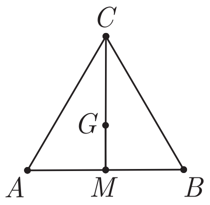
Assim, a área do triângulo de Reuleaux mede

$$3\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^2.$$

211. ***Interseção de círculos*** – Seja G o baricentro do triângulo $\triangle ABC$, ou seja, o ponto de encontro de suas medianas. Como a figura é invariante por rotações de 60° ao redor do ponto G, vemos que o triângulo $\triangle XYZ$ é equilátero e que G também é o seu baricentro.

Calculemos o comprimento L de seu lado em termos do lado a do triângulo $\triangle ABC$ e do raio r dos círculos. Seja CM a altura do triângulo $\triangle ABC$ em relação à base AB. Como a altura de um triângulo equilátero de lado a mede $\frac{1}{2}\,a\sqrt{3}$ e o baricentro divide a altura em dois segmentos, um com o dobro do comprimento do outro, obtemos

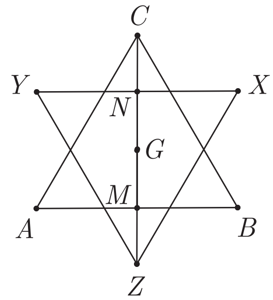
$$CM = \tfrac{1}{2}\,a\sqrt{3}\,, \quad GM = \tfrac{1}{3}\,CM = \tfrac{1}{6}\,a\sqrt{3} \quad \text{e} \quad CG = \tfrac{2}{3}\,CM = \tfrac{1}{3}\,a\sqrt{3}\,.$$



$\boxed{\overline{CG} = 2\ \overline{GM}}$

Como $AZ = BZ = r$, vemos que o ponto Z está na reta mediatriz do segmento AB. Entretanto, essa mediatriz é a reta suporte da altura CM do triângulo $\triangle ABC$. Desse modo, vemos que os pontos C, G, M e Z estão alinhados e que o triângulo $\triangle MZB$ é retângulo, com hipotenusa $BZ = r$ e cateto $MB = \frac{1}{2}\,a$.

Pelo Teorema de Pitágoras,



$$MZ = \sqrt{BZ^2 - MB^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2}$$

e

$$GZ = GM + MZ = \tfrac{1}{6}\,a\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2}\,.$$

Como GZ é o baricentro do triângulo $\triangle XYZ$, resulta que a altura NZ desse triângulo satisfaz $NZ = \frac{3}{2}\,GZ$. Por outro lado, a altura NZ desse triângulo equilátero de lado L é dada por $\frac{1}{2}\,L\sqrt{3}$. Assim, $\frac{3}{2}\,GZ = NZ = \frac{1}{2}\,L\sqrt{3}$ e, portanto,

$$L = \sqrt{3}\,GZ = \tfrac{1}{2}\,a + \tfrac{1}{2}\sqrt{12r^2 - 3a^2}\,.$$

212. ***Valor máximo*** – Estamos procurando o valor de k para o qual é máximo o termo da sequência

$$\frac{1^2}{1{,}001}\,,\ \frac{2^2}{1{,}001^2}\,,\ \frac{3^2}{1{,}001^3}\,,\ \ldots,\ \frac{k^2}{1{,}001^k}\,,\ \frac{(k+1)^2}{1{,}001^{k+1}}\,,\ldots$$

Queremos comparar os tamanhos de dois termos quaisquer dessa sequência. O mais simples é comparar um termo qualquer com o seguinte. Ocorre que é mais fácil comparar duas frações com denominadores positivos iguais. Por exemplo, o terceiro termo é maior do que o segundo porque

$$\frac{2^2}{1{,}001^2} = \frac{2^2 \times 1{,}001}{1{,}001^3} < \frac{3^2}{1{,}001^3}\,,$$

sendo evidente que $2^2 \times 1{,}001 = 4{,}004 < 9 = 3^2$. Mais geralmente, como $1{,}001^n > 0$ para qualquer n, para verificar se

$$\frac{k^2}{1{,}001^k} = \frac{k^2 \times 1{,}001}{1{,}001^{k+1}} < \frac{(k+1)^2}{1{,}001^{k+1}}\,,$$

basta verificar se $k^2 \times 1{,}001 < (k+1)^2$. Multiplicando tudo por $1\,000$, isso equivale a $k(k - 2\,000) < 1\,000$. Ora, para $1 \le k \le 2\,000$ temos $k(k - 2\,000) \le 0 < 1\,000$ e, para $k \ge 2\,001$, vale $k(k - 2\,000) > 2\,001 > 1\,000$. Em particular,

$$\frac{2\,000^2}{1{,}001^{2\,000}} < \frac{2\,001^2}{1{,}001^{2\,001}} \quad \text{e} \quad \frac{2\,001^2}{1{,}001^{2\,001}} > \frac{2\,002^2}{1{,}001^{2\,002}}\,.$$

Logo, a sequência dada cresce estritamente com $1 \le k \le 2\,001$ e daí decresce estritamente com $k \ge 2\,001$. Assim, o maior termo dessa sequência é atingido com $k = 2\,001$.

213. ***Moedas falsas***

(a) Aladim deve retirar de cada saco um número diferente de moedas, como segue. Primeiro retira uma moeda do primeiro saco, depois duas do segundo, daí três do terceiro, e assim, sucessivamente, até o último saco, do qual retira as dez moedas. Ao todo, foram retiradas $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$ moedas, que são colocadas na balança. Se todas essas moedas fossem verdadeiras, pesariam um total de $55 \times 10 = 550$ g. Mas, como algumas são falsas, o peso será menor. Se faltar um grama é porque há somente uma moeda falsa e, portanto, o primeiro saco é o procurado. Se faltarem dois gramas é porque há duas moedas falsas e, portanto, o segundo saco é o procurado, e assim sucessivamente.

(b) Vejamos que, em geral, uma tentativa de solução como a anterior não permite a identificação dos sacos com moedas falsas. Suponhamos que Aladim tenha retirado uma moeda do primeiro saco, duas moedas do segundo, e assim sucessivamente, até o último saco, de onde ele retirou dez moedas. Se existissem dois ou mais sacos com moedas falsas, o procedimento de pesar essas 55 moedas pode ser inconclusivo. Por exemplo, digamos que na pesagem das 55 moedas faltassem 7 g, ou seja, foram pesadas 7 moedas falsas. Nesse caso, poderiam existir moedas falsas nos sacos 1 e 6, ou moedas falsas nos sacos 2 e 5, ou moedas falsas nos sacos 1, 2 e 4, etc. Ou seja, procedendo dessa maneira não é possível identificar quais são os sacos de moedas falsas.

Para resolver esse problema, ele pode proceder de uma outra maneira, como segue. Primeiro ele retira uma moeda do primeiro saco, depois duas moedas do segundo, daí quatro do terceiro, oito do quarto, dezesseis do quinto saco e assim, sucessivamente, até o último saco, sempre dobrando, a cada saco, o número de moedas retiradas do saco. Dessa forma são retiradas, ao todo,

$$1+2+4+8+16+32+64+128+256+512=1\,023$$

moedas que, juntas, pesariam 10 230 g, se todas as moedas retiradas fossem verdadeiras. A diferença entre o peso real obtido na pesagem dessas 1.023 moedas e seu peso ideal de 10 230 g, indica a quantidade de moedas falsas pesadas e em quais dos sacos elas estão.

Vejamos isso através de um exemplo. Imaginemos que na pesagem tenham sido obtidos 10 125 g, ou seja, faltaram $10\,230 - 10\,125 = 105$ g, que correspondem ao número de moedas falsas. Subtraindo, sucessivamente, os números correspondentes às moedas retiradas de cada saco, começando sempre do maior número menor do que 105, temos $105-64=41, 41-32=9, 9-8=1$, ou seja, $105=1+8+32+64$. Desse resultado, Aladim pode concluir que foram retiradas 1, 8, 32 e 64 moedas falsas do primeiro, quarto, sexto e sétimo sacos.

Vamos, agora, justificar, de um modo mais formal, o raciocínio desenvolvido no exemplo numérico. Seja p o peso obtido com a pesagem das 1 023 moedas retiradas. A diferença $10\,230-p$ é o número de moedas falsas retiradas dos sacos. Efetuando divisões sucessivas por 2, pode-se provar que qualquer número inteiro positivo se escreve, **de maneira única**, como uma soma de potências distintas de 2. De fato, é isso que fornece a justificativa teórica para a expansão binária, ou seja, em base 2, dos números naturais. No nosso caso, isso implica que

$$10\,230 - p = 1 \times a_0 + 2 \times a_1 + 2^2 \times a_2 + 2^3 \times a_3 + \cdots + 2^9 \times a_9,$$

em que cada um dos números $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_9$ é 0 ou 1.

De cada saco foram retiradas quantidades de moedas que são potências de 2 e cada saco ou contém somente moedas falsas ou contém somente moedas verdadeiras, isto é, em um mesmo saco não existem os dois tipos de moedas. Daí, temos que se algum desses números, digamos a_j, for 1, então foram retiradas 2^j moedas falsas do saco $j+1$; por outro lado, se o número a_j for 0, então foram retiradas 2^j moedas verdadeiras do saco $j+1$.

214. ***Menor inteiro*** – Como $q = 2\,005 - p$, queremos

$$\frac{5}{8} < \frac{p}{2\,005 - p} < \frac{7}{8},$$

de onde segue que $5(2\,005 - p) < 8p$ e $8p < 7(2\,005 - p)$. Logo,

$$\frac{5 \times 2\,005}{13} < p < \frac{7 \times 2\,005}{15},$$

de modo que $771{,}15 < p < 935{,}66$. Assim, 772 é o menor valor inteiro de p tal que $p+q = 2\,005$ e $5/8 < p/q < 7/8$.

215. ***Mais áreas...*** – Observe que a altura h relativa ao lado AB de todos os triângulos $\triangle ABC$ que têm o vértice C na reta $x+y=7$ é sempre a mesma, pois a reta $x+y=7$ é paralela à reta $x+y=3$ que passa por A e B. Logo, todos esses triângulos têm a mesma área, a saber,

$$\tfrac{1}{2}\,(AB \times h).$$

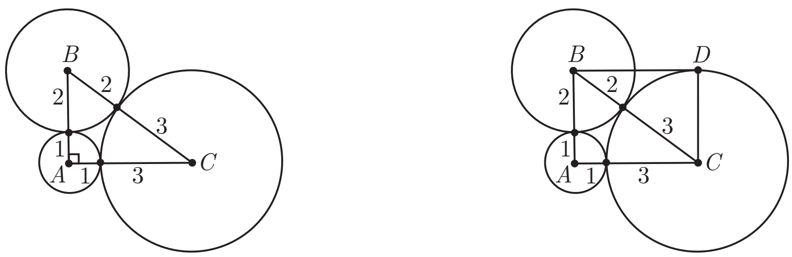
Resta, portanto, determinar AB e h. Como AB é a hipotenusa de um triângulo retângulo que tem os dois catetos iguais a 3, segue do Teorema de Pitágoras que

$$AB = \sqrt{3^3 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

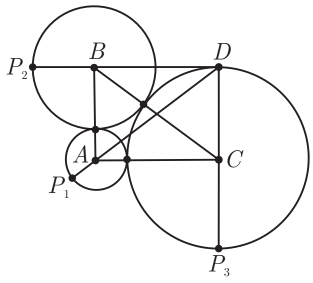
Por outro lado, h é a distância entre as retas paralelas $x+y=3$ determinada pelos pontos A e B e $x+y=7$. A reta $x=y$ é perpendicular a essas retas paralelas e forma um ângulo de 45° com o eixo Ox. Sejam M o pé da perpendicular à reta $x+y=7$ traçada a partir de A e $D=(7,0)$ o ponto de corte da reta $x+y=7$ com o eixo Ox. O triângulo $\triangle AMD$ assim formado é retângulo isósceles, com dois catetos iguais a h e hipotenusa $7-3=4$. Pelo Teorema de Pitágoras segue que $4^2 = h^2 + h^2 = 2h^2$, ou seja, $h = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Assim, a área procurada é dada por

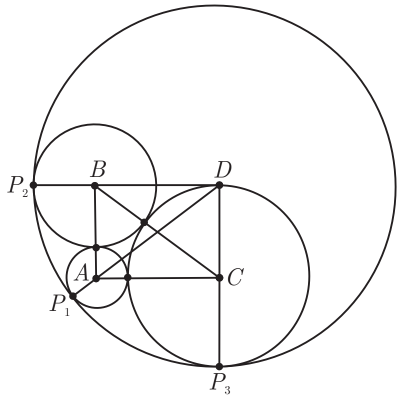
$$\tfrac{1}{2}\big(3\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}\big) = 6.$$

216. ***Círculos tangentes*** – Ligando os centros dos três círculos obtemos o triângulo $\triangle ABC$ de lados $AB=3$, $AC=4$ e $BC=5$. Como $3^2+4^2=5^2$, esse triângulo é retângulo, com hipotenusa BC.



Agora construímos o retângulo $ADCB$ com uma cópia congruente ao triângulo $\triangle ABC$ e hipotenusa comum BC, conforme figura. Como $DC = AB = 3$ e o círculo de centro C também tem raio 3, vemos que o ponto D está no círculo. Finalmente, ligamos o ponto D a cada um dos vértices do triângulo $\triangle ABC$ e prolongamos esses segmentos até que cortem os círculos centrados em A, B e C, obtendo os pontos P_1, P_2 e P_3, conforme figura.





Observe que

- $DP_2 = DB + BP_2 = CA + BP_2 = 4 + 2 = 6$,.
- $DP_1 = DA + AP_1 = 5 + 1 = 6$ e
- $DP_3 = DC + CP_3 = 3 + 3 = 6$.

Assim, $DP_1 = DP_2 = DP_3 = 6$ e, portanto, o círculo de centro D e raio 6 passa por P_1, P_2 e P_3. Além disso, como os pontos $\{D, A, P_1\}$, $\{D, B, P_2\}$ e $\{D, C, P_3\}$ estão alinhados, segue que o círculo de centro D e raio 6 é tangente exteriormente aos círculos dados de centros A, B e C.

217. ***Soma finita*** – Observe que os possíveis produtos $x_{2k-1}x_{2k}$, com $1 \leq k \leq 2\,004$ inteiro, são $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1) = 3-2\sqrt{2}$, $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1) = 3+2\sqrt{2}$ e $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 1$. Suponha que a produtos sejam iguais a $3-2\sqrt{2}$, b produtos sejam iguais a $3+2\sqrt{2}$ e $1\,002-a-b$ produtos sejam iguais a 1. A soma dada é igual a

$$a(3-2\sqrt{2}) + b(3+2\sqrt{2}) + 1\,002 - a - b = 1\,002 + 2a + 2b + 2(b-a)\sqrt{2}.$$

Assim, para que a soma seja inteira, devemos ter $a = b$. Logo, a soma é igual a $1\,002 + 4a$. Como a varia de 0 a 501, já que $a + b = 2a$ não pode ser maior do que $1\,002$, a soma dada só pode valer 502 valores inteiros distintos.

218. ***Múltiplos***

Solução 1: Observe que se um inteiro positivo m é um múltiplo de um inteiro p, então $2m - p$ é um múltiplo de p. De fato, se $m = np$, então $2m - p = 2np - p = (2n-1)p$. Em particular, tomando m igual a a, $a+1$, $a+2$ e $a+3$, estabelecemos que $2a-5$ é múltiplo de 5, $2(a+1)-7$ é múltiplo de 7, $2(a+2)-9$ é múltiplo de 9 e $2(a+3)-11$ é múltiplo de 11. No entanto, sucede que $2a-5 = 2(a+1)-7 = 2(a+2)-9 = 2(a+3)-11$, de modo que $2a-5$ é múltiplo de 5, 7, 9 e 11, donde é múltiplo de $5 \times 7 \times 9 \times 11 = 3\,465$. Assim, o menor valor possível de a satisfaz $2a - 5 = 3\,465$, ou seja, $a = 1\,735$.

Solução 2: Como a é múltiplo de 5, temos $a = 5i$, para algum i inteiro positivo. Mas $a+1 = 1+5i$ deve ser múltiplo de 7. Por tentativas, verificamos que o menor valor de i para o qual isso acontece é $i_0 = 4$. Para qualquer outro valor de i que torne $1+5i$ múltiplo de 7, devemos ter $(1+5i)-(1+5i_0) = 5(i-i_0)$ múltiplo de 7 e, portanto, $i-i_0$ múltiplo de 7. Logo, $i = i_0 + 7j = 4 + 7j$ e $a = 5i = 5(4+7j) = 20 + 35j$, com $j \geq 0$ inteiro. De maneira análoga, $a+2 = 22+35j$ deve ser múltiplo de 9. O menor valor de j para o qual isso acontece é $j_0 = 4$, pois $22 + 35 \times 4 = 162$ é múltiplo de 9. Para qualquer outro valor de j que torne $22+35j$ múltiplo de 9, devemos ter $(22+35j)-(22+35j_0) = 35(j-j_0)$ múltiplo de 9 e, portanto,

$j - j_0$ múltiplo de 9. Logo, $j = j_0 + 9k = 4 + 9k$ e $a = 20 + 35j = 20 + 35(4 + 9k) = 160 + 315k$, com $k \geq 0$ inteiro. Finalmente, 11 deve dividir

$$\begin{aligned} a + 3 = 163 + 315k &= 14 \times 11 + 9 + (28 \times 11 + 7)k \\ &= (14 + 28k) \times 11 + (9 + 7k). \end{aligned}$$

Temos, portanto, que 11 divide $9 + 7k$. Novamente, por tentativas, é simples verificar que o menor menor valor de k para o qual isso acontece é $k_0 = 5$. Qualquer outro valor de k para o qual isso aconteça é da forma $k = 5 + 11l$, com $l \geq 0$ inteiro.

Concluímos que os inteiros positivos a para os quais 5 divide a, 7 divide $a + 1$, 9 divide $a + 2$ e 11 divide $a + 3$ são exatamente os inteiros da forma $a = 160 + 315(5 + 11l) = 1\,735 + 3\,465l$, com $l \geq 0$ inteiro. Em particular, o menor valor de a é 1.735, obtido com $l = 0$.

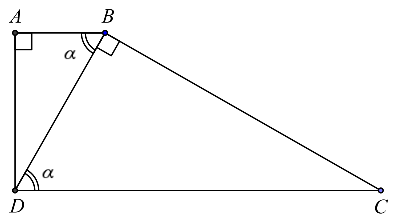
219. ***Equação de duas variáveis*** – Observemos que

$$\begin{aligned} 9xy - x^2 - 8y^2 = xy - x^2 + 8xy - 8y^2 &= x(y - x) + 8y(x - y) \\ &= (x - y)(8y - x) \end{aligned}$$

e que a fatoração de 2005 é 5×401. Como x e y são inteiros, temos somente quatro opções, a saber, $x - y = \pm 5$ e $8y - x = \pm 401$ ou $x - y = \pm 401$ e $8y - x = \pm 5$. Se $x - y = 5$ e $8y - x = 401$, podemos somar essas equações para obter $7y = 406$, ou $y = 58$ e, portanto, $x = 63$. Da mesma forma, se $x - y = -5$ e $8y - x = -401$, obtemos $7y = -406$ e, portanto, $y = -58$ e $x = -63$. Analogamente, se $x - y = \pm 401$ e $8y - x = \pm 5$, obtemos $7y = \pm 406$ e, portanto, $y = \pm 58$ e $x = \pm 459$. As únicas soluções são, portanto $(63, 58)$, $(-63, -58)$, $(459, 58)$ e $(-459, -58)$.

220. ***Trapézio retângulo*** – Denotemos $A\widehat{B}D = B\widehat{D}C = \alpha$, como na figura dada. Então temos $CD = \dfrac{BD}{\cos\alpha}$ e $AD = BD \operatorname{sen}\alpha$, donde

$$\begin{aligned} \frac{CD}{AD} &= \frac{\dfrac{BD}{\cos\alpha}}{BD \operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha \, \cos\alpha} \\ &= \frac{2}{\operatorname{sen} 2\,\alpha} \geq 2. \end{aligned}$$



Assim, o menor valor da razão CD/AD é 2, que ocorre quando $\operatorname{sen} 2\,\alpha = 1$, ou seja, quando $\alpha = 45°$.

221. ***Jogos de futebol*** – Para cada grupo de cinco alunos, existe um único time formado que os contém. Logo, contamos

$$C_{12}^5 = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{5!} = 792$$

times para cada cinco alunos escolhidos. Por outro lado, em cada time de seis jogadores, temos $C_6^5 = 6$ modos de escolhermos cinco jogadores, ou seja, existem seis grupos de cinco jogadores que deram origem ao mesmo time na nossa primeira contagem. Assim, o total de times formados é $792/6 = 132$.

222. ***A soma dos algarismos de um número***

(a) É imediato que se a é um algarismos entre 1 e 9, então $s(a\cdot 10^k)=a$, já que o número $a\cdot 10^k$ é formado pelo algarismo a seguido de k zeros. Daí, temos

$$a\cdot 10^k - s(a\cdot 10^k) = a\cdot 10^k - a = a(10^k-1) = a\times \underbrace{9\cdots 9}_{k\text{ noves}} = a\times 9\times \underbrace{1\cdots 1}_{k\text{ uns}}.$$

Como todo número pode ser decomposto em unidades, dezenas, centenas, etc, isto é, todo número inteiro positivo n pode ser escrito, de maneira única, na forma

$$n = a_0 + a_1\cdot 10 + a_2\cdot 10^2 + \cdots + a_k\cdot 10^k,$$

temos que

$$n - s(n) = a_1\cdot 9 + a_2\cdot 99 + \cdots + a_k\cdot \underbrace{9\cdots 9}_{k\text{ noves}}.$$

Assim, a diferença $n-s(n)$ é sempre divisível por 9.

(b) Seguindo o mesmo raciocínio, temos que ambos $s(n)-s(s(n))$ e $s(s(n))-s(s(s(n)))$ são divisíveis por 9, portanto, $n-s(s(s(n)))$ é divisível por 9. Em particular $2^{2\,009}-s(s(s(2^{2\,009})))$ é divisível por 9 ou, equivalentemente, $2^{2\,009}$ e $s(s(s(2^{2\,009})))$ deixam o mesmo resto quando são divididos por 9.

Como $2^6-1=63$ é divisível por 9, então substituindo $x=2^6$ e $m=334$ na identidade

$$x^m - 1 = (x-1)\big(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x^2+x+1\big),$$

concluímos que $(2^6)^{334}-1 = 2^{2\,004}-1$ é divisível por 9 e, portanto, $2^{2\,009}-2^5$ é divisível por 9. Como $2^5=32$ deixa resto 5 quando dividido por 9, temos que $2^{2\,009}$ deixa resto 5 quando dividido por 9. Por outro lado,

$$2^{2\,009} < (2^9)^{224} < (10^3)^{224} = 10^{672}.$$

Assim, $2^{2\,009}$ tem menos do que 672 algarismos e, portanto,

$$\begin{aligned} s(2^{2\,009}) &< 9\times 672 = 6.048,\\ s(s(2^{2\,009})) &\le 5+9+9+9 = 32e\\ s(s(s(2^{2\,009}))) &\le 2+9 = 13. \end{aligned}$$

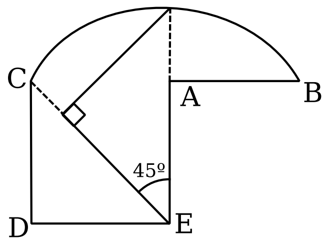
Como o único número menor do que ou igual a 13 que deixa resto 5 ao ser dividido por 9 é 5, resulta que

$$s(s(s(2^{2\,009}))) = 5.$$

Soluções dos Desafios

1. ***Cadeia do menor número* (N2/N3)** – $265\,863 \xrightarrow{\div 6\,817} 39 \xrightarrow{+221} 260 \xrightarrow{\times 51} 13\,260 \xrightarrow{-13\,259} 1.$

2. ***Qual é a metade?* (N2/N3)**



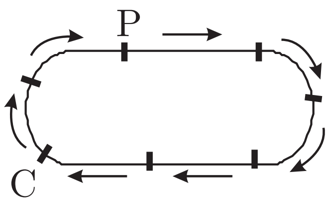
3. ***Cada um em seu estado* (N1/N2/N3)** – Bruno ou Amélia (o desafio tem duas soluções).

4. ***Divisão* (N1/N2)** – Resposta: 153.

5. ***Extra-terrestre* (N1/N2)** – Seise.

6. ***Que família!* (N1/N2)** – 3 meninas e 4 meninos.

7. ***Siga a pista* (N1)**



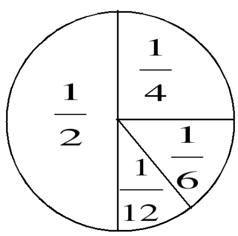
8. ***Cara ou Coroa* (N2)** – Resposta: 12.

9. ***Contas do papagaio* (N1)** – Resposta: 19.

10. ***As férias de Tomás* (N1/N2)** – Resposta: 16 dias.

11. ***Maratona de Matemática* (N3)** – Resposta: 25 e 63, respectivamente.

12. ***Frações ignoradas* (N1)**

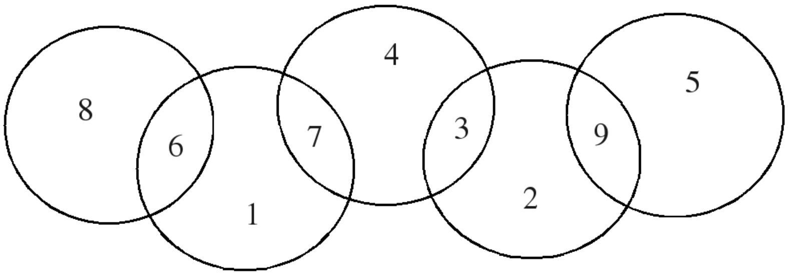


13. ***Caminho de maior total* (N2)** – ???

14. ***Produtos em linha* (N1/N2/N3)** – casa B.

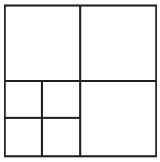
15. ***Código Postal* (N2/N3)** – Resposta: 47 679 e 47 779.

16. ***Anéis olímpicos* (N1/N2/N3)**



17. ***Partidas de Denise* (N2/N3)** – A primeira, a segunda, a terceira, a quarta e a oitava.

18. ***Sete quadrados* (N1/N2)**



19. ***Ilha misteriosa* (N1/N2/N3)** – 16 cinzas, 18 marrons e 11 vermelhos.

20. ***Universo hostil* (N3)** – Resposta: 1 873.

21. ***O jogo das fichas***

1 13	2 0	3 11
4 6	5 8	6 10
7 5	8 16	9 3

22. ***Um sistema*** – Resposta: 23.

23. ***Constelações floridas*** – Pelo menos duas soluções:

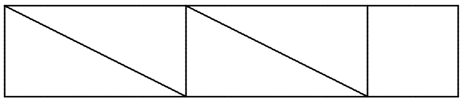
$$D = 25 \times 169 = 4\,225;\ R = 144 \times 169 = 24\,336$$

e

$$D = 49 \times 289 = 14\,161;\ R = 100 \times 144 = 14\,400.$$

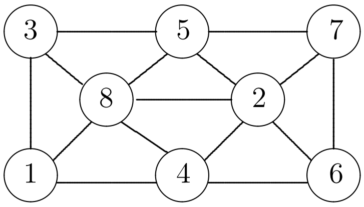
24. ***Dois meses iguais*** – Setembro de 2006.

25. ***A faixa e o quadrado***

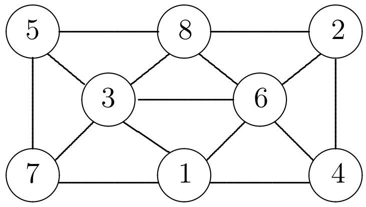


26. ***Um número e seu sêxtuplo*** – Resposta: 746 é a única solução.

27. ***Oito dentro de um retângulo*** – Pelo menos duas soluções:



e



28. ***Uma estratégia com um número muito grande*** – Resposta: 99 999 585 960.

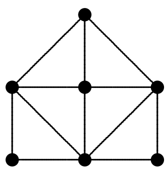
29. ***Um número surpreendente*** – Resposta: 381 654 729.

30. ***Qual é o erro?*** – Cláudia e Bruno.

31. ***Soma*** – Três soluções:

$$\begin{array}{r} 231468 \\ 231468 \\ +\quad 5972 \\ \hline 468908 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 264538 \\ 264538 \\ +\quad 9102 \\ \hline 538178 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 273548 \\ 273548 \\ +\quad 1602 \\ \hline 548698 \end{array}$$

32. ***Bolinhas***



33. ***Um número que não é divisível por 5*** – Resposta: 2 004.

34. ***Quatro frações e um inteiro*** – Resposta: 1.

35. ***O Rei Arthur e o Dragão das Três Cabeças e Três Caudas*** – Resposta: 5.

36. ***O passeio do cavalo***

A	X	M	R	G
N	S	H	Y	L
I	B	W	F	Q
T	O	D	K	V
C	J	U	P	E

37. ***As faces do cubo*** – Resposta: 24.

38. ***Data fatídica*** – Resposta: 17.06.2345

39. ***Todos com o* 2 –** A opção correta é **(e)**.

40. ***Tortas da vovó*** – A opção correta é **(d)**.

Vamos examinar cada uma das situações propostas. Lembre que, no final, vovó recebeu $7+6+3-2=14$ docinhos.

(a) Impossível, porque ela recebeu, no mínimo, $3-2=1$ docinho de chocolate.

(b) Impossível, porque ela recebeu, no mínimo, $6-2=4$ docinhos de côco.

(c) Impossível, porque $7-2=5>3$.

(d) Possível, porque Sofia pode ter comido um docinho de amora e um de chocolate, restando 6 de amora, 6 de côco e 2 de chocolate para a vovó.

(e) Impossível, porque 7 não é maior do que $6+3-2=7$.

41. ***Família Sétimo*** – Os nascimentos ocorreram em seis dias 1º de abril, logo existem irmãos gêmeos. Como nesse ano temos dois bolos a mais do que há dois anos, então há dois anos o mais jovem ainda não tinha nascido, o penúltimo filho tinha acabado de nascer e os gêmeos já tinham nascido. Atualmente, o mais jovem tem um ano e os gêmeos têm x anos, com $x \geq 3$. Como

$$\underbrace{1+2+3+4+5+6+x}_{\text{número de velas nesse ano}} = 2 \times \underbrace{(1+2+3+4+x-2)}_{\text{número de velas 2 anos atrás}},$$

temos $x=5$. Logo, serão acesas $1+2+3+4+2\times 5+6=26$ velinhas.

42. ***O salta-ficha***

(a) A ficha 7 salta sobre as fichas 8 e 9 formando uma pilha com a ficha 10;

(b) a ficha 4 salta sobre as fichas 5 e 6 formando uma pilha com a ficha 8;

(c) a ficha 6 salta sobre as fichas 3 e 5 formando uma pilha com a ficha 2;

(d) a ficha 5 salta sobre a pilha $(4,8)$ formando uma pilha com a ficha 9 e

(e) a ficha 1 salta sobre a pilha $(6,2)$ formando uma pilha com a ficha 3.

O resultado segue.

$$\begin{array}{ccccc} ⑥ & ① & ④ & ⑤ & ⑦ \\ ② & ③ & ⑧ & ⑨ & ⑩ \end{array}$$

43. ***O menor*** – Como $5^2 = 3^2 + 4^2$, temos $5^{2\,002} = (3^2 + 4^2)^{1\,001}$. Sabemos que, para $a > 0$ e $b > 0$,

$$(a+b)^{1\,001} > a^{1\,001} + b^{1\,001}.$$

Assim, $5^{2\,002} > 3^{2\,002} + 4^{2\,002}$.

44. ***O maior resultado*** – Estamos procurando o maior valor de $(10a + b)/(a + b)$, onde a e b representam algarismos, sendo pelo menos um deles diferente de 0. Temos

$$\frac{10a+b}{a+b} = \frac{10a+10b-9b}{a+b} = \frac{10a+10b}{a+b} - \frac{9b}{a+b} = 10 - \frac{9b}{a+b} \leq 10\,.$$

Logo, se conseguirmos encontrar a e b tais que $(10a+b)/(a+b) = 10$, teremos o maior resultado. Note que isso ocorre quando $b = 0$, ou seja,

$$\frac{10}{1} = \frac{20}{2} = \frac{30}{3} = \frac{40}{4} = \frac{50}{5} = \frac{60}{6} = \frac{70}{7} = \frac{80}{8} = \frac{90}{9} = 10\,.$$

Assim, a resposta é 10.

45. ***Dois mil*** – Observe que os números 189, 8 307 e 99 têm todos peso 18 e que 99 é o menor número que pesa 18. Para aumentar o peso de um número e minimizar o número é preciso que o número tenha o maior número possível de algarismos 9. Por outro lado, podemos dizer que o 0 está eliminado dos algarismos a ser considerados, porque ele aumenta o número sem aumentar seu peso.

Temos que $2\,000 = 9 \times 222 + 2$. Logo, o número procurado deve ter 222 algarismos 9 e um algarismo 2, ou dois algarismos 1. Eliminamos o caso dos números com dois algarismos 1 porque eles têm 224 algarismos, sendo, portanto, maiores do que os números que possuem o algarismo 2 e têm 223 algarismos. Assim, o número procurado tem um 2 seguido de 222 algarismos 9: o número é $299\ldots999$.

46. ***No cabeleireiro*** – Seja x o montante inicial no caixa. Esse montante mais o que os três clientes pagaram nos dará o caixa zerado.

- O primeiro cliente paga $x - 10$ e, depois dele, há $x + x - 10 = 2x - 10$ reais no caixa.
- O segundo cliente paga $(2x - 10) - 10 = 2x - 20$ e, depois dele, há $(2x - 10) + (2x - 20) = 4x - 30$ no caixa.
- O terceiro cliente paga $(4x - 30) - 10 = 4x - 40$ e depois dele há $(4x - 30) + (4x - 40) = 8x - 70$ no caixa.

Como o caixa está zerado depois do terceiro cliente, $8x - 70 = 0$, ou seja,

$$x = 70/8 = 8{,}75 \text{ reais.}$$

47. ***O macaco e a raposa*** – 2 450 é o produto dos números primos 1, 2, 5, 5, 7 e 7. As três idades correspondem a uma combinação particular desses números ou de seus produtos. A raposa não pode descobrir as idades no início porque pelo menos duas dessas combinações têm por soma o dobro de sua idade. De todas as combinações possíveis, somente $5 + 10 + 49$ e $7 + 7 + 50$ têm a mesma soma 64.

1ª conclusão: a raposa tem 32 anos.

Depois da nova dica do macaco, a raposa descobriu as idades porque pode eliminar uma combinação, a que contém dois números iguais, uma vez que um deles é o mais jovem de todos.

2ª conclusão: as pessoas têm 5, 10 e 49 anos.

48. ***Nova sequência*** – Cada termo da sequência é a soma do termo precedente com os quadrados de cada um de seus algarismos. De fato,

$$470 = 425 + 4^2 + 2^2 + 5^2,\ 535 = 470 + 4^2 + 7^2 + 0^2, \ldots$$

Assim, depois de 802, os próximos termos serão 870 e 983.

49. ***Retângulo quase quadrado*** – A área é um número da forma $a\,a\,b\,b$, onde a e b representam algarismos, portanto

$$a\,a\,b\,b = 1100a + 11b = 11(100a + b).$$

Seja x a largura do terreno. Então $x(x+1) = 11(100a+b)$ e deduzimos que x ou $x+1$ é um múltiplo de 11. Procurar múltiplos de 11 que satisfaçam a condição obtida é bastante trabalhoso, por isso, para simplificar, vamos estabelecer quais os valores que x pode ter, procurando seus valores mínimo e máximo.

- Mínimo: a menor área possível é 1 111, logo $x(x + 1) = 1\,111$ e $x > 32$.
- Máximo: a maior área possível é 9 999, logo $x(x + 1) = 9\,999$ e $x < 100$.

Agora testamos todos x entre 32 e 100 tais que x ou $x + 1$ seja múltiplo de 11 e que $x(x + 1)$ seja do tipo $a\,a\,b\,b$. Temos apenas doze opções, como segue.

$$33 \times 34 = 1\,122,\ 43 \times 44 = 1\,892,\ 44 \times 45 = 1\,980,\ 54 \times 55 = 2\,970,$$

$$55 \times 56 = 2\,970,\ 65 \times 66 = 4\,290,\ 66 \times 67 = 4\,422,\ 76 \times 77 = 5\,852,$$

$$77 \times 78 = 6\,006,\ 87 \times 88 = 7\,656,\ 88 \times 89 = 7\,832,\ 99 \times 100 = 9\,900.$$

Encontramos três possibilidades para as dimensões do terreno, a saber, 33×34, 66×67 ou 99×100 metros.

50. ***Onde está o erro?*** – Esse deixamos para os alunos!